Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, №1. С. 21–27.

УДК 519.213.1
MSC 11K38

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-21-27

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ И ДЛИНА ХОРДЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ГЛАДКИХ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

П. Н. Маргарян

(*Статья представлена членом редакционной коллегии О. В. Черновой*)

Ереванский государственный университет,
Ереван, 0025, республика Армения

E-mail: pargev.margaryan@ysumail.am

Аннотация. В работе рассматриваются функции распределения расстояния между двумя независимыми и равномерно распределенными случайными точками, а также длины хорды в ограниченном выпуклом домене **D**. Используя ряд известных фактов, выводится явный вид функций распределения длины хорды и плотности для ограниченных выпуклых доменов с гладкой границей, а также явный вид функции плотности расстояния между двумя точками.

Ключевые слова: длина хорды, ограниченная выпуклая область, распределения, расстояние между двумя точками, функции плотности, явный вид функции плотности расстояния

Для цитирования: Маргарян П. Н. 2020. Функция распределения расстояния между двумя точками и длина хорды для ограниченных гладких выпуклых областей. Прикладная математика & Физика. 54(1): 21–27.
DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-21-27

DISTRIBUTION FUNCTION OF DISTANCE BETWEEN TWO POINTS AND CHORD LENGTH FOR BOUNDED SMOOTH CONVEX DOMAINS

P. N. Margaryan

(*Article submitted by a member of the editorial board O. V. Chernova*)

Yerevan State University,
Yerevan, 0025, Republic of Armenia
E-mail: pargev.margaryan@ysumail.am

Received February, 10, 2022

Abstract. In the paper we consider the distribution functions of two independent and uniformly distributed random points, as well as the chord length in a bounded convex domain **D**. Using a number of known facts, we derive the explicit form of the distribution functions of the chord length and density for bounded convex bodies with a smooth boundary, as well as the explicit form of the density function of the distance between two points.

Key words: chord length, bounded convex domain, distribution, distance between two points, density functions, explicit form, of the distance density function

For citation: Margaryan P. N. 2020. Distribution function of distance between two points and chord length for bounded smooth convex domains. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 21–27. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-21-27

Введение. Актуальность темы заключается в том, что именно посредством функции распределения длины хорды происходит опознание одной из интересных задач стохастической геометрии: опознание ограниченных выпуклых тел, пересекающих через случайные k – плоскости (k-flats). В работе обсужден случай $k = 1$, $n = 2$. В зависимости от направления изучение выпуклых тел по функции распределения длины хорды эквивалентно изучению его ковариограмм. Все это является задачами геометрической томографии, так как в зависимости от направления функция распределения длины хорды – это вероятность того, что пересечение X-прямо в фиксированном направлении с телом **D** меньше или равно y.

Цель работы – обсудить распределение длины хорды и расстояния между двумя точками в $\mathbf{R}^2$, получить их явный вид для частного случая.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- проанализировать и оценить имеющиеся научно-исследовательские материалы;

- обсудить и выявить некоторые вопросы, связанные с функциями плотности и распределения расстояния между двумя точками и длины хорды;

- получить явный вид функции плотности расстояния между двумя точками ограниченных выпуклых областей с гладкой границей;
- получить явный вид функции плотности и распределения длины хорды ограниченных выпуклых областей с гладкой границей;
- получить функции плотности и распределения длины хорды для случая круга.

Материалы и методы исследования. Проанализированы и обработаны соответствующие научные источники. Когда рассматривается такой случай, при котором направление известно (зафиксировано), то это называется распределением длины хорды, зависящим от направления. А если рассматривается случай, когда направление не зафиксировано, то это называется распределением длины хорды независимо от направления. Последнее и послужило предметом обсуждения данной работы. В работе применены методы теории вероятностей интегральной и стохастической геометрии.

1. Функция распределения расстояния между двумя точками. Функция распределения расстояния r между двумя независимыми и равномерно распределенными случайными точками в ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$ формулируется следующим образом:

$$\mathbf{T}(x) = \mathbf{P}(r \leq x) = \frac{1}{||\mathbf{D}^2||}\boldsymbol{\mu}(P_1, P_2 \in \mathbf{D} : r \leq x) = \frac{1}{||\mathbf{D}||^2}\iint_{r \leq x} dP_1 dP_2,$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – мера Лебега, d – диаметр тела $\mathbf{D} : d = diam(\mathbf{D}) = max\{\boldsymbol{\rho}(x,y) : x, y \in \mathbf{D}\}$, где $\boldsymbol{\rho}(x,y)$ расстояние между точками x и y, $r = \boldsymbol{\rho}(P_1, P_2)$, а $||\mathbf{D}||$ площадь области.
В работе [3] дан следующий результат:

$$\mathbf{T}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\pi x^2}{||\mathbf{D}||} + \left[\frac{8||\mathbf{D}||}{|\partial\mathbf{D}|^2} - \frac{2x^2}{||\mathbf{D}||}\right]\arcsin\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right) & \\ -\left[\frac{x^3|\partial\mathbf{D}|}{16||\mathbf{D}^3||} + \frac{x}{2|\partial\mathbf{D}|||\mathbf{D}||}\right]\left[16||\mathbf{D}^2|| - x^2\,|\partial\mathbf{D}|^2\right]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d, \end{cases} \tag{1}$$

где $|\partial\mathbf{D}|$ периметр области. Предполагается, что граница области свободна от угловых точек и отрезков. Таким образом, для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей функция распределения расстояния между двумя точками дается отмеченной выше (1) формулой. Обозначим функцию плотности расстояния между двумя точками $\boldsymbol{t}\,(x)$. Для $\boldsymbol{t}\,(x)$ получим удобный вид.

Утверждение 1. *Для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей функция плотности расстояния между двумя точками имеет следующий вид:*

$$\mathbf{t}\,(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,d] \\ \frac{2}{||\mathbf{D}||}\left\{\pi x - 2x\arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right] - \frac{x^2|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\left[1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} & 0 < x \leq d. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Из (1) формулой получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}\,(x) = \frac{d}{dx}\,[\mathbf{T}(x)] &= \frac{2\pi x}{||\mathbf{D}||} - \frac{4x}{||\mathbf{D}||}\arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right] + \frac{|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\left[\frac{8||\mathbf{D}||}{|\partial\mathbf{D}|^2} - \frac{2x^2}{||\mathbf{D}||}\right]\left[1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &- \left[\frac{3x^2\,|\partial\mathbf{D}|}{16||\mathbf{D}||^3} + \frac{1}{2\,|\partial\mathbf{D}|\,||\mathbf{D}||}\right]\left[16||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial\mathbf{D}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ x\,|\partial\mathbf{D}|^2\left[\frac{x^3\,|\partial\mathbf{D}|}{16||\mathbf{D}||^3} + \frac{x}{2\,|\partial\mathbf{D}|\,||\mathbf{D}||}\right]\left[16||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial\mathbf{D}|^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{||\mathbf{D}||}\left\{\pi x - 2x\arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right] + \frac{|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\left[\frac{4||\mathbf{D}||^2}{|\partial\mathbf{D}|^2} - x^2\right]\left[1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right. \\ &- \left[\frac{3x^2\,|\partial\mathbf{D}|}{32||\mathbf{D}||^2} + \frac{1}{4\,|\partial\mathbf{D}|}\right]\left[16||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial\mathbf{D}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\left. + x\,|\partial\mathbf{D}|^2\left[\frac{x^3\,|\partial\mathbf{D}|}{32||\mathbf{D}||^2} + \frac{x}{4\,|\partial\mathbf{D}|}\right]\left[16||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial\mathbf{D}|^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} =: \frac{2}{||\mathbf{D}||}\left\{Q_1 + Q_2\right\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$Q_1 = \pi x - 2x\arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right],$$

$$Q_2 = \frac{|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\left[\frac{4||\mathbf{D}||^2}{|\partial \mathbf{D}|^2} - x^2\right]\left[1 - \left(\frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[\frac{3x^2\,|\partial \mathbf{D}|}{32||\mathbf{D}||^2} + \frac{1}{4\,|\partial \mathbf{D}|}\right]\left[16||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+x\,|\partial \mathbf{D}|^2\left[\frac{x^3\,|\partial \mathbf{D}|}{32||\mathbf{D}||^2} + \frac{x}{4\,|\partial \mathbf{D}|}\right]\left[16||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Изучим Q_2:

$$Q_2 = \left[1 - \left(\frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\left[\frac{4||\mathbf{D}||^2}{|\partial \mathbf{D}|^2} - x^2\right]\left[1 - \left(\frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{-1} - 4||\mathbf{D}||\left[\frac{3x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{32||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right] +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{x^3\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2 x}{32||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right]\cdot\left(x\,|\partial \mathbf{D}|^2\right)(4||\mathbf{D}||)\left[16||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2\right]^{-1}\right\} =: \left[1 - \left(\frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\{Q_3 - Q_4\}, \quad (4)$$

где

$$Q_3 = \frac{|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\left[\frac{4||\mathbf{D}||^2}{|\partial \mathbf{D}|^2} - x^2\right]\left[1 - \left(\frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{-1} + \left[\frac{x^3\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2 x}{32||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right]\cdot\left(x\,|\partial \mathbf{D}|^2\right)(4||\mathbf{D}||)\left[16||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2\right]^{-1},$$

$$Q_4 = 4||\mathbf{D}||\left[\frac{3x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{32||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right].$$

Изучим Q_3 :

$$\begin{aligned}
Q_3 &= \frac{4||\mathbf{D}||}{|\partial \mathbf{D}|}\left[\frac{4||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2}{(4||\mathbf{D}||)^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2}\right] + \left[\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{(4||\mathbf{D}||)^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2}\right]\cdot\frac{4||\mathbf{D}||x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2}{32||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\\
&= \frac{4||\mathbf{D}||}{|\partial \mathbf{D}|}\left\{\left[\frac{4||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2}{(4||\mathbf{D}||)^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2}\right] + \left[\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{||\mathbf{D}||^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2}\right]\cdot\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2}{32||\mathbf{D}||^2}\right\}\\
&= \frac{4||\mathbf{D}||}{|\partial \mathbf{D}|}\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{8||\mathbf{D}||^2 - 2x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2}{||\mathbf{D}||^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2}\right] + \left[\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{||\mathbf{D}||^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2}\right]\cdot\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2}{32||\mathbf{D}||^2}\right\}\\
&= \frac{4||\mathbf{D}||}{|\partial \mathbf{D}|}\left\{\frac{||\mathbf{D}||^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2 - \left(x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2\right)}{2\left[||\mathbf{D}||^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2\right]} + \left[\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{||\mathbf{D}||^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2}\right]\cdot\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2}{32||\mathbf{D}||^2}\right\}\\
&= \frac{4||\mathbf{D}||}{|\partial \mathbf{D}|}\left\{\frac{1}{2} + \left[\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{(4||\mathbf{D}||)^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2}\right]\cdot\left[\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2}{32||\mathbf{D}||^2} - \frac{1}{2}\right]\right\}\\
&= \frac{4||\mathbf{D}||}{|\partial \mathbf{D}|}\left\{\frac{1}{2} + \left[\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{(4||\mathbf{D}||)^2 - (x\,|\partial \mathbf{D}|)^2}\right]\cdot\left[\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 - (4||\mathbf{D}||)^2}{32||\mathbf{D}||^2}\right]\right\}\\
&= \frac{4||\mathbf{D}||}{|\partial \mathbf{D}|}\left\{\frac{1}{2} - \frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{32||\mathbf{D}||^2}\right\} = 4||\mathbf{D}||\left\{\frac{1}{2\,|\partial \mathbf{D}|} - \frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{32||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned}
Q_3 - Q_4 &= 4||\mathbf{D}||\left\{\frac{1}{2\,|\partial \mathbf{D}|} - \frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{32||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right\} - 4||\mathbf{D}||\left[\frac{3x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{32||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right]\\
&= 4||\mathbf{D}||\left\{\frac{1}{2\,|\partial \mathbf{D}|} - \frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2 + 3x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 8||\mathbf{D}||^2}{32||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right\}\\
&= 4||\mathbf{D}||\left\{\frac{1}{2\,|\partial \mathbf{D}|} - \frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 + 4||\mathbf{D}||^2}{8||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right\} = 4||\mathbf{D}||\left\{\frac{4||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial \mathbf{D}|^2 - 4||\mathbf{D}||^2}{8||\mathbf{D}||^2\,|\partial \mathbf{D}|}\right\} = -\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}.
\end{aligned}$$

Следовательно, из (4) получим:

$$Q_2 = \left[1 - \left(\frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{Q_3 - Q_4\right\} = -\frac{x^2\,|\partial \mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\left[1 - \left(\frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Из выражений (3) и (5) получим (2):

$$\boldsymbol{t}(x) = \frac{2}{||\mathbf{D}||}\left\{Q_1 + Q_2\right\} = \frac{2}{||\mathbf{D}||}\left\{\pi x - 2x\arcsin\left[\frac{x\,|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right] - \frac{x^2\,|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\left[1 - \left(\frac{x\,|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

■

2. Функция распределения длины хорды. Пространство ориентированных прямых в евклидовой плоскости обозначим буквой $\mathbf{G}$. Любая прямая $g \in \mathbf{G}$ однозначно определяется параметрами p и φ, где p – длина вертикали, проведенная к прямой от начала координат, а φ – угол, составленный вертикалью, проведенной к прямой от начала координат, с положительным направлением оси X . Таким образом, (p, φ) являются координатами прямой $g \in \mathbf{G}$.

В пространстве $\mathbf{G}$ примем в качестве размера локальный конечный размер $\mu(\cdot)$, инвариантный по отношению к группе евклидовых движений (вращение и параллельное перемещение). Известно [8], что инвариантный размер прямых имеет следующий вид: $\mu(dg) = dg = dpd\varphi$. Для любой ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$ множество прямых, пересекающих $\mathbf{D}$, обозначим $[\mathbf{D}] = \{g \in \mathbf{G} : \mathbf{g} \cap \mathbf{D} \neq \varnothing\}$.

Доказано в [2], что: $\mu([\mathbf{D}]) = |\partial\mathbf{D}|$. Обозначим $A_{\mathbf{D}}^{y}$ множество тех прямых, пересекающих $\mathbf{D}$, где длина хорды $|\boldsymbol{\chi}(g)|$ меньше и равна y, где $\boldsymbol{\chi}(g) = g \cap \mathbf{D}$: $A_{\mathbf{D}}^{y} = \{g \in [\mathbf{D}] : |\boldsymbol{\chi}(g)| \leq y\}, y \in \mathbf{R}$. Доказано [10], что $|\boldsymbol{\chi}(g)|$ измеримая функция на $[\mathbf{D}]$.

Функция распределения длины хорды $|\boldsymbol{\chi}(g)|$ области $\mathbf{D}$ формулируется как:

$$\mathrm{F}(y) = \frac{1}{|\partial\mathbf{D}|}\mu(A_{\mathbf{D}}^{y}) = \frac{1}{|\partial\mathbf{D}|}\iint_{A_{\mathbf{D}}^{y}} d\varphi dp. \tag{6}$$

Поэтому для получения функции распределения длины хорды для ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$ необходимо вычислить интеграл, написанный в правой части выражения (6). Для распределения функций длины хорды известны уравнения, данные в явном виде, например, для круга [9], прямоугольника [4] и правильного многоугольника [5].

Доказано в [10], что функция $\mathrm{F}(y)$ – непрерывная функция от y. Обычно предполагается, что F абсолютно непрерывна с плотностью $\boldsymbol{f}$, несмотря на то, что доказательства абсолютной непрерывности F нет.

3. Распределение длины хорды для ограниченных выпуклых областей. В работе [1] дано уравнение для расчета функции плотности $\boldsymbol{t}(x)$ расстояния между двумя независимыми и равномерно распределенными случайными точками в ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$ с помощью функции распределения длины хорды.

$$\boldsymbol{t}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d] \\ \frac{1}{||\mathbf{D}||^2}\left[2||\mathbf{D}||\pi x - 2\,|\partial\mathbf{D}|\,x^2 + 2\,|\partial\mathbf{D}|\,x\int_0^x \mathrm{F}(u)\,du\right] & 0 < x \leq d, \end{cases} \tag{7}$$

где $\mathrm{F}(\cdot)$ – функция распределения длины хорды для области $\mathbf{D}$.

Используя уравнение (7), можем получить уравнение для расчета функции распределения длины хорды в ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$ с помощью функции плотности расстояния между двумя точками.

$$\frac{\boldsymbol{t}(x)}{x} = \frac{1}{||\mathbf{D}||^2}\left[2||\mathbf{D}||\pi - 2\,|\partial\mathbf{D}|\,x + 2\,|\partial\mathbf{D}|\int_0^x \mathrm{F}(u)\,du\right],$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\boldsymbol{t}(x)}{x}\right] = \frac{1}{||\mathbf{D}||^2}\left[-2\,|\partial\mathbf{D}| + 2\,|\partial\mathbf{D}|\,\mathrm{F}(x)\right],$$

$$2\,|\partial\mathbf{D}|\,\mathrm{F}(x) - 2\,|\partial\mathbf{D}| = ||\mathbf{D}||^2\frac{d}{dx}\left[\frac{\boldsymbol{t}(x)}{x}\right],$$

$$2\,|\partial\mathbf{D}|\,\mathrm{F}(x) = 2\,|\partial\mathbf{D}|\,||\mathbf{D}||^2\frac{d}{dx}\left[\frac{\boldsymbol{t}(x)}{x}\right],$$

$$\mathrm{F}(x) = 1 + \frac{||\mathbf{D}||^2}{2\,|\partial\mathbf{D}|}\frac{d}{dx}\left[\frac{\boldsymbol{t}(x)}{x}\right], \quad 0 < x \leq d.$$

Таким образом,

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 + \frac{||\mathbf{D}||^2}{2|\partial\mathbf{D}|}\frac{d}{dx}\left[\frac{\boldsymbol{t}(x)}{x}\right] & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d. \end{cases} \tag{8}$$

В уравнении (8), используя функцию плотности расстояния между двумя точками для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей, можем получить функцию распределения длины хорды для ограниченных выпуклых областей.

Утверждение 2. Для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей функции плотности и распределения длины хорды имеют следующий вид:

$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\left[1-\left(\dfrac{x\,|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac12}, & 0<x\le d;\\ 1, & x\ge d;\end{cases}\qquad \mathrm{f}(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,d];\\ \dfrac{x\,|\partial\mathbf{D}|^2}{16||\mathbf{D}||^2}\left[1-\dfrac{x^2\,|\partial\mathbf{D}|^2}{16||\mathbf{D}||^2}\right]^{-\frac12}, & 0<x\le d.\end{cases}$$

Доказательство. Чтобы получить функцию распределения длины хорды для ограниченных выпуклых областей, нужно в выражение (8) вставить выражение (2):

$$\frac{\boldsymbol{t}\,(x)}{x}=\frac{2}{||\mathbf{D}||}\left\{\pi-2\arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right]-\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac12}\right\},\quad (0<x\le d)\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{\boldsymbol{t}\,(x)}{x}\right]=\frac{2}{||\mathbf{D}||}\Bigg\{&-2\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{-\frac12}\cdot\frac{|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}-\frac{|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac12}\\&+\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\cdot\frac12\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{-\frac12}\cdot\frac{2x|\partial\mathbf{D}|^2}{(4||\mathbf{D}||)^2}\Bigg\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{||\mathbf{D}||^2}{2\,|\partial\mathbf{D}|}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{\boldsymbol{t}\,(x)}{x}\right]&=\frac{||\mathbf{D}||}{|\partial\mathbf{D}|}\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac12}\cdot\Bigg\{-\frac{|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{-1}\\&-\frac{|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}+\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\cdot\frac{x|\partial\mathbf{D}|^2}{(4||\mathbf{D}||)^2}\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{-1}\Bigg\}\\&=\frac{||\mathbf{D}||}{|\partial\mathbf{D}|}\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac12}\\&\cdot\left\{\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\cdot\frac{x|\partial\mathbf{D}|^2}{(4||\mathbf{D}||)^2-(x|\partial\mathbf{D}|)^2}-\frac{|\partial\mathbf{D}|\,(4||\mathbf{D}||)^2}{2||\mathbf{D}||\left[(4||\mathbf{D}||)^2-(x|\partial\mathbf{D}|)^2\right]}-\frac{|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\right\}\\&=\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac12}\cdot\left\{\frac{x^2\,|\partial\mathbf{D}|^2}{2\left[(4||\mathbf{D}||)^2-(x|\partial\mathbf{D}|)^2\right]}-\frac{(4||\mathbf{D}||)^2}{2\left[(4||\mathbf{D}||)^2-(x|\partial\mathbf{D}|)^2\right]}-\frac12\right\}\\&=\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac12}\cdot\left\{\frac{x^2\,|\partial\mathbf{D}|^2-(4||\mathbf{D}||)^2}{2\left[(4||\mathbf{D}||)^2-(x|\partial\mathbf{D}|)^2\right]}-\frac12\right\}\\&=\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac12}\cdot\left\{-\frac12-\frac12\right\}.\end{aligned}$$

Вставив полученное выражение в выражение (8), получим:

$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-\left[1-\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac12} & 0<x\le d\\ 1 & x\ge d\,.\end{cases}$$

Отсюда получим, что:

$$\boldsymbol{f}\,(x)=\frac{d}{dx}\left[\mathrm{F}\,(x)\right]=\begin{cases}0 & x\notin(0,d]\\ \frac{x|\partial\mathbf{D}|^2}{16||\mathbf{D}||^2}\left[1-\frac{x^2|\partial\mathbf{D}|^2}{16||\mathbf{D}||^2}\right]^{-\frac12} & 0<x\le d\,.\end{cases}$$

■

В частном случае для круга с диаметром d получим функции плотности и распределения расстояния между двумя точками и длины хорды.

4. Частный случай. В функциях распределения расстояния между двумя точками в явном виде даны функции плотности и распределения расстояния между двумя точками для ограниченных выпуклых областей (см. уравнение (1) и уравнение (2)).

$$\mathbf{T}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{\pi x^2}{||\mathbf{D}||} + \left[\frac{8||\mathbf{D}||}{|\partial\mathbf{D}|^2} - \frac{2x^2}{||\mathbf{D}||}\right] \arcsin\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right) & \\ -\left[\frac{x^3|\partial\mathbf{D}|}{16||\mathbf{D}||^3} + \frac{x}{2|\partial\mathbf{D}|||\mathbf{D}||}\right]\left[16||\mathbf{D}||^2 - x^2\,|\partial\mathbf{D}|^2\right]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \le d \\ 1 & x \ge d. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{t}\,(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d] \\ \frac{2}{||\mathbf{D}||}\left\{\pi x - 2x \arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right] - \frac{x^2|\partial\mathbf{D}|}{2||\mathbf{D}||}\left[1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} & 0 < x \le d. \end{cases}$$

Очевидно, что для случая с кругом $||\mathbf{D}|| = \frac{\pi d^2}{4}$, $|\partial\mathbf{D}| = \pi d$.

Таким образом, согласно (1) для круга функция распределения расстояния между двумя точками будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{T}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{4x^2}{d^2} + \left[\frac{2}{\pi} - \frac{8x^2}{\pi d^2}\right] \arcsin\left(\frac{x}{d}\right) - \left[\frac{4x^3}{\pi^2 d^5} + \frac{2x}{\pi^2 d^3}\right]\left[\pi^2 d^4 - \pi^2 d^2\right]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \le d \\ 1 & x \ge d, \end{cases}$$

$$\mathbf{T}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{4x^2}{d^2} + \left[\frac{2}{\pi} - \frac{8x^2}{\pi d^2}\right] \arcsin\left(\frac{x}{d}\right) - \left[\frac{4x^3}{\pi d^4} + \frac{2x}{\pi d^2}\right]\left[d^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \le d \\ 1 & x \ge d. \end{cases}$$

Согласно (2) для круга функция плотности расстояния между двумя точками будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{t}\,(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d] \\ \frac{8}{\pi d^2}\left\{\pi x - 2x \arcsin\left(\frac{x}{d}\right) - \frac{2x^2}{d}\left[1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} & 0 < x \le d. \end{cases}$$

Используя уравнение связи между двумя распределениями и уравнение функции распределения расстояния между двумя точками для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей, в явном виде получили функции плотности и распределения длины хорды для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей. Таким образом, согласно распределению длины хорды для ограниченных выпуклых областей (см. утверждение 2), имеем:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - \left[1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4||\mathbf{D}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \le d \\ 1 & x \ge d, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f}\,(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d] \\ \frac{x|\partial\mathbf{D}|^2}{16||\mathbf{D}||^2}\left[1 - \frac{x^2|\partial\mathbf{D}|^2}{16||\mathbf{D}||^2}\right]^{-\frac{1}{2}} & 0 < x \le d, \end{cases}$$

откуда для случая круга получим:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - \left[1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \le d \\ 1 & x \ge d, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f}\,(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d] \\ \frac{x}{d^2}\left[1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} & 0 < x \le d, \end{cases}$$

где $\mathbf{F}(x)$ – функция распределения длины хорды для круга, а $\boldsymbol{f}\,(x)$ – функция плотности длины хорды для круга.

В работе [9] дана функция распределения длины хорды для круга, которая совпадает с полученной в данной работе функцией распределения длины хорды для круга.

Заключение. Таким образом, обобщая работу, приходим к следующему заключению:

– получили явный вид функции плотности расстояния между двумя точками для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей;

– получили явный вид функций плотности и распределения длины хорды для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей.

References

1. Aharonyan N. G. 2015. The distribution of the distance between two random points in a convex set. Russian journal of mathematical research, 1(1): 4-8.
2. Ambartzumian R. V. 1990. Factorization Calculus and Geometric Probability (Encyclopedia Math. Appl. 33). Cambridge University Press, 286.
3. Geciauskas E. 1977. The distribution function of the distance between two points in a convex domain. Adv. Appl. Prob., 9: 472-478.
4. Gille W.. 1988. The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases. Exp. Techn. Phys., 36: 197–208.
5. Harutyunyan H. S., Ohanyan V. K. 2009. Chord length distribution function for regular polygon. Exp. Techn. Phys., 42(2): 358–366.
6. Harutyunyan H. S., Ohanyan V. K. 2011. Chord length distribution function for convex polygons. SUTRA international journal mathematical science education, 4(2): 1-15.
7. Harutyunyan H. S., Ohanyan V. K. 2014. Orientation-dependent section distributions for convex bodies. Journal of contemporary mathematical analysis, 49(3): 139-156.
8. Santalo L .A.. 2004. Integral Geometry and Geometric Probability . Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, MA, 486.
9. Stoyan D., Stoyan H. 1994. Fractals random shapes and point fields. John Wiley & Sons, Chichester, New York.
10. Sulanke R. 1961. Die Verteilung der Sehnenlängen an Ebenen und räumlichen Figuren. Math. Nachr, 22: 51–74.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 10.02.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Маргарян Паргев Нверович – студент четвертого курса кафедры Теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета Ереванского государственного университета

http://orcid.org/0000-0002-5579-9847

ул. Алека Манукяна, 1, Ереван, 0025, республика Армения

E-mail: pargev.margaryan@ysumail.am

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Pargev Margaryan – fourth-year student of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Faculty of Mathematics and Mechanics, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia