Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, № 2. С. 89–97.

УДК 517.3
MSC 31B15; 47G10; 44A15; 46E30
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-89-97

СВЯЗЬ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ БЕССЕЛЯ И РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Л. Джабраилов, Э. Л. Шишкина

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, г. Грозный, 364024, Россия;
Воронежский государственный университет, г. Воронеж, 394018, Россия,
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: ahmed_0065@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе мы рассматриваем обобщение ядра Гаусса – Вейерштрасса, являющееся решением сингулярного уравнения теплопроводности, и соответствующий ему интеграл. Изучаем их свойства. Далее, мы показываем, что обобщенный потенциал Бесселя функции, интегрируемой в p-й степени со степенным весом, может быть представлен интегралом простого вида при помощи ядра Гаусса – Вейерштрасса.

Ключевые слова: обобщенное ядро Гаусса – Вейерштрасса, сингулярное уравнение теплопроводности, обобщенный потенциал Бесселя

Благодарности: Работа первого автора выполнена при поддержке Минобрнауки РФ по гос. заданию FEGS-2020-0001.

Для цитирования: Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. 2022. Связь обобщенных потенциалов Бесселя и решения сингулярного уравнения теплопроводности. Прикладная математика & Физика. 54(2): 89–97.
DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-89-97

CONNECTION BETWEEN GENERALIZED BESSEL POTENTIALS AND SOLUTIONS TO THE SINGULAR HEAT EQUATION

Akhmed Dzhabrailov, Elina Shishkina

Kadyrov Chechen State University, Grozny, 36402, Russia;
Voronezh State University, Voronezh, 394018, Russia,
E-mail: ahmed_0065@mail.ru, ilina_dico@mail.ru
Received March, 19, 2022

Abstract. In this paper, we consider a generalization of the Gauss – Weierstrass kernel, which is the solution to the singular heat equation and the corresponding integral to it. We study their properties. Further, we show that the generalized Bessel potential of a function integrable to the p-th degree with a power weight can be represented by an integral of a very simple form using the Gauss – Weierstrass kernel.

Keywords: generalized Gauss – Weierstrass kernel, singular heat-conduction equation, generalized Bessel potential

Acknowledgements: the work of the first author was carried out with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on a state assignment FEGS-2020-0001.

For citation: Akhmed Dzhabrailov, Elina Shishkina. 2022. Connection between generalized Bessel potentials and solutions to the singular heat equation. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 89–97. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-89-97

---

1. Введение. В этой статье мы будем иметь дело с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя B_γ (см. [3], стр. 5):

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t}t^\gamma\frac{\partial}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Мы рассматриваем дробное интегрирование, которое представляет собой дробную степень оператора $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$, где I — единичный оператор и Δ_γ — оператор Лапласа–Бесселя вида

$$\Delta_\gamma = (\Delta_\gamma)_x = \sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k}. \tag{2}$$

Дробная степень $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ при помощи преобразования Ханкеля сводится к умножению на степень $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$. А именно, дробная степень $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ реализуется как обобщенная свертка прообраза преобразования Ханкеля функции $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$ и некоторой функции. Такую свертку мы будем называть обобщенным потенциалом Бесселя.

Классический потенциал Бесселя, реализующий дробные степени оператора $(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, где Δ — оператор Лапласа, широко изучен. Такой потенциал появился в работах Н. Ароншайна и К. Т. Смита [13] и А. П. Кальдерона [14] в 1961 г. Пространство потенциалов Бесселя, которое иногда называют пространством Лиувилля дробной гладкости α, является расширением пространств Соболева $L_p^m(\mathbb{R}^n)$ на случай дробного порядка α, поэтому его также называют пространствами Соболева дробного порядка [21, 16]. Результаты о пространстве бесселевых потенциалов были получены И. Стейном [22] для случая $0 < \alpha < 2$ и И. П. Лизоркиным [6] в общем случае. Обращение потенциалов Бесселя с помощью гиперсингулярных интегралов было дано В. А. Ногиным [10, 11] в 1981–85 гг.; М. Л. Гольдманом в [1, 3, 2] получены оптимальные вложения пространств потенциалов типа Бесселя.

Пространство обобщенных потенциалов Бесселя $\mathbf{B}_\gamma^\alpha$, построенного с использованием преобразования Ханкеля, было впервые введено Л. Н. Ляховым и М. В. Половинкиной в [9] с использованием подхода Стейна – Лизоркина. В [9] введенные ранее Л. Н. Ляховым в [8, 7] B-гиперсингулярные интегралы и B-потенциалы Рисса были применены для построения нормы в $\mathbf{B}_\gamma^\alpha$.

В. С. Гулиев, З. В. Сафаров в [19] изучали потенциал Бесселя, порожденный дифференциальными операторами Бесселя. В [19] доказана ограниченность в весовом пространстве Лебега такого потенциала и получены теоремы вложения в пространствах $B_{k,n}$-Соболева – Лиувилля. В [20] потенциалы Бесселя охарактеризованы в терминах пространств B-Лизоркина – Трибеля. Также в этой статье доказано неравенство Юнга для B-сверточных операторов в пространствах $\mathbf{B}_\gamma^\alpha$ и даны некоторые приложения, использующие дифференциальный оператор Лапласа – Бесселя.

2. Основные определения и утверждения. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad x_1>0,\ldots,x_n>0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}{}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0\},$$

$\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ — мультииндекс, составленный из положительных фиксированных вещественных чисел $\gamma_i\geq 0$, $i{=}1,...,n$ и $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

Пусть Ω — конечное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i{=}0$, $i=1,\ldots,n$, $\Omega_+=\Omega\cap\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+=\Omega\cap\overline{\mathbb{R}}^n_+$, где $\overline{\mathbb{R}}{}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0\}$.

Класс $C^0_{ev}(\Omega_+)$ состоит из непрерывных на Ω_+ функций, продолжаемых непрерывно четным образом на Ω при $x_i<0$, $i=1,...,0$.

Пусть $L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)=L_p^\gamma$, $1\leq p<\infty$ — пространство всех измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций, четных по каждой из переменных x_i, $i=1,...,n$, таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x^\gamma dx<\infty,$$

где здесь и далее

$$x^\gamma=\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественных чисел $p\geq 1$ норма в L_p^γ функции f определяется равенством

$$||f||_{L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)}=||f||_{p,\gamma}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x^\gamma dx\right)^{1/p}.$$

Известно (см. [3]), что L_p^γ — банахово пространство.

Нормированная функция Бесселя первого рода j_ν определяется формулой (см. [3], стр. 10 и [6])

$$j_\nu(x)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\,J_\nu(x),\tag{3}$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода.

Для $x\in\mathbb{R}^n$ мы будем использовать обозначение

$$\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)=\prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i),\qquad \mathbf{j}_\gamma(0,\xi)=1.\tag{4}$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f{\in}L_1^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$ выражается как

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)=\mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)x^\gamma dx.$$

Пусть $f{\in}L_1^\gamma(\mathbb{R}_+)$ и представляет собой функцию ограниченной вариации в окрестности точки x непрерывности f. Тогда для $\gamma>0$ формула обращения имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1}_\gamma[\widehat{f}(\xi)](x)=f(x)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^\gamma\,d\xi.$$

Часть шара $|x| \leq r$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, принадлежащая $\mathbb{R}_+^n$, обозначается $B_r^+(n)$. Граница $B_r^+(n)$ обозначается $S_r^+(n)$ и состоит из части сферы $\{x \in \mathbb{R}_+^n : |x|=r\}$ и частей координатных гиперплоскостей $x_i=0$, $i=1, \ldots, n$, таких что $|x_i| \leq r$.

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^\gamma \mathbf{T}_x^y f)(x) = {}^\gamma \mathbf{T}_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1} T_{x_1}^{y_1} \ldots {}^{\gamma_n} T_{x_n}^{y_n} f)(x), \tag{5}$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i}$ для $i=1, \ldots, n$ действует по формуле (см. [6])

$$({}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$$

$$\times \int_0^\pi f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\varphi_i}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ \sin^{\gamma_i - 1}\varphi_i \, d\varphi_i, \qquad \gamma_i > 0.$$

Для $\gamma_i = 0$ обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i}$ имеет вид

$${}^0 T_{x_i}^{y_i} = \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2}.$$

Справедлива формула (см. [11])

$${}^\gamma \mathbf{T}_x^y \, \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \mathbf{j}_\gamma(y, \xi). \tag{6}$$

Обобщенная свертка, порожденная ${}^\gamma \mathbf{T}_x^y$ имеет вид

$$(f * g)_\gamma(x) = (f * g)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y)({}^\gamma \mathbf{T}_x^y g)(x) y^\gamma \, dy. \tag{7}$$

Преобразование Ханкеля, действующее на обобщенную свертку (7), дает

$$\mathbf{F}_\gamma[(f * g)_\gamma(x)](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi) \mathbf{F}_\gamma[g(x)](\xi). \tag{8}$$

3. Свойства ядра типа Гаусса – Вейерштрасса. Рассмотрим функцию вида

$$W_\gamma(x, t) = C_{n,\gamma} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}, \qquad C_{n,\gamma} = \frac{2^{-|\gamma|}}{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}. \tag{9}$$

Функцию (9) будем называть ядром типа Гаусса – Вейерштрасса. Ядро (9) имеет ряд замечательных свойств, в частности является сглаживающим ядром, используемым в определении преобразования Вейерштрасса. Кроме того, с таким ядром тесно связана производящая функция полиномов Эрмита. Ядро вида (9) находит свое применение в теории вероятности, статистике, теории ортогональных полиномов, при построении фильтров в цифровой обработке изображений.

Теорема 3.1. *Для ядра типа Гаусса – Вейерштрасса справедливы следующие свойства:*

(1) ядро (9) *допускает оценку вида*

$$0 < W_\gamma(x, t) < \frac{C_{n,\gamma}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \tag{10}$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+^n$, $t > 0$ и $W_\gamma(x, t)$ является решением сингулярного уравнения теплопроводности вида

$$u_t = \Delta_\gamma u, \qquad u = u(x, t), \tag{11}$$

(2) если $t > 0$, $\eta \geq 0$ и g — измеримая на $(0, \infty)$, то

$$\int_{|x| \geq \eta} g(|x|^2) W_\gamma(x, t) x^\gamma dx = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int_{\frac{\eta^2}{4t}}^\infty g(4t\sigma) e^{-s} s^{\frac{n+|\gamma|}{2} - 1} ds \tag{12}$$

всякий раз, когда интеграл справа существует. В частности, $W_\gamma(x, t)$ является усредняющим ядром

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} W_\gamma(x, t) x^\gamma dx = 1 \tag{13}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{|x|^2}{4t}\right)^a W_\gamma(x, t) x^\gamma dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} + a\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \tag{14}$$

Доказательство.

(1) Оценка ядра (9) очевидна. Покажем, что оно удовлетворяет уравнению (11). Имеем:

$$\Delta_\gamma \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} = \frac{1}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \sum_{i=1}^{n} B_{\gamma_i} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{1}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} =$$

$$= \frac{1}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \left(-\frac{2x_i}{4t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{1}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i+1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} =$$

$$= -\frac{1}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \left((\gamma_i+1)x_i^{\gamma_i} + x_i^{\gamma_i+1}\left(-\frac{2x_i}{4t}\right)\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} =$$

$$= -\frac{1}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}} \sum_{i=1}^{n} \left((\gamma_i+1) - \frac{x_i^2}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}} \left(\frac{|x|^2}{2t} - (n+|\gamma|)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}} \left(\frac{|x|^2}{2t} - (n+|\gamma|)\right),$$

следовательно, $W_\gamma(x,t)$ — есть решение уравнения (11).

(2) Произведем сферическую замену $x = r\sigma$, получим

$$\int\limits_{|x|\geq\eta} g(|x|^2) W_\gamma(x,t) x^\gamma dx = \int\limits_{\eta}^{\infty} g(r^2) r^{n+|\gamma|-1} dr \int\limits_{S_1^+(n)} W_\gamma(r\sigma,t)\sigma^\gamma dS$$

$$= \frac{C_{n,\gamma}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{\eta}^{\infty} g(r^2) e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n+|\gamma|-1} dr \int\limits_{S_1^+(n)} \sigma^\gamma dS = \{r^2 = 4ts\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int\limits_{\frac{\eta^2}{4t}}^{\infty} g(4ts) e^{-s} s^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1} ds,$$

что и дает (12). В частности, при $g = 1$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} W_\gamma(x,t) x^\gamma dx = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{|x|\geq\eta} W_\gamma(x,t) x^\gamma dx = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{\frac{\eta^2}{4t}}^{\infty} e^{-s} s^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1} ds = 1,$$

что совпадает с (13).

При $g = |x|^{2a}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |x|^{2a} W_\gamma(x,t) x^\gamma dx = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{|x|\geq\eta} |x|^{2a} W_\gamma(x,t) x^\gamma dx =$$

$$= \frac{(4t)^a}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{\frac{\eta^2}{4t}}^{\infty} s^a e^{-s} s^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1} ds = (4t)^a \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+a\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)},$$

что и приводит к (14).

4. Свойства обобщенного интеграла Гаусса – Вейерштрасса. Пусть $t > 0$. Для дальнейшего нам понадобится обобщенный интеграл Гаусса – Вейерштрасса вида

$$(\mathscr{W}_t^\gamma \varphi)(x) = u_\gamma(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} W_\gamma(y,t)({}^\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy. \tag{15}$$

Теорема 4.1. *Пусть φ — измеримая на $\mathbb{R}_+^n$ функция такая, что обобщенный интеграл Гаусса – Вейерштрасса* (15) *от φ существует в точке (a,b), $a \in \mathbb{R}_+^n$, $b > 0$ и пусть $S = \mathbb{R}_+^n \times (0,b)$. Тогда $u_\gamma(x,t)$ существует для всех $(x,t) \in S$ и $u_\gamma(x,t)$ — есть решение уравнения теплопроводности вида $u_t = \Delta_\gamma u$, $u = u(x,t)$ на S.*

Доказательство. Пусть $(x,t) \in S$. Мы имеем по условию теоремы, что интеграл

$$u_\gamma(a,b) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} W_\gamma(y,b)({}^\gamma \mathbf{T}_a^y \varphi(a)) y^\gamma dy \tag{16}$$

сходится.

Пусть $(x,t)\in S$,

$$D_+=\left\{y\in\mathbb{R}^n_+ : |a-y|\geq\frac{\beta|a-x|}{\beta-\tau}\right\},\qquad E_+=\mathbb{R}^n_+\setminus D_+,$$

где $\tau=\sqrt{t}$, $\beta=\sqrt{b}$. Тогда имеем

$$u_\gamma(x,t)=\int\limits_{D_+}({}^\gamma\mathbf{T}^y_x W_\gamma(x,t))\varphi(y)y^\gamma dy+\int\limits_{E_+}({}^\gamma\mathbf{T}^y_x W_\gamma(x,t))\varphi(y)y^\gamma dy. \tag{17}$$

Пусть $\langle xy\cos\varphi\rangle=x_1y_1\cos\varphi_1+...+x_ny_n\cos\varphi_n$ и

$$C(\gamma)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}.$$

В интеграле $\int\limits_{D_+}({}^\gamma\mathbf{T}^y_x W_\gamma(x,t))\varphi(y)y^\gamma dy$ перейдем к координатам

$$\widetilde{y}_1=y_1\cos\varphi_1,\qquad \widetilde{y}_2=y_1\sin\varphi_1,$$
$$\widetilde{y}_3=y_2\cos\varphi_2,\qquad \widetilde{y}_4=y_2\sin\varphi_2,\ldots,$$
$$\widetilde{y}_{2n-1}=y_n\cos\varphi_n,\qquad \widetilde{y}_{2n}=y_n\sin\varphi_n,$$

получим

$$\int\limits_{D_+}({}^\gamma\mathbf{T}^y_x W_\gamma(x,t))\varphi(y)y^\gamma dy=\frac{C_{n,\gamma}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{D_+}\left({}^\gamma\mathbf{T}^y_x e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right)\varphi(y)y^\gamma dy=$$

$$=\frac{C_{n,\gamma}C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{D_+}\left(\int\limits_0^\pi...\int\limits_0^\pi\exp\left(-\frac{1}{4t}[|x|^2+|y|^2-2\langle xy\cos\varphi\rangle]\right)\prod_{i=1}^n\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i,\right)\varphi(y)y^\gamma dy=$$

$$=\frac{C_{n,\gamma}C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{\widetilde{D}_+}\exp\left(-\frac{1}{4t}[(x_1-\widetilde{y}_1)^2+\widetilde{y}_2^2+...+(x_n-\widetilde{y}_{2n-1})^2+\widetilde{y}_{2n}^2]\right)\varphi(y)\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1}x^\gamma d\widetilde{y}=$$

$$=\frac{C_{n,\gamma}C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{\widetilde{D}_+}\exp\left(-\frac{1}{4t}\left(|x-\widetilde{y}'|^2+|\widetilde{y}''|^2\right)\right)\varphi(y)\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1}x^\gamma d\widetilde{y},$$

где $\widetilde{y}=(\widetilde{y}_1,...,\widetilde{y}_{2n})=(\widetilde{y}',\widetilde{y}'')$, $\widetilde{y}'=(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_3,...,\widetilde{y}_{2n-1})$, $\widetilde{y}''=(\widetilde{y}_2,\widetilde{y}_4,...,\widetilde{y}_{2n})$,
$\widetilde{D}_+=\{\widetilde{y}\in\mathbb{R}^{2n}:(\sqrt{\widetilde{y}_1^2+\widetilde{y}_2^2},...,\sqrt{\widetilde{y}_{2n-1}^2+\widetilde{y}_{2n}^2})\in D_+, y_{2i}^{\gamma_i-1}>0, i=1,...,n\}$. Если $\widetilde{y}\in\widetilde{D}_+$, то $y\in D_+$ и

$$|x-\widetilde{y}'|^2+|\widetilde{y}''|^2=|x-y|^2\geq(|a-y|-|a-x|)^2\geq|a-y|\left(1-\frac{\beta-\tau}{\beta}\right)^2=|a-y|^2\frac{\tau^2}{\beta^2}=$$

$$=(|a-\widetilde{y}'|^2+|\widetilde{y}''|^2)\frac{\tau^2}{\beta^2},$$

следовательно,

$$\exp\left(-\frac{1}{4t}\left(|x-\widetilde{y}'|^2+|\widetilde{y}''|^2\right)\right)\leq\exp\left(-\frac{1}{4t}\left(|a-\widetilde{y}'|^2+|\widetilde{y}''|^2\right)\right).$$

Тогда, применяя это неравенство и возвращаясь обратно к переменным $y=(y_1,...,y_n)$, получим

$$\int\limits_{D_+}({}^\gamma\mathbf{T}^y_x W_\gamma(x,t))\varphi(y)y^\gamma dy\leq$$

$$\leq\frac{C_{n,\gamma}C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{\widetilde{D}_+}\exp\left(-\frac{1}{4t}\frac{\tau^2}{\beta^2}[(a_1-\widetilde{y}_1)^2+\widetilde{y}_2^2+...+(a_n-\widetilde{y}_{2n-1})^2+\widetilde{y}_{2n}^2]\right)\varphi(y)\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1}x^\gamma d\widetilde{y}=$$

$$=\frac{2^{-|\gamma|}}{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{D_+}e^{-\frac{|y|^2}{4b}}\left({}^\gamma\mathbf{T}^y_a\varphi(a)\right)y^\gamma dy=\left(\frac{b}{t}\right)^{\frac{n+|\gamma|}{2}}\int\limits_{D_+}W_\gamma(y,b)({}^\gamma\mathbf{T}^y_a\varphi(a))y^\gamma dy<\infty.$$

Здесь мы учли сходимость интеграла (16).

Покажем теперь ограниченность интеграла $\int\limits_{E_+}({}^\gamma\mathbf{T}^y_x W_\gamma(x,t))\varphi(y)y^\gamma dy$. В силу оценки обобщенного сдвига и (10) для всех $y\in E_+$, получим

$$\int\limits_{E_+}|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x W_\gamma(x,t))\varphi(y)|y^\gamma dy\leq\frac{C_{n,\gamma}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{E_+}|\varphi(y)|y^\gamma dy=$$

$$= e^{\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}} \left(\frac{\beta}{\tau}\right)^{n+|\gamma|} C_{n,\gamma} \frac{e^{-\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}}}{b^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{E_+} |\varphi(y)| y^\gamma dy.$$

Для $y \in E_+$ имеем $|a-y| \le \frac{\beta|a-x|}{\beta-\tau}$ и

$$W_\gamma(a-y,b) = C_{n,\gamma} \frac{e^{-\frac{|a-y|^2}{4b}}}{b^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \ge C_{n,\gamma} \frac{e^{-\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}}}{b^{\frac{n+|\gamma|}{2}}},$$

следовательно, в силу сходимости интеграла (16)

$$\int\limits_{E_+} |({}^\gamma \mathbf{T}_x^y W_\gamma(x,t))\varphi(y)| y^\gamma dy \le e^{\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}} \left(\frac{\beta}{\tau}\right)^{n+|\gamma|} \int\limits_{E_+} W_\gamma(a-y,b)|\varphi(y)| y^\gamma dy < \infty.$$

Тогда из (17) мы получаем, что $u_\gamma(x,t)$ существует для всех $(x,t) \in S$. То, что $u_\gamma(x,t)$ есть решение уравнения теплопроводности вида $u_t = \Delta_\gamma u$, $u = u(x,t)$ на S следует из Теоремы 3.1. Теорема доказана.

Лемма 4.1. *Если $\varphi \in C^0_{ev}(S)$, то $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0)} u_\gamma(x,y) = \varphi(x_0)$ на S равномерно по x_0 в любом компактном подмножестве $\mathbb{R}^n_+$. Если, кроме того, φ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^n_+$, то сходимость равномерна на $\mathbb{R}^n_+$.*

Следствие 4.1. *Функция $u_\gamma(x,t)$ есть решение задачи Коши вида*

$$u_t = \Delta_\gamma u, \qquad u = u(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

на $S = \mathbb{R}^n_+ \times (0,b)$ при $\varphi \in C^0_{ev}(S)$.

Пример 4.1. Решение задачи Коши

$$u_t = \Delta_\gamma u, \qquad u = u(x,t), \qquad t \in (0,b), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

$$u(x,0) = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

определяется формулой

$$u_\gamma(x,t) = \frac{C_{n,\gamma} \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \mathbf{j}_\gamma(y,\xi) y^\gamma dy.$$

Здесь мы учли формулу (6). Найдем интеграл:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \mathbf{j}_\gamma(y,\xi) y^\gamma dy = \{y = r\sigma\} = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n+|\gamma|-1} dr \int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\sigma,\xi)\sigma^\gamma dS.$$

Применяя формулу (см. [11], формула 246) вида

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\sigma,\xi)\sigma^\gamma\, dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\, j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|),$$

получим

$$u_\gamma(x,t) = \frac{C_{n,\gamma}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n+|\gamma|-1}\, j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|) dr =$$

$$= \frac{C_{n,\gamma}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{\frac{n+|\gamma|}{2}}\, J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|) dr =$$

$$= \frac{2^{-|\gamma|}}{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \frac{\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}\, 2^{\frac{n+|\gamma|}{2}} e^{-t|\xi|^2} |\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1} t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}.$$

После упрощения будем иметь

$$u_\gamma(x,t) = e^{-t|\xi|^2}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi).$$

5. Определение обобщенного потенциала Бесселя и его свойства. Представление обобщенного потенциала Бесселя через обобщенный интеграл Гаусса – Вейерштрасса. Определим обобщенный потенциал Бесселя соотношением

$$(\mathbf{G}^\alpha_\gamma \varphi)(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|)({}^\gamma \mathbf{T}^y_x \varphi(x)) y^\gamma dy. \tag{18}$$

Также можем записать
$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = (G_\alpha^\gamma(x) * \varphi(x))_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_\alpha^\gamma(y)(\,^\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy, \tag{19}$$

где $G_\alpha^\gamma(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|)$ — обобщенное ядро Бесселя. Функция $K_\alpha(x)$ — это модифицированная функция Бесселя второго рода (см. [1, 18]).

Для обобщенного ядра Бесселя справедливы свойства [17]:

(1) преобразование Ханкеля ядра $G_\alpha^\gamma(x)$ имеет вид $\mathbf{F}_\gamma[G_\alpha^\gamma](\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}$,

(2) $G_\alpha^\gamma(x)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат,

(3) для $|x| \to 0$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку
$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{2^{n-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha-|\gamma|}} |x|^{\alpha-n-|\gamma|}, & \text{если } 0<\alpha<n+|\gamma|; \\ -2^{1-n}\left(\ln\left(\frac{|x|}{2}\right)+\vartheta\right), & \text{если } \alpha = n+|\gamma|; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\right)}{2^n}, & \text{если } n+|\gamma|<\alpha, \end{cases} \tag{20}$$

(4) для $|x| \to \infty$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку
$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{\sqrt{\pi} 2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha+1}{2}}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} e^{-|x|},$$

(5) $G_\alpha^\gamma(x) \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$,

(6) $(G_\alpha^\gamma * G_\beta^\gamma)_\gamma = G_{\alpha+\beta}^\gamma$, $\alpha>0$, $\beta>0$, где$(G_\alpha^\gamma * G_\beta^\gamma)_\gamma$ — обобщенная свертка (7),

(7) $(I-\Delta_\gamma)^k G_{\alpha+2k}^\gamma = G_\alpha^\gamma$, $k \in \mathbb{N}$,

(8) $\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_\alpha^\gamma(x) x^\gamma dx = 1$.

Из этих свойств следует, что для функции $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \le p \le \infty$ оператор $\mathbf{G}_\gamma^\alpha$ ограничен и
$$||\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi||_{p,\gamma} \le ||\varphi||_{p,\gamma}, \qquad \alpha>0.$$

Кроме того, справедливы следующие основные свойства обобщенного потенциала Бесселя

(1) полугрупповое свойство $\mathbf{G}_\gamma^\alpha \mathbf{G}_\gamma^\beta \varphi = \mathbf{G}_\gamma^{\alpha+\beta}\varphi$, $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$,

(2) $(I-\Delta_\gamma)^k \mathbf{G}_\gamma^{\alpha+2k}\varphi = \mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$,

(3) $\mathbf{G}_\gamma^0 \varphi = \varphi$, $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$.

Следовательно, при $\alpha = k \in \mathbb{N}$ оператор $\mathbf{G}_\gamma^\alpha$ можно рассматривать как конструктивную реализацию отрицательной степени итерированного оператора $(I-\Delta_\gamma)^k$.

Формулы обращения обобщенного потенциала Бесселя были получены в [15].

Теперь обратимся к соотношению между обобщенным потенциалом Бесселя и одномерным обобщенным интегралом Гаусса – Вейерштрасса.

Теорема 5.1. *Пусть $\alpha>0$, $1 \le p \le \infty$, $\varphi \in L_p^\gamma$ и $u_\gamma(x,t)$ — обобщенный интеграл Гаусса – Вейерштрасса функции φ на Ω. Тогда обобщенный потенциал Бесселя $\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi$ почти для всех x совпадает с интегралом*
$$\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} u_\gamma(x,t) dt. \tag{21}$$

Доказательство. Мы имеем
$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} u_\gamma(x,t) dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (\,^\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy \int\limits_0^\infty W_\gamma(y,t) t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} dt =$$
$$= \frac{2^{-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (\,^\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy \int\limits_0^\infty e^{-\frac{|y|^2}{4t}-t} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{n+|\gamma|}{2}-1} dt.$$

Для внутреннего интеграла, используя Wolfram Mathematica, получим
$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{|y|^2}{4t}-t} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{n+|\gamma|}{2}-1} dt = 2^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}+1} |y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|),$$

тогда

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-t}u_\gamma(x,t)dt=$$

$$=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy=\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi(x),$$

что и завершает доказательство.

Список литературы

1. Гольдман М. Л. 2007. Интегральные свойства обобщенных бесселевых потенциалов. ДАН. 414(2): 159-164.
2. Гольдман М. Л. 2008. Перестановочно-инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса. ДАН. 423(1): 14-18.
3. Гольдман М. Л. 2008. Конус перестановок для обобщенных бесселевых потенциалов. Тр. МИАН. 260: 151-163.
4. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука-Физматлит, 204.
5. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН. 6:2 (42): 102-143.
6. Лизоркин П. И. 1970. Описание пространств $L^r_p(R_n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов. Матем. сб., 81(123): 79-91.
7. Ляхов Л. Н. 1990. Об одном классе гиперсингулярных интегралов. Докл. АН СССР. 315(2): 291-296.
8. Ляхов Л. Н. 1991. Обращение B-потенциалов Рисса. Докл. АН СССР. 321(3): 466-469.
9. Ляхов Л. Н., Половинкина М. В. 2005. Пространство весовых потенциалов Бесселя. Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Тр. МИАН. – М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика». 250: 192-197.
10. Ногин В. А. 1982. Об обращении бесселевых потенциалов. Дифференц. уравнения, 18(8): 1407-1411.
11. Ногин В. А. 1985. Обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов. Изв. вузов. Матем. 3: 57-65.
12. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.
13. Aronszajn N., Smith K. T. 1961. Theory of Bessel potentials, I. Ibid. 11: 365-475.
14. Calderon A. P. 1961 Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R. I., 4: 33-50.
15. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms. 10(3): 232.
16. Ekincioglu I., Keskin C., Guner S. 2018. $BL^m_{p,\nu}$ Estimates for the Riesz transforms assicated with Laplace–Bessel operator. J. Nonlinear Sci. Apply. 11: 832-840.
17. Ekincioglu I., Shishkina E. L., Keskin C. 2021. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions. 32(12): 932-947.
18. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Co, 308.
19. Guliev V. S., Safarov Z. V. 2001. $B_{k,n}$-Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$-Sobolev–Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 15: 68-80.
20. Guliyev V. S., Serbetci A., Akbulut A., Mammadov Y. Y. 2011. Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J. 2(3): 42-66.
21. Guliyev V. S., Serbetci A. and Ekincioglu I. 2007. On boundedness of the generalized B-potential integral operators in the Lorentz spaces. Integral Transforms and Special Functions. 18(12): 885-895.
22. Stein E. M. 1961. The characterization of functions arising as potentials. I. Bull. Amer. Math. Soc. 67(1): 102-104.
23. Watson G. N. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press, 804.

References

1. Gol'dman M. L. 2007. Integral'nye svoystva obobshchennykh besselevykh potentsialov [Integral properties of generalized Bessel potentials]. DAN. 414(2): 159-164.
2. Gol'dman M. L. 2008. Konus perestanovok dlya obobshchennykh besselevykh potentsialov [The cone of rearrangements for generalized Bessel potentials]. Tr. MIAN. 260: 151-163.
3. Gol'dman M. L. 2008. Perestanovochno-invariantnye obolochki obobshchennykh potentsialov Besselya i Rissa [Rearrangement-invriant spans for generalized Bessel and Riesz Potentials]. DAN. 423(1): 14-18.

4. Kipriyanov I. A. 1997. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi [Singular Elliptic Boundary Value Problems]. M., Nauka–Fizmatlit, 204.
5. Levitan B. M. 1951. Razlozhenija po funkcijam Besselja v rjady i integraly Fur'e [Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions]. M., UMN. 6:2 (42): 102-143.
6. Lizorkin P. I. 1970. Opisanie prostranstv $L_p^r(R_n)$ v terminakh raznostnykh singulyarnykh integralov [Characterization of the spaces $L_p^r(R_n)$ in terms of difference singular integrals]. Matem. sb., 81(123): 79–91.
7. Lyakhov L.N. 1991. A class of hypersingular integrals. Dokl. Math., 42 (3): 765-769 (in Russian).
8. Lyakhov L.N. 1992. Inversion of Riesz B-potentials. Dokl. Math., 44 (3): 717-720 (in Russian).
9. Lyakhov L. N., Polovinkina M. V. 2005. Prostranstvo vesovykh potentsialov Besselya [The Space of Weighted Bessel Potentials]. Differentsial'nye uravneniya i dinamicheskie sistemy, Sbornik statey, Tr. MIAN. — M.: Nauka, MAIK «Nauka/Interperiodika». 250: 192-197.
10. Nogin V. A. 1982. Ob obrashchenii besselevykh potentsialov [Inversion of Bessel potentials]. Differents. uravneniya, 18(8): 1407-1411.
11. Nogin V.A. 1985. Inversion of Bessel potentials by means of hypersingulr integrals. Soviet Math. (Iz. VUZ). 29(3): 73-83 (in Russian).
12. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2019. Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya [Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator]. Fizmatlit, Moskva, 224.
13. Aronszajn N., Smith K. T. 1961. Theory of Bessel potentials, I. Ibid. 11: 365-475.
14. Calderon A. P. 1961 Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R. I., 4: 33-50.
15. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms. 10(3): 232.
16. Ekincioglu I., Keskin C., Guner S. 2018. $BL_{p,\nu}^m$ Estimates for the Riesz transforms assicated with Laplace–Bessel operator. J. Nonlinear Sci. Apply. 11: 832-840.
17. Ekincioglu I., Shishkina E. L., Keskin C. 2021. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions. 32(12): 932-947.
18. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Co, 308.
19. Guliev V. S., Safarov Z. V. 2001. $B_{k,n}$-Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$-Sobolev–Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 15: 68-80.
20. Guliyev V. S., Serbetci A., Akbulut A., Mammadov Y. Y. 2011. Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J. 2(3): 42-66.
21. Guliyev V. S., Serbetci A. and Ekincioglu I. 2007. On boundedness of the generalized B-potential integral operators in the Lorentz spaces. Integral Transforms and Special Functions. 18(12): 885-895.
22. Stein E. M. 1961. The characterization of functions arising as potentials. I. Bull. Amer. Math. Soc. 67(1): 102-104.
23. Watson G. N. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press, 804.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 19.03.2022
Поступила после рецензирования 30.04.2022
Принята к публикации 03.05.22

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Джабраилов Ахмед Лечаевич – старший преподаватель, Чеченский государственный университета им. А. А. Кадырова
ул. А. Шерипова, 32, Грозный, 36402, Россия
E-mail: ahmed_0065@mail.ru

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Воронежский государственный университет
Университетская площадь, д. 1, Воронеж, 394018, Россия
E-mail: ilina_dico@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Dzhabrailov Akhmed Lechayevich – Senior Lecturer Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

Shishkina Elina Leonidovna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia