Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, № 3. С. 141–153.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
MSC 35G15, 35R30
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-141-153

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ШЕСТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА

А. С. Фараджев

(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет,
Баку, AZ1000, Азербайджан

E-mail: a.farajov@mail.ru

Аннотация. В работе изучается классическое решение одной нелинейной обратной краевой задачи для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестные коэффициенты. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче, в результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, классическое решение, метод Фурье, уравнения Буссинеска шестого порядка

Для цитирования: Фараджев А. С. 2022. Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода. Прикладная математика & Физика, 54(3): 141–153. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-141-153

ON A NON-LOCAL INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SIXTH-ORDER BOUSSINESQ EQUATION WITH NON-LOCAL TIME INTEGRAL CONDITIONS OF THE SECOND KIND

Araz Salamulla ogly Farajov

(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev*)

Azerbaijan State Pedagogical University,
Baku, AZ1000, Azerbaijan
E-mail: a.farajov@mail.ru
Received June, 06, 2022

Abstract. In this paper, studies the classical solution of a nonlinear inverse boundary value problem for the Boussinesq equation of the sixth order with double variance with nonlocal time integral conditions of the second kind. The essence of the problem is that it is required to determine an unknown coefficients together with the solution. The problem is considered in a rectangular area. When solving the original inverse boundary value problem, a transition is made from the original inverse problem to some auxiliary inverse problem. With the help of compressed maps, the existence and uniqueness of the solution of the auxiliary problem are proved. Then the transition to the original inverse problem is made again, as a result, a conclusion is made about the solvability of the original inverse problem.

Keywords: inverse boundary value problem, classical solution, Fourier method, sixth-order Boussinesq equations

For citation: Farajov Araz Salamulla ogly. 2022. On a Nonlocal Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq Equation of the Sixth Order with Nonlocal Time-Integral Conditions of the Second Kind. Applied Mathematics & Physics, 54(3): 141–153 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-141-153

---

1. Введение. В данной статье рассматривается нелокальная обратная задача для уравнения Буссинеска шестого порядка с дополнительным интегральным условием.

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. Наличие в обратных задачах дополнительных неизвестных функций требует, чтобы, помимо граничных условий, естественных для того или иного класса дифференциальных уравнений, задавались также некоторые дополнительные условия переопределения.

Направление в теории дифференциальных уравнений, связанное с исследованием разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями, активно развивается в последнее время. Объясняется это потребностями математического моделирования – см. например, работу [13], в которой показывается влияние эффектов нелокальности и памяти на математическую модель того или иного процесса, и потребностями развития собственно математики, поскольку задачи с нелокальными условиями вообще, и с нелокальными условиями интегрального вида в частности представляют собой новый класс задач теории дифференциальных уравнений с частными производными. Например, нелокальные задачи с граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений изучены в работах [4]-[6].

При исследовании обратных краевых задач существенную роль играет соответствующая прямая задача, а именно при нахождении решения обратной задачи, во многих случаях, используется формула решения прямой краевой задачи. Ниже приводим некоторые работы, где изучены прямые и обратные задачи, близкие к задаче, изучаемой в настоящей статье.

Уравнение Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией описывает движение волн на воде с поверхностью напряжения и рассмотрено Шнайдером и Юджином в [16],

$$u_{xx} = u_{xx} + u_{xxtt} + \mu u_{xxxx} - u_{xxxxtt} + (u^2)_{xx},$$

где $x,\ t,\ \mu \in R$ и $u(x,t) \in R$. Эта модель также может быть формально выведена из задачи о двумерных волнах на воде. Для вырожденного случая они доказали, что предел длинных волн можно приблизительно описать двумя несвязанными уравнениями Кавахары. В [19]-[21] исследовано существование и единственность глобального решения задачи Коши для затухающего уравнения Буссинеска шестого порядка двойной дисперсией:

$$u_{tt} - u_{ttxx} - u_{xx} + u_{xxxx} - u_{xxxxxx} - ru_{txx} = f(u)_{xx},\ \ x \in R,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in R,$$

где $u(x;t), f(s)$ и r обозначают неизвестную функцию, заданную нелинейную функцию и константу соответственно. В работе [22] задача Коши изучена для уравнения

$$u_{tt} - u_{xxtt} - u_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = f(u_x)_x.$$

В работах [17]-[18] найдены условия существования обобщенного решения начальной задачи для уравнения типа Буссинеска со степенной нелинейности $f(u) = \beta|u|^p$.

В работах [10], [14] доказаны теоремы о существовании и единственности классических решений краевых задач для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными условиями.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка изучались в работах [1],[2], [3], [7], [8], [9], [15]. Краткое сообщение данной статьи опубликовано в [11].

2. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче. Пусть $D_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$. Далее, пусть $f(x,t),\ g(x,t),\ \varphi(x),\ \psi(x),\ p_1(t),\ p_2(t),\ h_1(t),\ h_2(t)$ – заданные функции, определенные при $x \in [0,1],\ t \in [0,T]$. Рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t),\ a(t),\ b(t)$ удовлетворяющих уравнению

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_{ttxx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + u_{ttxxxx}(x,t) = \\ &= a(t)u(x,t) + b(t)g(x,t) + f(x,t) \end{aligned} \tag{1}$$

с нелокальными начальными условиями

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \int_0^T p_1(t)u(x,t)dt + \varphi(x), \\ &u_t(x,0) = \int_0^T p_2(t)u(x,t)dt + \psi(x)\ \ (0 \le x \le 1), \end{aligned} \tag{2}$$

граничными условиями

$$u(0,t)=u_x(1,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xxx}(1,t)=0 \ \ (0\le t\le T) \tag{3}$$

и с дополнительными условиями

$$u(x_j,t)=h_i(t) \ \ (i=1,2; x_1\ne x_2; 0\le t\le T). \tag{4}$$

Введем обозначение:

$$\widetilde{C}^{4,2}(D_T)=\{u(x,t):u(x,t)\in C^2(D_T), u_{xxxx}(x,t), u_{ttxxxx}(x,t)\in C(D_T)\}.$$

Определение 1.1. *Тройку* $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *функций* $u(x,t)\in C^{4,2}(D_T)$, $a(t)\in C[0,t]$ *и* $b(t)\in C[0,t]$ *удовлетворяющих уравнению* (1) *в* D_T *условию* (2) *в* $[0,1]$ *и условиям* (3)-(4) *в* $[0,T]$, *назовем классическим решением обратной краевой задачи* (1)-(4).

Для исследования (1)-(4) рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t)=a(t)y(t), \ \ 0\le t\le T, \tag{5}$$

$$y(0)=\int_0^T p_1(t)y(t)dt, \ \ y'(0)=\int_0^T p_2(t)y(t)dt, \tag{6}$$

где $p_1(t),\ p_2(t),\ a(t)\in C[0,T]$ – заданные функции, а $y=y(t)$ – искомая функция, причем под решением задачи (6), (7) понимаем функцию $y(t)$, принадлежащую $C^2[0,T]$ и удовлетворяющую условиям (5), (6) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1.1. [8] *Пусть* $p_1(t),\ p_2(t)\in C[0,T],\ a(t)\in C[0,T]$ *и*

$$\|a(t)\|_{C[0,T]}\le R=const.$$

Кроме того, пусть выполнено неравенство

$$\left(T\|p_2(t)\|_{C[0,T]}+\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\frac{T}{2}R\right)T<1.$$

Тогда задача (5), (6) *имеет только тривиальное решение.*

Теперь наряду с обратной краевой задачей (1)-(4) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить тройку $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ функций $u(x,t)\in C^{4,2}(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$, и $b(t)\in C[0,T]$ из соотношений (1)-(3) и

$$\begin{aligned} &h_i''(t)-u_{xx}(x_i,t)-u_{ttxx}(x_i,t)+u_{xxxx}(x_i,t)+u_{ttxxxx}(x_i,t)=\\ &=a(t)h_i(t)+b(t)g(x_i,t)+f(x_i,t) \ \ (i=1,2; 0\le t\le T). \end{aligned} \tag{7}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть* $\varphi(x),\psi(x)\in C[0,1], p_i(t)\in C[0,T], h_i(t)\in C^2[0,T]$ $(i=1,2)$, $g(x,t)\in C(D_T), h(t)\equiv h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\ne 0$ $(0\le t\le T)$, $f(x,t)\in C(D_T)$, *и выполняется условия согласования*

$$\begin{aligned} &h_i(0)=\int_0^T p_1(t)h_i(t)dt+\varphi(x_i),\\ &h_i'(0)=\int_0^T p_2(t)h_i(t)dt+\psi(x_i), \ \ (i=1,2). \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда справедливы следующие утверждения: каждое классическое решение $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ задачи (1)-(4) является и решением задачи (1)-(3), (7) и каждое решение $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ задачи (1)-(3), (7) такое, что

$$\left(T\|p_2(t)\|_{C[0,T]}+\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\frac{T}{2}\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)T<1 \tag{9}$$

является классическим решением (1)-(4).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(4).

Подставляя в уравнение (1), $x=x_i$, находим:

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x_i,t)-u_{xx}(x_i,t)-u_{ttxx}(x_i,t)+u_{xxxx}(x_i,t)+u_{ttxxxx}(x_i,t)=\\ &=a(t)u(x_i,t)+b(t)g(x_i,t)+f(x_i,t) \ \ (i=1,2; 0\le t\le T). \end{aligned} \tag{10}$$

Далее, считая $h_i(t) \in C^2[0,T]$ $(i = 1,2)$ и дифференцируя два раза (4), имеем:

$$u_{tt}(x_i,t) = h_i''(t) \ \ (i = 1,2; x_1 \neq x_2; 0 \leq t \leq T). \tag{11}$$

Из (13), с учетом (4) и (14), приходим к выполнению (7).

Теперь предположим, что является решением задачи (1)-(3), (7). Из (7) и (10) находим:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(x_i,t) - h_i(t)) = a(t)(u(x_i,t) - h_i(t)) \ \ (i = 1,2; 0 \leq t \leq T). \tag{12}$$

В силу (2) и условий согласования (8), имеем:

$$u(x_i,0) - h_i(0) - \int\limits_0^T p_1(t)(u(x_i,t) - h_i(t))dt =$$

$$= u(x_i,0) - \int\limits_0^T p_1(t)u(x_i,t)dt - \Big(h_i(0) - \int\limits_0^T p_1(t)h_i(t)dt\Big) =$$

$$= \varphi(x_i) - \Big(h_i(0) - \int\limits_0^T p_1(t)h_i(t)dt\Big) = 0 \ \ (i = 1,2),$$

$$u_t(x_i,0) - h_i'(0) - \int\limits_0^T p_2(t)(u(x_i,t) - h_i(t))dt =$$

$$= u_t(x_i,0) - \int\limits_0^T p_2(t)u(x_i,t)dt - \Big(h_i'(0) - \int\limits_0^T p_2(t)h_i(t)dt\Big) = \tag{13}$$

$$= \psi(x_i) - \Big(h_i'(0) - \int\limits_0^T p_2(t)h_i(t)dt\Big) = 0 \ \ (i = 1,2),$$

Из (12) и (13), в силу Леммы 1.1., заключаем, что выполняются условия (4). Теорема доказана.

3. Разрешимость обратной краевой задачи. Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(3), (7) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) sin\lambda_k x \ \ \Big(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)\Big), \tag{14}$$

где

$$u_k(t) = 2\int\limits_0^1 u(x,t) sin\lambda_k x dx \ \ (k = 1,2,...).$$

Тогда, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$(1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)u_k''(t) + (\lambda_k^2 + \lambda_k^4)u_k(t) = F_k(t; u,a,b) \ (0 \leq t \leq T; k = 1,2,...) \tag{15}$$

$$\begin{gathered} u_k(0) = \varphi_k + \int\limits_0^T p_1(t)u_k(t)dt, \\ u_k'(0) = \psi_k + \int\limits_0^T p_2(t)u_k(t)dt \ (k = 1,2,...), \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$F_k(t; u,a,b) = a(t)u_k(t) + b(t)g_k(t) + f_k(t), f_k(t) = \int\limits_0^1 f(x,t) sin\lambda_k x dx,$$

$$g_k(t) = \int\limits_0^1 g(x,t) sin\lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k = 2\int\limits_0^1 \varphi(x) sin\lambda_k x dx,\ \psi_k = 2\int\limits_0^1 \psi(x) sin\lambda_k x dx\ (k = 1, 2, ...).$$

Решая задачу (15)-(16), находим:

$$u_k(t) = \Big(\varphi_k + \int\limits_0^T p_1(t)u_k(t)dt\Big)cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\Big(\psi_k + \int\limits_0^T p_2(t)u_k(t)dt\Big)sin\beta_k t+$$
$$+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)}\int\limits_0^1 F_k(\tau;u,a,b)sin\beta_k(t-\tau)d\tau\ (k = 1, 2, ...), \tag{17}$$

где

$$\beta_k^2 = \frac{\lambda_k^2+\lambda_k^4}{1+\lambda_k^2+\lambda_k^4}\ \ (k = 1, 2, ...).$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ $(k = 1, 2, ...)$ в (14) для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)-(3), (5) получаем:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\Big(\varphi_k + \int\limits_0^T p_1(t)u_k(t)dt\Big)cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\Big(\psi_k + \int\limits_0^T p_2(t)u_k(t)dt\Big)sin\beta_k t+$$
$$+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)}\int\limits_0^t F_k(\tau;u,a,b)sin\beta_k(t-\tau)d\tau\Big\}sin\lambda_k x. \tag{18}$$

Теперь из (7), с учётом (14), имеем:

$$a(t) = [h(t)]^{-1}\Big\{g(x_2,t)(h_1''(t) - f(x_1,t)) - g(x_1,t)(h_2''(t) - f(x_2,t))+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2+\lambda_k^4)(u_k''(t)+u_k(t))(g(x_2,t)sin\lambda_k x_1 - g(x_1,t)sin\lambda_k x_2)\Big\}, \tag{19}$$

$$b(t) = [h(t)]^{-1}\Big\{h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2,t)) - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_1,t))+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2+\lambda_k^4)(u_k''(t)+u_k(t))(h_1(t)sin\lambda_k x_2 - h_2(t)sin\lambda_k x_1)\Big\}. \tag{20}$$

Из (15), с учетом (17), получаем:

$$(\lambda_k^2+\lambda_k^4)(u_k''(t)+u_k(t)) = -u_k''(t) + F_k(t;u,a,b) =$$
$$= \frac{\lambda_k^2+\lambda_k^4}{1+\lambda_k^2+\lambda_k^4}u_k(t) + \Big(1 - \frac{1}{1+\lambda_k^2+\lambda_k^4}\Big)F_k(t;u,a,b) =$$
$$= \frac{\lambda_k^2+\lambda_k^4}{1+\lambda_k^2+\lambda_k^4}u_k(t) + \frac{\lambda_k^2+\lambda_k^4}{1+\lambda_k^2+\lambda_k^4}F_k(t;u,a,b) =$$
$$= \beta_k^2 u_k(t) + \beta_k^2 F_k(t;u,a,b) =$$
$$= \beta_k^2\Big[\Big(\varphi_k + \int\limits_0^T p_1(t)u_k(t)dt\Big)cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\Big(\psi_k + \int\limits_0^T p_2(t)u_k(t)dt\Big)sin\beta_k t+$$
$$+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)}\int\limits_0^t F_k(\tau;u,a,b)sin\beta_k(t-\tau)d\tau\Big] + \beta_k^2 F_k(t;u,a,b),$$
$$(k = 1, 2, ..., 0 \le t \le T).$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй и третьей компоненты решения $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$

задачи (1)-(3), (5) подставим последнее выражение в (19), (20):

$$a(t)=[h(t)]^{-1}\Big\{g(x_2,t)(h_1''(t)-f(x_1,t))-g(x_1,t)(h_2''(t)-f(x_2,t))+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\beta_k^2\Big[\Big(\varphi_k+\int_0^T p_1(t)u_k(t)dt\Big)cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\Big(\psi_k+\int_0^T p_2(t)u_k(t)dt\Big)sin\beta_k t+$$
$$+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)sin\beta_k(t-\tau)d\tau\Big]+$$
$$+\beta_k^2F_k(t;u,a,b)\Big](g(x_2,t)sin\lambda_k x_1-g(x_1,t)sin\lambda_k x_2)\Big\}, \tag{21}$$

$$b(t)=[h(t)]^{-1}\Big\{h_1(t)(h_2''(t)-f(x_2,t))-h_2(t)(h_1''(t)-f(x_1,t))+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\beta_k^2\Big[\Big(\varphi_k+\int_0^T p_1(t)u_k(t)dt\Big)cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\Big(\psi_k+\int_0^T p_2(t)u_k(t)dt\Big)sin\beta_k(t)+$$
$$+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)}+\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)sin\beta_k(t-\tau)d\tau\Big]+$$
$$+\beta_k^2F_k(t;u,a,b)\Big](h_1(t)sin\lambda_k x_2-h_2(t)sin\lambda_k x_1)\Big\}. \tag{22}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (7) сведено к решению системы (18), (21), (22) относительно неизвестных функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3), (7) важную роль играет следующая

Лемма 1.2. *Если* $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *– любое классическое решение задачи* (1)-(3), (7), *то функции*

$$u_k(t)=2\int_0^1 u(x,t)sin\lambda_k xdx \quad (k=1,2,...)$$

удовлетворяют системе (17) *в* $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ – любое решение задачи (1)-(3), (5). Тогда, умножив обе части уравнения (1) на функцию $2sin\lambda_k x$ $(k=1,2,...)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$2\int_0^1 u_{tt}(x,t)sin\lambda_k xdx=\frac{d^2}{dt^2}\Big(2\int_0^1 u(x,t)sin\lambda_k xdx\Big)=u_k''(t) \quad (k=1,2,...),$$

$$2\int_0^1 u_{xx}(x,t)sin\lambda_k xdx=-\lambda_k^2\Big(2\int_0^1 u(x,t)sin\lambda_k xdx\Big)=-\lambda_k^2u_k(t) \quad (k=1,2,...),$$

$$2\int_0^1 u_{ttxx}(x,t)sin\lambda_k xdx=-\lambda_k^2\Big(2\int_0^1 u_{tt}(x,t)sin\lambda_k xdx\Big)=-\lambda_k^2u_k''(t) \quad (k=1,2,...),$$

$$2\int_0^1 u_{xxxx}(x,t)sin\lambda_k xdx=\lambda_k^4\Big(2\int_0^1 u(x,t)cos\lambda_k xdx\Big)=\lambda_k^4u_k(t) \quad (k=1,2,...),$$

$$2\int_0^1 u_{ttxxxx}(x,t)sin\lambda_k xdx=\lambda_k^4\Big(2\int_0^1 u(x,t)cos\lambda_k xdx\Big)=-\lambda_k^4u_k(t) \quad (k=1,2,...),$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (15). Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (16).

Таким образом, $u_k(t)$ $(k=1,2,...)$ является решением задачи (15), (16). А отсюда непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ $(k=1,2,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (17). Лемма доказана.

Очевидно, что если $u_k(t) = 2\int\limits_0^1 u(x,t) sin\lambda_k x dx$ $(k = 1, 2, \ldots)$ является решением системы (17), то пара $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t) sin\lambda_k x,$ $a(t)$ и $b(t)$ является решением системы (18), (21), (22).

Из леммы 1.2 следует, что имеет место следующее

Следствие 1.1. *Пусть система* (18), (21), (22) *имеет единственное решение. Тогда задача* (1)-(3), (7) *не может иметь более одного решения, т. е. если задача* (1)-(3), (7) *имеет решение, то оно единственно.*

Теперь с целью исследования задачи (1)-(3), (7) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B^5_{2.T}$ (12) совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) sin\lambda_k x \ \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)\right),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ непрерывна в $[0, T]$ и

$$J_T(u) \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Норма в этом множестве определяется так:

$$\|u(x,t)\|_{B^5_{2.T}} = J(u).$$

2. Через E^5_T обозначим пространство вектор-функций $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ таких, что $u(x,t) \in B^5_{2.T}$, $a(t) \in C[0,T]$, $b(t) \in C[0,T]$. Снабдим это пространство нормой

$$\|z\|_{E^5_T} = \|u(x,t)\|_{B^5_{2.T}} + \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B^5_{2.T}$ и E^5_T являются банаховыми пространствами. Теперь рассмотрим в пространстве E^5_T оператор

$$\Phi(u,a,b) = \{\Phi_1(u,a,b), \Phi_2(u,a,b), \Phi_3(u,a,b)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a,b) = \tilde{u}(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) sin\lambda_k x,\ \Phi_2(u,a,b) = \tilde{a}(t),\ \Phi_3(u,a,b) = \tilde{b}(t),$$

где $\tilde{u}_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ равны соответственно правым частям (17), (21) и (22).

Очевидно, что

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \beta_k < \sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\beta_k} < \sqrt{3}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{7}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{21}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \sqrt{7}(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{3}\|p_2(t)\|_{C[0,T]})T\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{21T}\times \\
&\times\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{21}T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \sqrt{21T}\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |g_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\|\widetilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Bigg\{\Big\|g(x_2,t)(h_1''(t)-f(x_1,t))-$$
$$-g(x_1,t)(h_2''(t)-f(x_2,t))\Big\|_{C[0,T]}+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||g(x_1,t)|+$$
$$+|g(x_2,t)|\|_{C[0,T]}\times\Big[\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_k|)^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\psi_k|)^2\Big)+$$
$$+(\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\sqrt{3}\|p_2(t)\|_{C[0,T]})T\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\sqrt{3T}\Big(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|f_k(\tau)|)^2d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}T\|a(t)\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\sqrt{3T}\|b(t)\|_{C[0,T]}\Big(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|g_k(\tau)|)^2d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\|b(t)\|_{C[0,T]}\times$$
$$\times\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|g_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\|a(t)\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\Bigg\}, \tag{24}$$

$$\|\widetilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Bigg\{\Big\|h_1(t)(h_2''(t)-f(x_2,t))-$$
$$-h_2(t)(h_1''(t)-f(x_1,t))\Big\|_{C[0,T]}+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||h_1(t)|+|h_2(t)|\|_{C[0,T]}\times$$
$$\times\Big[\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_k|)^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\psi_k|)^2\Big)+$$
$$+\sqrt{3T}\Big(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|f_k(\tau)|)^2d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}T\|a(t)\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\sqrt{3T}\|b(t)\|_{C[0,T]}\Big(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|g_k(\tau)|)^2d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\|b(t)\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|g_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\|a(t)\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\Bigg\}. \tag{25}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^4[0,1], \varphi^5(x)\in L_2[0,1], \varphi(0)=\varphi'(1)=\varphi''(0)=\varphi'''(1)=\varphi^4(0)=0;$
2. $\psi(x)\in C^4[0,1], \psi^5(x)\in L_2[0,1], \psi(0)=\psi'(1)=\psi''(0)=\psi'''(1)=\psi^4(1)=0;$
3. $f(x,t)\in C(D_T), f_x(x,t)\in L_2(D_T),\ f(0,t)=0\ (0\leq t\leq T);$
4. $g(x,t)\in C(D_T), g_x(x,t)\in L_2(D_T),\ g(0,t)=0\ (0\leq t\leq T);$
5. $h_i(t)\in C^2[0,T] (i=1,2), h(t)\equiv h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\neq 0\ (0\leq t\leq T).$

Тогда из (23)-(25) имеем:

$$\|\widetilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^5}\leq A_1(T)+B_1(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}+$$
$$+C_1(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}+D_1(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{26}$$

$$\|\widetilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le A_2(T) + B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} +$$
$$+ C_2(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + D_2(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{27}$$

$$\|\widetilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \le A_3(T) + B_3(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} +$$
$$+ C_3(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + D_3(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{28}$$

где

$$A_1(T) = \sqrt{7}\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{21}\|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{21T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$
$$B_1(T) = \sqrt{21}T, C_1(T) = \sqrt{7}(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{3}\|p_2(t)\|_{C[0,T]})T,$$
$$D_1(t) = \sqrt{21T}\|g_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_2(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Big\{\Big\|h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2,t)) - h_2(t)(h_1''(t) -$$
$$- f(x_1,t))\Big\|_{C[0,T]} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||g(x_1,t)| + |g(x_2,t)|\|_{C[0,T]} \times$$
$$\times \Big[\Big\|\varphi^5(x)\Big\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3}\Big\|\psi^5(x)\Big\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3T}\Big\|f_x(x,t)\Big\|_{L_2(D_T)} +$$
$$+ \Big\|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\Big\|_{L_2(0,1)}\Big]\Big\},$$

$$B_2(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||g(x_1,t)| + |g(x_2,t)|\|_{C[0,T]}(T+1),$$

$$C_2(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||g(x_1,t)| + |g(x_2,t)|\|_{C[0,T]} \times$$
$$\times (\|p_1(t)\|_{C(0,T)} + \sqrt{3}\|p_2(t)\|_{C(0,T)})T,$$

$$D_2(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||g(x_1,t)| + |g(x_2,t)|\|_{C[0,T]} \times$$
$$\times \Big(\sqrt{3T}\|g_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \Big\|\|g_x(x,t)\|_{C(0,T)}\Big\|_{L_2(0,1)}\Big),$$

$$A_3(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Big\{\Big\|g(x_2,t)(h_1''(t) - f(x_1,t)) - g(x_1,t)(h_2''(t) -$$
$$- f(x_2,t))\Big\|_{C[0,T]} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||h_1(t)| + |h_2(t)|\|_{C[0,T]} \times$$
$$\times \Big[\Big\|\varphi^5(x)\Big\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3}\Big\|\psi^5(x)\Big\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3T}\Big\|f_x(x,t)\Big\|_{L_2(D_T)} +$$
$$+ \Big\|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\Big\|_{L_2(0,1)}\Big]\Big\},$$

$$B_3(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||h_1(t)| + |h_2(t)|\|_{C[0,T]}(T+1),$$

$$C_3(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||h_1(t)| + |h_2(t)|\|_{C[0,T]} \times$$
$$\times (\|p_1(t)\|_{C(0,T)} + \sqrt{3}\|p_2(t)\|_{C(0,T)})T,$$

$$D_3(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\||h_1(t)| + |h_2(t)|\|_{C[0,T]} \times$$
$$\times \Big(\sqrt{3T}\|g_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \Big\|\|g_x(x,t)\|_{C(0,T)}\Big\|_{L_2(0,1)}\Big).$$

Из неравенств (29)-(31) заключаем:

$$\|\widetilde{u}(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + \|\widetilde{a}(t)\|_{C[0,T]} + \|\widetilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq$$
$$\leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} +$$
$$+ C(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + D(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{29}$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T) + A_3(T),\ B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_3(T),$$
$$C(T) = C_1(T) + C_2(T) + C_3(T),\ D(T) = D_1(T) + D_2(T) + D_3(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия 1-5 и*

$$(B(T)A(T) + 2 + C(T) + D(T))(A(T) + 2) < 1. \tag{30}$$

Тогда задача (1)-(3), (7) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|^5_{E_T} \leq R = A(T)+2)$ *пространства* E^5_T *единственное решение.*

Доказательство. В пространстве E^5_T рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{31}$$

где $z = \{u, a, b\}$, компоненты $\Phi_i(u, a, b)$ $(i = 1, 2, 3)$, оператора $\Phi(u, a, b)$ определены правыми частями уравнений (18), (21) и (22).

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a, b)$ в шаре $K = K_R$ из E^5_T. Аналогично (29) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E^5_T} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + C(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} +$$
$$+ D(T)\|b(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)(A(T) + 2)^2 +$$
$$+ C(T)(A(T) + 2) + D(T)(A(T) + 2), \tag{32}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E^5_T} \leq B(T)R + \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\right) +$$
$$+ C(T)\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + D(T)\|b_1(t) - b_2(t)\|_{C[0,T]}. \tag{33}$$

Тогда из оценок (32), (33), с учетом (30), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a, b\}$, которая является в шаре $K = K_R$ единственным решением уравнения (31), т. е. $\{u, a, b\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (18), (21) и (22).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^5_{2,T}$, имеет непрерывные производные $u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t)$, $u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ в D_T.

Из (15) нетрудно видеть, что

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \sqrt{2}\Big\|\|f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t) + b(t)g_x(x,t)\|_{C[0,T]}\Big\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t), u_{ttx}(x,t), u_{ttxx}(x,t), u_{ttxxx}(x,t), u_{ttxxxx}(x,t)$ непрерывны в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (7), причем, в силу следствия леммы 1.2., оно единственное в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1.1. доказывается следующая

Теорема 1.3. *Пусть выполняются все условия теоремы 1.2. и*

$$h_i(0) = \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt + \varphi(x_i),\ h_i(0) = \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt + \psi(x_i)\ (i = 1, 2),$$

$$\Big(T\|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2}(A(T) + 2)\Big)T < 1.$$

Тогда задача (1)-(4) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E^5_T} \leq R = A(T) + 2)$ *из* E^5_T *единственное классическое решение.*

Список литературы

1. Камынин В. Л. 2013. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения. Математические заметки. 94(2): 207–217.

2. Камынин В. Л. 2019. Обратная задача одновременного определения двух зависящих от пространственной переменной младших коэффициентов в параболическом уравнении. Математические заметки. 106(2): 248–261.

3. Камынин В. Л. 2020. Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени младших коэффициентов в недивергентном параболическом уравнении на плоскости. Математические заметки. 107(1): 74–86.

4. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. 2005. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений. Доклады РАН. 404(5): 589–592.

5. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. 2006. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. Дифференциальные уравнения. 42(9): 1166–1179.

6. Кожанов А. И., Дюжева А. В. 2021 Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка. Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 36: 14–28.

7. Кожанов А. И. 2019. Обратные задачи определения параметра поглощения в уравнении диффузии. Математические заметки, 106(3): 395–408.

8. Мегралиев Я. Т., Ализаде Ф. Х. 2016. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 26(4): 503–514.

9. Мегралиев Я. Т., Фараджев А. С. 2021. О разрешимости обратной краевой задачи для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией. Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XIV Международной конференции, приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета 16-19 сентября 2021 г., 156–158.

10. Фараджев А. С. 2021. Задача для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией и нелокальными интегральными условиями. Proceedings of IAM. 10(2): 135–148.

11. Фараджев А. С. 2021 Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка. Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: сборник материалов международной конференции, Белгород, 25-29 октября 2021 г., 243–245.

12. Худавердиев К. И., Велиев А. А. 2010. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку, 168.

13. Bazant Z., Jirasek M. 2002. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. J. Eng. Mech. 128: 1–20.

14. Farajov A. S. 2021 On a non-local boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance. Transactions of Azerbaijan Ped. Univ. Ser. of math. and natural scinces. 69(2): 22–33.

15. Farajov A. S. 2021. Inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance. News of Baku university ,Series of physico-mathematical sciences. 3: 16–27.

16. Schneider G., Eugene C.W. 2001. Kawahara dynamics in dispersive media. Physica. D. 152-153: 384–394.

17. Taskesen H., Polat N., Ertas A. 2012. On global solutions for the Cauchy problem of a Boussinesq-type equation. Abstract and Applied Analysis. Hindawi.

18. Taskesen H., Polat N. 2013. Global existence for a double dispersive sixth order Boussinesqequation. Contemporary Analysis and Applied Mathematics (CAAM). 1(1): 60–69.

19. Wang Y. 2016. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation. Elec. J.Di. Eqn., 64: 1–16.

20. Wang H. W. and Esfahani A. 2014. Global rough solutions to the sixth-order Boussinesq equation. Nonlinear Anal.-Theor., 102: 97–104.
21. Wang Y. 2017. Existence and blow-up of solution of Cauchy problem for the sixth order damped Boussinesq equation. Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 43(5): 1057–1071.
22. Wang Y. 2018. Global solutions for a class of nonlinear sixth-order wave equation. Bulletin of the Korean Mathematical Society. 55(4): 1161–1178.

References

1. Kamynin V. L. 2013. The Inverse Problem of Determining the Lower-Order Coefficient in Parabolic Equations with Integral Observation. Math. Notes, 94(2): 205–213.
2. Kamynin V. L. 2019. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Lower Space-Dependent Coefficients in a Parabolic Equation. Math. Notes, 106(2): 235–247.
3. Kamynin V. L. 2020. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Time-Dependent Lower Coefficients in a Nondivergent Parabolic Equation in the Plane. Math. Notes, 107(1): 93–104.
4. Kozhanov A. I., Pulkina L. S. 2005. Boundary Value Problems with an Integral Boundary Condition for Multidimensional Hyperbolic Equations. Reports of the Russian Academy of Sciences. 404(5): 589–592.
5. Kozhanov A. I., Pulkina L. S. 2006. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. Differ. Equ., 42(9): 1233–1246.
6. Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. 2021. Nonlocal problems with integral displacement for high-order parabolic equations. Izvestia of the Irkutsk State University. Series: Mathematics. 36: 14–28.
7. Kozhanov A. I. 2019. Inverse Problems of Finding the Absorption Parameter in the Diffusion Equation. Math. Notes. 106(3): 378–389.
8. Mehraliev Ya. T., Alizade F. Kh. 2016. Inverse boundary value problem for a fourth-order Boussinesq equation with non-local time integral conditions of the second kind. Vestn. Udmurtsk. university Mat. Fur. Computer. Nauki, 26(4): 503–514.
9. Mehraliev Ya.T., Farajov A. S. 2021. On the solvability of the inverse boundary value problem for the Boussinesq equation of the sixth order with double dispersion. Fundamental and applied problems of mathematics and informatics. Proceedings of the XIV International Conference dedicated to the 90th anniversary of the Dagestan State University September 16-19, 2021. 156-158.
10. Farajov A. S. 2021. A problem for the sixth-order Boussinesq equation with double dispersion and nonlocal integral conditions. Proceedings of IAM. 10(2): 135–148.
11. Farajov A. S. 2021. On a Nonlocal Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq Equation of the Sixth Order. "Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms"Belgorod, October 25-29, 2021. 243–245.
12. Khudaverdiev K. I., Veliyev A. A. 2010. Study of a one-dimensional mixed problem for a class of third-order pseudohyperbolic equations with a nonlinear operator right-hand side. Baku. 168.
13. Bazant Z., Jirasek M. 2002. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. J. Eng. Mech. 128: 1–20.
14. Farajov A. S. 2021 On a non-local boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance. Transactions of Azerbaijan Ped. Univ. Ser. of math. and natural scinces. 69(2): 22–33.
15. Farajov A. S. 2021. Inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance. News of Baku university ,Series of physico-mathematical sciences. 3: 16–27.
16. Schneider G., Eugene C.W. 2001. Kawahara dynamics in dispersive media. Physica. D. 152-153: 384–394.
17. Taskesen H., Polat N., Ertas A. 2012. On global solutions for the Cauchy problem of a Boussinesq-type equation. Abstract and Applied Analysis. Hindawi.
18. Taskesen H., Polat N. 2013. Global existence for a double dispersive sixth order Boussinesqequation. Contemporary Analysis and Applied Mathematics (CAAM). 1(1): 60–69.

19. Wang Y. 2016. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation. Elec. J.Di. Eqn., 64: 1–16.

20. Wang H. W. and Esfahani A. 2014. Global rough solutions to the sixth-order Boussinesq equation. Nonlinear Anal.-Theor., 102: 97–104.

21. Wang Y. 2017. Existence and blow-up of solution of Cauchy problem for the sixth order damped Boussinesq equation. Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 43(5): 1057–1071.

22. Wang Y. 2018. Global solutions for a class of nonlinear sixth-order wave equation. Bulletin of the Korean Mathematical Society. 55(4): 1161–1178.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.04.2022
Поступила после рецензирования 01.06.2022
Принята к публикации 06.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Фараджев Араз Саламулла оглы – кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, Азербайджанский Государственный Педагогический Университет.
ул. У. Гаджибекова, 68, Баку, AZ 1000, Азербайджан

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Araz Farajov Salamulla – PhD, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mathematics, Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan,