Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, №1. С. 40–51.

УДК 517.95 DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-40-51
MSC 35L52

ОБ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. А. Максимова

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технический университет связи и информатики», Москва, 111024, Россия

E-mail: ekamaks@bk.ru

Аннотация. Рассмотрена система n уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу в матричной записи, матрица-коэффициент которой имеет одно собственное значение кратности n или пару комплексно-сопряженных собственных значений кратности $n/2$ с действительной частью из интервала $(1/2, 1)$. Вследствие сингулярности на нехарактеристической линии Задача Коши в классической постановке для этой системы является некорректной. Сформулирован аналог задачи Коши с весом, компенсирующим эту особенность. Путем замены переменных матричный коэффициент системы приведен к нормальной жордановой форме, представляющей собой одну жорданову клетку для случая действительных собственных значений и вещественный аналог жордановой клетки порядка n для случая комплексно-сопряженных собственных значений. Методом Римана с использованием аппарата функций от матрицы получены решения поставленной задачи и сформулированы теоремы корректности.

Ключевые слова: метод Римана, задача Коши, дифференциальные уравнения в частных производных, система уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу

Для цитирования: Максимова Е. А. 2022. Об аналоге задачи Коши для одной системы уравнений в частных производных второго порядка. Прикладная математика & Физика. 54(1): 40–51.
DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-40-51

ON THE ANALOGUE OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ekaterina Maksimova

(*Article submitted by a member of the editorial board Sitnik S. M.*)

Moscow technical university Of communications and informatics, Moscow, 111024, Russia
E-mail: ekamaks@bk.ru
Received March, 3, 2022

Abstract. We consider the system of n Euler – Poisson – Darboux Equations in matrix notation and study the case when matrix coefficient has one eigenvalue lying in $(1/2, 1)$. The singularity of equation makes the classical formulation of the Cauchy problem ill-posed. We formulate well-posed analogue of Cauchy problem. The singular behavior can be compensated by adding weight to both of conditions. We perform the change of variables to reduce the coefficient matrix to Jordan normal form. The coefficient is one Jordan block of order n for the case of real eigenvalues and a real analogue of the Jordan block of order $n/2$ for the case of complex conjugate eigenvalues. We construct the solutions using the Riemann method and properties of matrix functions and formulate the well-posedness theorems.

Key words: Riemann method, Cauchy Problem, Euler – Poisson – Darboux Equation, system of partial differential equations

For citation: Maksimova Ekaterina. 2022. On the analogue of the cauchy problem for a system of second order partial differential equations. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 40–51. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-40-51

1. Введение. Дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_{xy} - \frac{a}{x-y}u_x + \frac{b}{x-y}u_y = 0$$

впервые появилось в публикации Эйлера [20] и позднее было исследовано Риманом [23], Пуассоном [22] и Дарбу [21]. Позднее многие авторы[12], [18], [7], [8] уделяли больше внимания рассматриваемому уравнению и к настоящему времени для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу и его аналогов были сформулированы и решены различные краевые задачи и исследованы вопросы их корректности. Задача Коши для этого уравнения наиболее полно исследована в монографии Р. С. Хайруллина [17], где получены общие решения для всех возможных вещественных значений параметров a, b и построены решения задачи Коши.

Краевые задачи для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с матричными коэффициентами были рассмотрены А. А. Андреевым[2], [1], который построил решения различных краевых задач для системы двух уравнений и другими авторами [19],[14].

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений в частных производных в матричной записи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{2G}{y}\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $U = (u_1, ..., u_n)^T, G \in R^{n\times n}$.

В работе [2] построена матрица Римана и с ее помощью получено решение задачи Коши для системы (1) в случае, когда G – 2×2 матрица и её спектр принадлежит интервалу $(-1/2, 1/2)$. В [11], [10] получены решения задачи Коши для случаев, когда собственные значения матрицы $G \in R^{n\times n}$ - комлексно-сопряженные с действительной частью из интервалов $(0, 1/2)$ и $(-1/2, 0)$ соответственно и для случая, когда матрица G является нильпотентной.

Цель данной работы – найти решение задачи Коши для системы (1) для случая, когда матрица G имеет одно собственное значение λ кратности n и

$$\lambda \in R, \lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \tag{2}$$

или пару комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda, \bar{\lambda}$ кратности $n/2$

$$\lambda = \alpha + i\beta, \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \tag{3}$$

Хорошо известно, что задача Коши в классической постановке для собственных значений из рассматриваемого интервала является некорректной[5].

Аналогично подходу, предложенному С. А. Терсеновым[15] для уравнений, для системы (1) эта особенность может быть скомпенсирована добавлением веса как к первому, так и ко второму начальному условию. Таким образом, задача может быть сформулирована в следующем виде.

Задача Коши. Найти вектор-функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D), D = \{(x, y)|0 < -y < x < y + 1\}$
2. $U(x, y)$ удовлетворяет системе (1)
3. выполняются начальные условия

$$(-y)^{2G-E}U(x, 0) = \tau(x), x \in \bar{I} \tag{4}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)\frac{\partial U}{\partial y} + (2G - E)U = \nu(x), x \in I =]0, 1[, \tag{5}$$

где $\tau(x) = (\tau_1(x), ..., \tau_n(x))^T, \nu(x) = (\nu_1(x), ..., \nu_n(x))^T, K(y) = (-y)^{2G}$ — функциональная матрица, полностью определяемая спектром матрицы G.

3. Метод Римана. В характеристических координатах

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$$

область D переходит в область $H : \{(\xi, \eta)|0 < \xi < \eta < 1\}$, матричное уравнение (1) редуцируется к системе уравнений Эйлер – Пуассона – Дарбу специального вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{G}{\eta - \xi}\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{G}{\eta - \xi}\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0,$$

а краевые условия примут следующий вид

$$\lim_{\eta\to\xi+0}\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right)^{2G-E} U(\xi, \xi) = \tau(\xi), \xi \in \bar{I},$$

$$\lim_{\eta\to\xi+0}\frac{\eta-\xi}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)+(2G-E)U=\nu(\xi),\xi\in I.$$

4. Решение Задачи Коши для случая действительных собственных значений $\lambda\in(1/2,0)$. Известно [16], что выполнение условия

$$rank(G-\lambda E)^{n-1}-2rank(G-\lambda E)^{n}+rank(G-\lambda E)^{n+1}=1$$

означает, что существует матрица перехода к жорданову базису Q такая, что

$$Q^{-1}GQ=J(\lambda),$$

где $J(\lambda)$ – жорданова клетка порядка n, соответствующая действительному собственному значению λ,

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений редуцируется к

$$\frac{\partial^2W}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{J}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}-\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)=0, \tag{6}$$

где $W=Q^{-1}U$.

Задача Коши для системы (6):

$$\lim_{\eta\to\xi+0}\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)^{2G-E}W(\xi,\xi)=\tau(\xi),\xi\in\bar{I}, \tag{7}$$

$$\lim_{\eta\to\xi+0}\frac{\eta-\xi}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}-\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)+(2G-E)W=\nu(\xi),\xi\in I. \tag{8}$$

Матрица Римана для системы (6) имеет вид

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=f(J)=V^J{}_2F_1\left(\begin{matrix}J,J\\1\end{matrix};\sigma\right),$$

где $\sigma=-\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}$, $V=\frac{(\eta-\xi)^2}{(\eta-\xi_0)(\eta_0-\xi)}$, ${}_2F_1\left(\begin{matrix}J,J\\1\end{matrix};\sigma\right)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Если $W(\xi,\eta)$ является решением (6), а $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ – матрица Римана этой системы, то, используя свойства матрицы Римана и векторный аналог тождества Грина [6], получаем

$$W(\xi_0,\eta_0)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{2}(RU)\Big|_{\substack{\xi=\eta_0-\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+\frac{1}{2}(RU)\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\xi_0+\varepsilon}}+\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}R\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left(\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\partial R}{\partial\xi}+\frac{4RJ}{\xi-\eta}\right)U\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi\right).$$

Очевидно, $W(\xi_0,\eta_0)$ можно записать в виде:

$$W(\xi_0,\eta_0)=\sum_{k=1}^{n}I(J,w_k)e_k,\text{где } e_k=(e_{k1},e_{k2},...,e_{kn}),e_{ki}=0,i\neq k,e_{kk}=1, \tag{9}$$

w_k – компоненты вектора W,

$$I(J,w_k)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{2}(f(J)w_k)\Big|_{\substack{\xi=\eta_0-\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+\frac{1}{2}(f(J)w_k)\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\xi_0+\varepsilon}}+\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}f(J)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial w_k}{\partial\eta}-\frac{\partial w_k}{\partial\xi}\right)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left(\frac{\partial f(J)}{\partial\eta}-\frac{\partial f(J)}{\partial\xi}+\frac{4f(J)J}{\xi-\eta}\right)w_k\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi\right).$$

Известно [9], что если J – жорданова клетка, то функция от матрицы $I(J,w_k)$ может записана в виде

$$I(J,w_k)=\begin{pmatrix} I(\lambda,w_k) & \frac{I'_\lambda(\lambda,w_k)}{1!} & \dots & \frac{I^{(n-1)}_\lambda(\lambda,w_k)}{(n-1)!} \\ 0 & I(\lambda,w_k) & \dots & \frac{I^{(n-2)}_\lambda(\lambda,w_k)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I(\lambda,w_k) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где

$$I(\lambda,w)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{2}f(\lambda)w)\Big|_{\substack{\xi=\eta_0-\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+\frac{1}{2}f(\lambda)w)\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\xi_0+\varepsilon}}+\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}f(\lambda)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}-\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left(\frac{\partial f(\lambda)}{\partial\eta}-\frac{\partial f(\lambda)}{\partial\xi}+\frac{4f(\lambda)\lambda}{\xi-\eta}\right)w\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi\right)=I_1+I_2+I_3+I_4. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (9), получаем

$$W(\xi_0,\eta_0)=\begin{pmatrix} I(\lambda,w_1)+\frac{I'_\lambda(\lambda,w_2)}{1!}+\frac{I''_{\lambda\lambda}(\lambda,w_3)}{2!}+\dots+\frac{I^{(n-1)}_\lambda(\lambda,w_n)}{(n-1)!} \\ I(\lambda,w_2)+\frac{I'_\lambda(\lambda,w_3)}{1!}+\dots+\frac{I^{(n-2)}_\lambda(\lambda,w_n)}{(n-2)!} \\ \dots \\ I(\lambda,w_n) \end{pmatrix}=$$

$$=EI(\lambda,W)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H^k}{k!}\frac{\partial^k I(\lambda,W)}{\partial\lambda^k}, \tag{12}$$

где H – $n\times n$ матрица вида

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Выполняя в выражении (12) замену $W=Q^{-1}U$, получим

$$U(\xi_0,\eta_0)=EI(\lambda,U)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{QH^kQ^{-1}}{k!}\frac{\partial^k I(\lambda,U)}{\partial\lambda^k}=EI(\lambda,U)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(G-\lambda E)^k}{k!}\frac{\partial^k I(\lambda,U)}{\partial\lambda^k}.$$

Вычислим интеграл (11).

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to0}2^{2\lambda-1}\tau(\eta_0)\varepsilon^{1-\lambda}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\lambda,\lambda\\1\end{matrix};0\right)=0,$$

$$I_2=\lim_{\varepsilon\to0}2^{2\lambda-1}\tau(\xi_0)\varepsilon^{1-\lambda}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\lambda,\lambda\\1\end{matrix};0\right)=0.$$

Для вычисления I_3 применим хорошо известную формулу автотрансформации

$$I_3=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}f(\lambda)\left(w_\eta-w_\xi\right)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left(\frac{(\eta-\xi)^2}{(\eta_0-\xi_0)}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\lambda,\lambda\\1\end{matrix};\sigma\right)\left(w_\eta-w_\xi\right)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\frac{(\eta_0-\xi_0)^{1-2\lambda}}{(\eta_0-\xi)^{1-\lambda}(\eta-\xi_0)^{1-\lambda}}\frac{\Gamma(2\lambda-1)}{\Gamma^2(\lambda)}\frac{\eta-\xi}{2}\left(w_\eta-w_\xi\right)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi.$$

Для вычисления I_4 используем формулу аналитического продолжения гипергеометрической функции и формулы дифференцирования [4]

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\lambda,\lambda\\1\end{matrix};\sigma\right)=\frac{\Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma^2(1-\lambda)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\lambda,\lambda\\2\lambda\end{matrix};\sigma\right)+\frac{\Gamma(2\lambda-1)}{\Gamma^2(\lambda)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1-\lambda,1-\lambda\\2-2\lambda\end{matrix};\sigma\right),$$

$$I_4=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left(R_\xi-R_\eta+\frac{4\lambda w}{\eta-\xi}d\xi\right)=\frac{\Gamma(2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda)}\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}(2\lambda-1)\frac{(\eta_0-\xi_0)^{1-2\lambda}w}{(\eta_0-\xi)^{1-\lambda}(\eta-\xi_0)^{1-\lambda}}d\xi+$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1-\lambda)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\frac{(\eta-\xi)^{2\lambda-1}w}{(\eta_0-\xi)^{\lambda}(\eta-\xi_0)^{\lambda}}d\xi = I_{41}+I_{42}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и подставляя начальные условия в выражения для I_{42} и I_3+I_{41}, получим

$$I(\lambda,U)=K_1(1-\lambda)2^{2\lambda-1}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\frac{\tau(t)dt}{[\varphi(t)]^{\lambda}}+K_2(1-\lambda)(\eta_0-\xi_0)^{1-2\lambda}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\frac{\nu(t)dt}{[\varphi(t)]^{1-\lambda}}, \tag{14}$$

где

$$K_1(\lambda)=\frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)}, K_2(\lambda)=\frac{\Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma^2(1-\lambda)}, \varphi(t)=(\eta_0-t)(t-\xi_0).$$

Из (14) следует бесконечная дифференцируемость функции $I(\lambda,w_k)$ по параметру λ. Производные $I(\lambda,w_k)$ будут иметь вид

$$I^{(k)}(\lambda,U)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(K_2^{(j)}(1-\lambda)(\eta_0-\xi_0)^{1-2\lambda}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(t)[\varphi(t)]^{\lambda-1}\times\left(\ln\frac{\varphi(t)}{(\eta_0-\xi_0)^2}\right)^{k-j}dt+\right.$$

$$\left.+K_1^{(j)}(1-\lambda)2^{2\lambda-1}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(t)[\varphi(\xi)]^{-\lambda}\left(\ln\frac{4}{\varphi(t)}\right)^{k-j}dt\right)=I^{(0)}(\lambda,U),$$

где $K_1^{(j)}(\lambda), K_2^{(j)}(\lambda)$ выражаются через полигамма-фунцию $\Psi^{(k)}(z)$ [4]

$$K_1'(\lambda)=\frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)}(-\Psi(\lambda)+\Psi(2\lambda)),$$

$$K_1''(\lambda)=\frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)}((-\Psi(\lambda)+\Psi(2\lambda))^2+(-\Psi'(\lambda)+2\Psi'(2\lambda)),$$

$$\dots$$

$$K_2'(\lambda)=2\frac{\Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma^2(1-\lambda)}(\Psi(1-\lambda)-\Psi(1-2\lambda)),$$

$$K_2''(\lambda)=2\frac{\Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma^2(1-\lambda)}((\Psi(1-\lambda)-\Psi(1-2\lambda))^2+(\Psi'(\lambda)+2\Psi'(1-2\lambda)),$$

$$\dots$$

Возвращаясь к переменным (x,y), получим решение задачи Коши (4),(5) для уравнения (1)

$$U(x,y)=EL(\lambda,U)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(G-\lambda E)^k}{k!}\frac{\partial^k L(\lambda,U)}{\partial\lambda^k}, \tag{15}$$

$$L^{(k)}(\lambda,U)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(K_2^{(j)}(1-\lambda)(-2y)^{1-2\lambda}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(t)[\psi(t)]^{\lambda-1}\times\left(\ln\frac{\psi(t)}{(-2y)^2}\right)^{k-j}dt+\right.$$

$$\left.+K_1^{(j)}(\lambda)2^{2\lambda-1}\int\limits_{x+y}^{x-y}\tau(t)[\psi(\xi)]^{-\lambda}\left(\ln\frac{4}{\psi(t)}\right)^{k-j}dt\right), \tag{16}$$

где $\psi(t)=(x-y-t)(t-x-y)$.

5. Решение Задачи Коши для случая комплексно-сопряженных собственных значений $Re(\lambda)\in(1/2,1)$.

Из свойств функции от матрицы следует, что вектор-функция $U(x,y)$ есть вещественная функция даже в том случае, когда характеристические числа матрицы G комплексно-сопряженные. Выполнение условий (3) и

$$rank(G-\lambda E)^{n/2-1}-2rank(G-\lambda E)^{n/2}+rank(G-\lambda E)^{n/2+1}=1$$

означает, что существует матрица перехода к жорданову базису Q такая, что

$$Q^{-1}GQ=J=P_n(\alpha,\beta),$$

где $P_n(\alpha,\beta)$ – $n\times n$ матрица вида

$$P_n(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} P(\alpha,\beta) & E & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & P(\alpha,\beta) & E & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & P(\alpha,\beta) & E\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & P(\alpha,\beta)\end{pmatrix}.$$

$$P(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$P_n(\alpha,\beta)$ – вещественный аналог жордановой клетки порядка n, соответствующий паре комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda,\bar{\lambda}$.

В этом случае система преобразуется к виду (6) и задача Коши будет иметь вид (7), (8).

Лемма 1. *Если $C_{2r}(\alpha,\beta)$ – вещественный аналог жордановой клетки порядка $2r$, соответствующий комплексно-сопряженному собственному значению $\alpha\pm i\beta$*

$$C_{2r}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} C(\alpha,\beta) & E & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & C(\alpha,\beta) & E & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C(\alpha,\beta) & E\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C(\alpha,\beta)\end{pmatrix},$$

$$C(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix},E(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

тогда

$$f(C_{2r})=\begin{pmatrix} F & F_1 & \ldots & F_{r-1}\\ 0 & F & \ldots & F_{r-2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & F\end{pmatrix},\ \textit{где} \tag{17}$$

$$F=\begin{pmatrix} Re(f(\alpha+i\beta)) & Im(f(\alpha+i\beta))\\ -Im(f(\alpha+i\beta)) & Re(f(\alpha+i\beta))\end{pmatrix},F_k=\begin{pmatrix} \frac{Re(f^{(k)}(\alpha+i\beta))}{k!} & \frac{Im(f^{(k)}(\alpha+i\beta))}{k!}\\ -\frac{Im(f^{(k)}(\alpha+i\beta))}{k!} & \frac{Re(f^{(k)}(\alpha+i\beta))}{k!}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Известно, что C_{2r} путем преобразования подобия приводится к нормальной жордановой форме

$$J=T^{-1}C_{2r}T=\begin{pmatrix} \begin{matrix}\alpha+i\beta & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \alpha+i\beta & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha+i\beta\end{matrix} & 0\\ 0 & \begin{matrix}\alpha-i\beta & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \alpha-i\beta & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha-i\beta\end{matrix}\end{pmatrix}$$

и $f(C_{2r})=Tf(J)T^{-1}$, где $f(J)$ находится по формуле

$$f(J)=\begin{pmatrix} \begin{matrix} f(\alpha+i\beta) & \frac{f'(\alpha+i\beta)}{1!} & \ldots & \frac{f^{(n-1)}(\alpha+i\beta)}{(n-1)!}\\ 0 & f(\alpha+i\beta) & \ldots & \frac{f^{(n-2)}(\alpha+i\beta)}{(n-2)!}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & f(\alpha+i\beta)\end{matrix} & 0\\ 0 & \begin{matrix} f(\alpha-i\beta) & \frac{f'(\alpha-i\beta)}{1!} & \ldots & \frac{f^{(n-1)}(\alpha-i\beta)}{(n-1)!}\\ 0 & f(\alpha-i\beta) & \ldots & \frac{f^{(n-2)}(\alpha-i\beta)}{(n-2)!}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & f(\alpha-i\beta)\end{matrix}\end{pmatrix}.$$

Находя жордановы цепочки для собственных значений $\alpha\pm i\beta$, получим матрицу преобразования

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ -i & 0 & \ldots & 0 & -i & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ 0 & -i & \ldots & 0 & 0 & -i & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & \ldots & -i & 0 & 0 & \ldots & -i\end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i \\ 1 & -i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Вычисляя произведение $Tf(J)T^{-1}$, получим формулу (17). По лемме 1, функция от матрицы $P_n(\alpha,\beta)$ представима в виде:

$$f(P_n(\alpha,\beta)) = \begin{pmatrix} F & F_1 & \dots & F_{n/2-1} \\ 0 & F & \dots & F_{n/2-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F \end{pmatrix}, \text{где}$$

$$F = \begin{pmatrix} Re(f(\lambda)) & Im(f(\lambda)) \\ -Im(f(\lambda)) & Re(f(\lambda)) \end{pmatrix}, \quad F_k = \begin{pmatrix} \frac{Re(f^{(k)}(\lambda))}{k!} & \frac{Im(f^{(k)}(\lambda))}{k!} \\ -\frac{Im(f^{(k)}(\lambda))}{k!} & \frac{Re(f^{(k)}(\lambda))}{k!} \end{pmatrix}.$$

Рассуждая аналогично случаю $\lambda \in R$, получим

$$W(\xi_0,\eta_0) = ERe(I(\lambda,W)) + B_1 Im(I(\lambda,W)) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n/2-1}\left(\frac{H^k}{k!}Re\left(\frac{\partial^k I(\lambda,W)}{\partial\lambda^k}\right) + \frac{B_{k+1}}{k!}Im\left(\frac{\partial^k I(\lambda,W)}{\partial\lambda^k}\right)\right),$$

где H – $n\times n$ матрица вида (13), B_k – $n\times n$ матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$B_{n/2} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & N \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{где } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$U(\xi_0,\eta_0) = ERe(I(\lambda,U)) + QB_1Q^{-1}Im(I(\lambda,U)) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n/2-1}\left(\frac{QH^kQ^{-1}}{k!}Re\left(\frac{\partial^k I(\lambda,U)}{\partial\lambda^k}\right) + \frac{QB_{k+1}Q^{-1}}{k!}Im\left(\frac{\partial^k I(\lambda,U)}{\partial\lambda^k}\right)\right).$$

Вычисляя значение выражений для $Re(I(\lambda,U)), Im(\lambda,U)$, переходя к пределу, подставляя начальные условия, и возвращаясь к переменным (x,y) получаем решение задачи (1)

$$U(x,y) = ERe(L(\lambda,U)) + QB_1Q^{-1}Im(L(\lambda,U)) +$$
$$\sum_{k=1}^{n/2-1}\left(\frac{QH^kQ^{-1}}{k!}Re\left(\frac{\partial^k L(\lambda,U)}{\partial\lambda^k}\right) + \frac{QB_{k+1}Q^{-1}}{k!}Im\left(\frac{\partial^k I(\lambda,U)}{\partial\lambda^k}\right)\right). \quad (18)$$

$$Re(L(\lambda,U)) = (Re(M_2(1-\lambda))\cos(2\beta\ln(-2y)) + Im(M_2(1-\lambda))\sin(2\beta\ln(-2y)))\times$$
$$\times(-2y)^{1-2\alpha}\int_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)\psi^{\alpha-1}(\xi)\cos(\beta\ln\psi(\xi))d\xi+$$
$$+(Re(M_2(1-\lambda))\sin(2\beta\ln(-2y)) - Im(M_2(1-\lambda))\cos(2\beta\ln(-2y)))\times$$
$$\times(-2y)^{1-2\alpha}\int_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)\psi^{\alpha-1}(\xi)\sin(\beta\ln\psi(\xi))d\xi-$$
$$-2^{2\alpha-1}(Re(M_1(1-\lambda))\cos(\beta\ln 4)) - Im(M_1(1-\lambda))\sin(\beta\ln 4))\times$$

$$\times \int\limits_{x+y}^{x-y} \tau(\xi)\psi^{-\alpha}(\xi)\cos(\beta\ln\psi(\xi))d\xi-$$

$$-2^{2\alpha-1}(Re(M_1(1-\lambda))\sin(\beta\ln 4)) + Im(M_1(1-\lambda))\cos(\beta\ln 4))\times$$

$$\times \int\limits_{x+y}^{x-y} \tau(\xi)\psi^{-\alpha}(\xi)\sin(\beta\ln\psi(\xi))d\xi \tag{19}$$

$$Im(L(\lambda,U)) = Im(M_2(1-\lambda))\cos(2\beta\ln(-2y)) - Re(M_2(1-\lambda))\sin(2\beta\ln(-2y)))\times$$

$$\times(-2y)^{1-2\alpha}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)\psi^{\alpha-1}(\xi)\cos(\beta\ln\psi(\xi))d\xi+$$

$$+(Re(M_2(1-\lambda))\cos(2\beta\ln(-2y)) + Im(M_2(1-\lambda))\sin(2\beta\ln(-2y)))\times$$

$$\times(-2y)^{1-2\alpha}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)\psi^{\alpha-1}(\xi)\sin(\beta\ln\psi(\xi))d\xi-$$

$$-2^{2\alpha-1}(Re(M_1(1-\lambda))\sin(\beta\ln 4)) + Im(M_1(1-\lambda))\cos(\beta\ln 4))\times$$

$$\times \int\limits_{x+y}^{x-y} \tau(\xi)\psi^{-\alpha}(\xi)\cos(\beta\ln\psi(\xi))d\xi-$$

$$-2^{2\alpha-1}(Re(M_1(1-\lambda))\cos(\beta\ln 4)) - Im(M_1(1-\lambda))\sin(\beta\ln 4))\times$$

$$\times \int\limits_{x+y}^{x-y} \tau(\xi)\psi^{-\alpha}(\xi)\sin(\beta\ln\psi(\xi))d\xi, \tag{20}$$

где

$$Re(M_1(\lambda)) = (2\alpha-1)Re(M_2(1-\lambda)) - 2\beta Im(M_2(1-\lambda)),$$
$$Im(M_1(\lambda)) = (2\alpha-1)Im(M_2(1-\lambda)) + 2\beta Re(M_2(1-\lambda)),$$

$$Re(M_2(\lambda)) = \frac{\sin(\pi\alpha)\,\mathrm{ch}(\pi\beta)}{\pi}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\cos\left(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)dt-$$

$$-\frac{\cos(\pi\alpha)\,\mathrm{sh}(\pi\beta)}{\pi}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\sin\left(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)dt,$$

$$Im(M_2(\lambda)) = \frac{\sin(\pi\alpha)\,\mathrm{ch}(\pi\beta)}{\pi}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\sin\left(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)dt-$$

$$-\frac{\cos(\pi\alpha)\,\mathrm{sh}(\pi\beta)}{\pi}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\cos\left(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)dt,$$

$$Re\left(\frac{\partial^k L(\lambda,U)}{\partial\lambda^k}\right) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\Big[(Re(M_2^{(j)}(1-\lambda))\cos(2\beta\ln(-2y))+$$

$$+Im(M_2^{(j)}(1-\lambda))\sin(2\beta\ln(-2y)))\times$$

$$\times(-2y)^{1-2\alpha}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)\psi^{\alpha-1}(\xi)\cos(\beta\ln\psi(\xi))\left(\ln\frac{\psi(\xi)}{(-2y)^2}\right)^{k-j}d\xi+$$

$$+(Re(M_2^{(j)}(1-\lambda))\sin(2\beta\ln(-2y)) - Im(M_2^{(j)}(1-\lambda))\cos(2\beta\ln(-2y)))\times$$

$$\times(-2y)^{1-2\alpha}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)\psi^{\alpha-1}(\xi)\sin(\beta\ln\psi(\xi))\left(\ln\frac{\psi(\xi)}{(-2y)^2}\right)^{k-j}d\xi-$$

$$
-2^{2\alpha-1}(Re(M_1^{(j)}(1-\lambda))\cos(\beta\ln 4)) - Im(M_1^{(j)}(1-\lambda))\sin(\beta\ln 4))\times
$$

$$
\times\int\limits_{x+y}^{x-y}\tau(\xi)\psi^{-\alpha}(\xi)\cos(\beta\ln\psi(\xi))\left(\ln\frac{4}{\psi(\xi)}\right)^{k-j}d\xi-
$$

$$
-2^{2\alpha-1}(Re(M_1^{(j)}(1-\lambda))\sin(\beta\ln 4)) + Im(M_1^{(j)}(1-\lambda))\cos(\beta\ln 4))\times
$$

$$
\times\int\limits_{x+y}^{x-y}\tau(\xi)\psi^{-\alpha}(\xi)\sin(\beta\ln\psi(\xi))\left(\ln\frac{4}{\psi(\xi)}\right)^{k-j}d\xi\Bigg],
$$

$$
Im\left(\frac{\partial^k L(\lambda,U)}{\partial\lambda^k}\right) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\Bigg[Im(M_2^{(j)}(1-\lambda))\cos(2\beta\ln(-2y))-
$$

$$
-Re(M_2^{(j)}(1-\lambda))\sin(2\beta\ln(-2y)))\times
$$

$$
\times(-2y)^{1-2\alpha}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)\psi^{\alpha-1}(\xi)\cos(\beta\ln\psi(\xi))\left(\ln\frac{\psi(\xi)}{(-2y)^2}\right)^{k-j}d\xi+
$$

$$
+(Re(M_2^{(j)}(1-\lambda))\cos(2\beta\ln(-2y)) + Im(M_2^{(j)}(1-\lambda))\sin(2\beta\ln(-2y)))\times
$$

$$
\times(-2y)^{1-2\alpha}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)\psi^{\alpha-1}(\xi)\sin(\beta\ln\psi(\xi))\left(\ln\frac{\psi(\xi)}{(-2y)^2}\right)^{k-j}d\xi+
$$

$$
-2^{2\alpha-1}(Re(M_1^{(j)}(1-\lambda))\sin(\beta\ln 4)) + Im(M_1^{(j)}(1-\lambda))\cos(\beta\ln 4))\times
$$

$$
\times\int\limits_{x+y}^{x-y}\tau(\xi)\psi^{-\alpha}(\xi)\cos(\beta\ln\psi(\xi))\left(\ln\frac{4}{\psi(\xi)}\right)^{k-j}d\xi-
$$

$$
-2^{2\alpha-1}(Re(M_1^{(j)}(1-\lambda))\cos(\beta\ln 4)) - Im(M_1^{(j)}(1-\lambda))\sin(\beta\ln 4))\times
$$

$$
\times\int\limits_{x+y}^{x-y}\tau(\xi)\psi^{-\alpha}(\xi)\sin(\beta\ln\psi(\xi))\left(\ln\frac{4}{\psi(\xi)}\right)^{k-j}d\xi
$$

$$
Re(M_1^{(k)}(\lambda)) = (-1)^{k-1}\big((1-2\alpha)ReM_2^{(k)}(1-\lambda) + 2\beta Im(M_2^{(k)}(1-\lambda))+
$$

$$
+2kRe(M_2^{(k-1)}(1-\lambda))\big),
$$

$$
Im(M_1^{(k)}(\lambda)) = (-1)^{k-1}\big((1-2\alpha)ImM_2^{(k)}(1-\lambda) - 2\beta Re(M_2^{(k)}(1-\lambda))+
$$

$$
+2kIm(M_2^{(k-1)}(1-\lambda))\big),
$$

$$
Re(M_2^{(k)}(\lambda)) = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}\pi^{k-1}\Bigg(\sin\left(\pi\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)\right)\mathrm{ch}(\pi\beta)\times
$$

$$
\times\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\cos\left(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)\left(\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)^{k-j}-
$$

$$
-\cos\left(\pi\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)\right)\mathrm{sh}(\pi\beta)\times\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\sin\left(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)\left(\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)^{k-j}\Bigg),
$$

$$
Im(M_2^{(k)}(\lambda)) = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}\pi^{k-1}\Bigg(\sin\left(\pi\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)\right)\mathrm{ch}(\pi\beta)\times
$$

$$
\times\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\sin\left(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)\left(\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)^{k-j}+
$$

$$+\cos\left(\pi\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)\right)\operatorname{sh}(\pi\beta)\times\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\cos\left(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)\left(\ln\frac{t}{(1-t)^2}\right)^{k-j}\right).$$

Убедиться в том, что полученные решения удовлетворяют уравнению и начальным данным можно непосредственной проверкой. Из самого способа получения решений и их вида следует единственность решения поставленных задач. Таким образом, справедливы следующие теоремы.

6. Основные результаты.

Теорема 1. *Если $\tau(x)\in C^2[0,1]$, и $\nu(x)\in C^2(0,1)$, классическое решение задачи Коши (4), (5) для уравнения (1) в области $D=\{(x,y)|0<-y<x<y+1\}$ при $1/2<\lambda<1$ имеет вид (15),(16)*

Теорема 2. *Если $\tau(x)\in C^2[0,1]$, и $\nu(x)\in C^2(0,1)$, классическое решение задачи Коши (4), (5) для уравнения (1) в области $D=\{(x,y)|0<-y<x<y+1\}$ при комплексно-сопряженных собственных значениях $\lambda, 1/2<Re(\lambda)<1$ определяется формулами (18),(19),(20)*

Замечание 1. *Используя представленный в статье подход и результаты, можно получить решения для случая, когда матрица-коэффициент имеет k собственных значений различной кратности $1/2<Re(\lambda_k)<1$. В этом случае каноническая форма матирицы G будет состоять из k жордановых клеток, исходная система редуцируется к k независимым системам, а решение может быть представлено в виде прямой суммы решений вспомогательных систем [13], как это было сделано в работе [3].*

Замечание 2. *Переходя к пределу при $\beta\to0$ в выражениях (17), (18), получим решение задачи для случая действительных собственных значений (15), (16).*

Список литературы

1. Андреев А. А. 1983. Задачи Коши – Гурса и Дарбу для системы уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу (ЭПД). Межвузовский сборник научных трудов дифференциальные уравнения с частными производными: 53–57.

2. Андреев А. А. 1980. Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа. Дифференциальные уравнения: сб. науч. тр. пед. ин-тов РСФСР. Рязан. гос. пед. ин-т.: 9–14.

3. Андреев А. А., Максимова Е. А. 2015. Краевые задачи для матричного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с данными на характеристике. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, (19)4: 603–612.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 296.

5. Бицадзе А. В. 1970. К теории одного класса уравнений смешанного типа. Некоторые проблемы математики и механики: 112–119.

6. Бицадзе А. В. 1959. Уравнения смешанного типа. М.: Издательство Академии наук СССР, 164.

7. Глушак А. В. 2016. Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Изв. Вузов. Матем., 6: 27–35.

8. Катрахов В. В., Ситник С. М. 2018. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Сингулярные дифференциальные уравнения, СМФН, М.: Российский университет дружбы народов, (64)2: 211–426.

9. Ланкастер П. 1982. Теория матриц. М.: Наука, 272.

10. Максимова Е. А. 2012. О задаче Коши для системы уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу с нильпотентным матричным коэффициентом. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 3(28): 184–187.

11. Максимова Е. А. 2012. О задаче Коши для n-мерной системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу на плоскости. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1(26): 21–30.

12. Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А. 2008. Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара: Самарск. гос. экономический ун-т, 276.

13. Маркус М. and Минк Х. 1972. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 232.

14. Спицын В. Л. 1999. О методе Римана – Адамара для одной системы гиперболического типа второго порядка. Вест. Сам. Гос. Тех. Ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 7: 19-26.

15. Терсенов С. А. 1973. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе: Учеб. пособие для вузов. Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 144.

16. Тыртышников Е. Е. 2007. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 480.

17. Хайруллин Р. С. 2014. Задача Коши для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Казань: Казанский университет, 276.

18. Хайруллин Р. С. 1996. Задача Трикоми для одного уравнения с сингулярными коэффициентами. Известия Вузов. Математика, 3(40), 68–76.

19. Elianu I. 1953. Cercetari asupra sistemelor de ecuatii li neare cu derivate partiale de tip Laplace. Studii Si Cercetari Matematice, IV, 155-196.

20. Euler L. 1768. Institutiones calculi integralis, Opera Omnia. Ser. 1. T. 13. Leipzig, Berlin.

21. Darboux G. 1889. Leçons sur la teorie des surfaces, Part 2, Paris: Gauthier – Villers et Fils,580.

22. Poisson S. D. 1823. Memoire sur l'integration des equations lineaires aux differences partielles, J. de L'Ecole Polytechechnique, Ser. 1:215–248

23. Riemann B. 1860. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abhandlungen der Königkuichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 8: 43–65.

References

1. Andreev A. A. 1983. Zadachi Koshi–Gursa i Darbu dlya sistemy uravnenij Ejlera – Puassona – Darbu (EPD) [Cauchy-Goursat and Darboux problems for the Euler-Poisson-Darboux system of equations (EPD)]. Mezhvuzovskij Sbornik Nauchnyh Trudov Differencial'nye Uravneniya S Chastnymi Proizvodnymi: 53–57.

2. Andreev A. A. 1980. Ob odnom klasse sistem differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa [On one class of system of partian differential equations]. Differencial'nye uravneniya: sb. nauch. tr. ped. in-tov RSFSR. Ryazan. Gos. Ped. In-t. Publ.: 9–14.

3. Andreev A. A., Maksimova E. A. 2015. Boundary value problems for matrix Euler–Poisson–Darboux equation with data on a characteristic.Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki (19)4: 603–612. (In Russian)

4. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 302.

5. Bicadze A. V. 1970. K teorii odnogo klassa uravnenij smeshannogo tipa [On the theory of a class of equations of mixed type]. Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki: 112–119.

6. Bitsadze A. V. 1964. Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 160.

7. Glushak A. V. 2016. Abstract Euler–Poisson–Darboux equation with nonlocal condition. Izv. Vuzov. Matem.,6: 27–35.(In Russian)

8. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. 2018.The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations, In: Singular differential equations, CMFD, Moscow, Peoples' Friendship University of Russia (64)2: 211–426. (In Russian)

9. Lancaster P. Theory of Matrices.1969. New York: Academic Press, 316.

10. Maksimova E. A. 2012. On cauchy problem for euler–poisson–darboux system with nilpotent matrix coefficient. Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 3(28): 184–187(In Russian)

11. Maksimova E. A. 2012. On cauchy problem for system of n Euler–Poisson–Darboux equations in the plane. Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 1(26): 21–30(In Russian)

12. Marichev O. I., Kilbas A. A., Repin O. A. 2008. Kraevye zadachi dlya uravnenij s chastnymi proizvodnymi s razryvnymi koefficientami [Boundary Value Problems for Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients]. Samara: Samarsk. gos. ekonomicheskij un-t, 276.

13. Markus M. and Mink H. 1972. Obzor po teorii matric i matrichnyh neravenstv [Review on matrix theory and matrix inequalities]. Moscow: Nauka Publ., 232.

14. Spicyn V. L. 1999. O metode Rimana – Adamara dlya odnoj sistemy giperbolicheskogo tipa vtorogo poryadka [On the Riemann – Hadamard method for a second-order system of hyperbolic type]. Vest. Sam. Gos. Tekh. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. Nauki., 7: 19–26.

15. Tersenov S. A. 1973. Vvedenie v teoriyu uravnenij, vyrozhdayushchihsya na granice [Introduction to the theory of equations that degenerate at the boundary]: Ucheb. posobie dlya vuzov . Novosibirsk: Izd-vo Novosibirsk. un-ta Publ., 144.

16. Tyrtyshnikov E. E. 2007. Matrichnyj analiz i linejnaya algebra [Matrix analysis and linear algebra]. Moscow: Fizmatlit Publ., 480.

17. Hajrullin R. S. 2014. Zadacha Koshi dlya uravneniya Ejlera – Puassona – Darbu [Cauchy problem for the Euler – Poisson – Darboux equation] – Kazan' : Kazanskij universitet Publ., 276.

18. Hajrullin R. S. 1996. Zadacha Trikomi dlya odnogo uravneniya s singulyarnymi koefficientami [Tricomi problem for one equation with singular coefficients]. Izvestiya Vuzov. Matematika Publ., 3(40), 68–76.

19. Elianu I. 1953. Cercetari asupra sistemelor de ecuatii li neare cu derivate partiale de tip Laplace. Studii Si Cercetari Matematice, IV, 155–196.

20. Euler L. 1768. Institutiones calculi integralis, Opera Omnia. Ser. 1. T. 13. Leipzig, Berlin.

21. Darboux G. 1889. Leçons sur la teorie des surfaces, Part 2, Paris: Gauthier–Villers et Fils 580.

22. Poisson S.D. 1823. Memoire sur l'integration des equations lineaires aux differences partielles, J. de L'Ecole Polytechechnique, Ser. 1: 215–248.

23. Riemann B. 1860. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abhandlungen der Königkuichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 8: 43–65.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 03.03.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Максимова Екатерина Алексеевна – специалист сектора олимпиад школьников, Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технический университет связи и информатики»

http://orcid.org/0000-0002-8839-9620
ул. Авиамоторная, 8а, Москва, Россия
E-mail: ekamaks@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Ekaterina Maksimova – Moscow Technical University of Communication and Informatics, Moscow, Russia