Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, № 4. С. 213–218.

УДК 514.7
MSC 58A15
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-213-218

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

С. А. Телкова

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Воронежский институт МВД России,
Воронеж, 394065, Россия

E-mail: tsa76@inbox.ru

Аннотация. В работе рассматривается геометрия стохастических дифференциальных уравнений. На основе корреляционных соотношений для средних значений Винеровского процесса предлагается расширение распределения Картана. Несмотря на особенности, переплетающие независимые переменные, данное распределение допускает существование полей Ли и их лифты. Геометрическая постановка задачи вариационного исчисления предполагает использование распределения Картана в качестве неголономной связи и введения дифференциальной 1-формы импульса как множителя Лагранжа. На основе этого в работе получено уравнение Эйлера – Лагранжа, реализующее уравнение Ито как экстремаль некоторого функционала, а также система уравнений Якоби в гамильтоновой форме.

Ключевые слова: распределение Картана, дифференциальное уравнение Ито, уравнение Эйлера – Лагранжа

Для цитирования: Телкова С. А. 2022. Внешние дифференциальные системы стохастической динамики. Прикладная математика & Физика, 54(4): 213–218. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-213-218

EXTERIOR DIFFERENTIAL SYSTEMS OF STOCHASTIC DYNAMIC

Svetlana Telkova

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia,
Voronezh, 394065, Russia
E-mail: tsa76@inbox.ru

Received November, 16, 2022

Abstract. In article geometry of stochastic differential equations is considered. Based correlation relations for the mean of the Wiener process an extension of the Cartan distributions is proposed. In spite of features intertwining independent variables this distribution admits existence of Lie's fields and their lifts. Geometric formulation of problem of the variations calculus involves the Cartan distributions as nonholonomic connection and introduction of a differential 1-form of momentum as the Lagrange multiplier. On the basis of this the Euler – Lagrange equation that realizing the Ito equation as an extremal of some functional was obtained in the work, as well as the system of Jacobi equations in Hamiltonian form.

Keywords: Cartan Distributions, Ito Equation, Euler – Lagrange equation
For citation: Telkova S. 2022. Exterior Differential Systems of stochastic Dynamic. Applied Mathematics & Physics, 54(4): 213–218 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-213-218

---

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений как подмногообразие Σ в расслоении джетов $J^n(\pi)\colon E \longrightarrow M$, определяемое уравнениями

$$F(x, y, p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02}) = 0,$$

где $x, y \in M \subset R$, $u = p_0 \in U \subset R$, $p_i \in J^i(\pi) \subset R^n$, $E = M \times U$. В работе рассматривается аксиоматический подход к исследованию геометрии стохастических дифференциальных уравнений. Как и любое дифференциальное уравнение оно описывает струю в пространстве джетов $J^1(2,1) = J^1(R^2, R)$, с локальными координатами $(x, y, u, u_t, u_y, u_{yy})$, где расширение расслоения до вторых производных (u_{yy}) является следствием корреляционых соотношений для средних Винеровского процесса [4]

$$< dy >= 0, \quad < dy^2 >=< dx > .$$

С каждым таким многообразием джетов ассоциировано каноническое подрасслоение

$$
\begin{aligned}
W^* &\subset T^*\left(J^k(R,M)\right),\\
W^* &= span\left(\theta^1,\theta^2,...,\theta^m\right).
\end{aligned}
$$

Последние соотношения позволяют ввести распределение Картана для СДУ в виде [1]

$$\theta = du - \left(u_x + \frac{1}{2}u_{yy}\right)dx - u_y dy. \tag{1}$$

Как и в классическом случае, W^* можно определить бескоординатным способом, задавая вложение

$$J^k(R,M) \subset J^1\left(R, J^1\left(R, J^1(R,...)\right)\right).$$

Например, в случае $k = 2$ подрасслоение $W^* \subset T^*\left(J^2(R,M)\right)$ будет индуцировано из канонического подрасслоения в $T^*\left(J^1\left(R, J^1(R,M)\right)\right)$.

Определение 1.1. *[2] Градуированный идеал $I = \oplus_{q\geq 0} I^q$ во внешней алгебре $\Lambda^*(X) = \oplus_{q\geq 0}\Lambda^q(X)$ форм класса C^∞ на многообразии X, обладающий свойствами*

$$dI \subset I,$$

будем называть ***дифференциальным идеалом***.

Таким образом, для любых

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sum \omega^k \in I,\\
\omega^k &\in \Lambda^k(X),\\
\nu &\in \Lambda^*(X)
\end{aligned}
$$

будем иметь

$$\omega^k \in I, \quad \omega \wedge \nu \in I, \quad d\omega \in I.$$

Для любого подмножества $\Sigma \subset \Lambda^*(X)$ обозначим через $\{\Sigma\}$ **алгебраический идеал**, порожденный множеством Σ. В нашем случае

$$\{\Sigma\} = \left\{\theta^k\right\}.$$

Таким образом, если $d\Sigma$ – множество форм $d\omega$ для $\omega \in \Sigma$, то дифференциальный идеал, порожденный Σ, – это $\{\Sigma, d\Sigma\}$. Тогда для 1-форм распределения Картана

$$I = \{\Sigma, d\Sigma\} = \{\theta, d\theta\}$$

пфаффовым дифференциальным идеалом.

Пфаффов дифференциальный идеал $\{\theta, d\theta\}$ называется вполне интегрируемым, если

$$d\theta \in \{\theta\} \quad \text{или} \quad d\theta = 0 \;\; mod\,\{\theta\}.$$

2. Поскольку 2-форма $d\theta \neq \theta_1 \wedge \theta$ – по теореме Фробениуса распределение не интегрируемо. Несмотря на особенности, переплетающие независимые переменные, данное распределение $J^k(\pi)$ допускает существование полей Ли и их поднятие в $J^{k+1}(\pi)$. Для этого рассмотрим однопараметрическую группу преобразований, действующую в пространстве детерминированной и стохастической независимых переменных и одной зависимой переменной:

$$
\begin{aligned}
x' &= f(x,w,u,a),\\
w' &= h(x,w,u,a),\\
u' &= \varphi(x,w,u,a).
\end{aligned}
$$

Инфинитезимальный оператор группы $\mathbf{G}$ есть [3]

$$\mathbf{x} = \xi^x\frac{\partial}{\partial x} + \xi^y\frac{\partial}{\partial y} + \eta\frac{\partial}{\partial u},$$

где

$$\xi^x = \left.\frac{\partial f}{\partial a}\right|_{a=0}, \quad \xi^y = \left.\frac{\partial h}{\partial a}\right|_{a=0}, \quad \eta = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Найдем первое продолжение группы **G**:

$$\underset{1}{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \zeta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta^w \frac{\partial}{\partial u_w},$$

где $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, а действие группы на эти переменные записывается как

$$\begin{aligned} u'_x &= \psi_x\left(x, y, u, u_x, u_y, a\right), \\ u'_y &= \psi_y\left(x, y, u, u_x, u_y, a\right). \end{aligned}$$

Дополнительные координаты $\zeta^x = \left.\frac{\partial \psi_x}{\partial a}\right|_{a=0}$, $\zeta^y = \left.\frac{\partial \psi_y}{\partial a}\right|_{a=0}$ будем искать, используя формулу Ито для стохастического распределения Картана (1):

$$\begin{aligned} \theta &= du - \left(u_x + \frac{1}{2}u_{ww}\right)dx - u_w dw, \\ \theta_x &= du_x - \left(u_{xx} + \frac{1}{2}u_{xww}\right)dx - u_{xw} dw, \\ \theta_w &= du_w - \left(u_{wx} + \frac{1}{2}u_{www}\right)dx - u_{ww} dw. \end{aligned}$$

Появление дифференциалов требует также задания правил действия продолженной группы $\underset{1}{\mathbf{G}}$ на них

$$dx' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial u}du,$$

$$dw' = \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial u}du,$$

$$du' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial u}du$$

в пространстве переменных $\left(x, y, u, u_x, u_y, dx, dy, du, a\right)$.

Зададим инфинитезимальный оператор

$$\mathbf{x} = \underset{1}{\mathbf{x}} + \bar{\xi}^x \frac{\partial}{\partial dx} + \bar{\xi}^y \frac{\partial}{\partial dy} + \bar{\eta}\frac{\partial}{\partial du}.$$

Здесь

$$\bar{\xi}^x = \left.\frac{\partial dx'}{\partial a}\right|_{a=0} = \left(\frac{\partial \xi^x}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial w^2}\right)dx + \frac{\partial \xi^x}{\partial y}dy + \frac{\partial \xi^x}{\partial u}du,$$

$$\bar{\xi}^y = \left.\frac{\partial dy'}{\partial a}\right|_{a=0} = \left(\frac{\partial \xi^y}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial y^2}\right)dx + \frac{\partial \xi^y}{\partial y}dy + \frac{\partial \xi^y}{\partial u}du,$$

$$\bar{\eta} = \left.\frac{\partial du'}{\partial a}\right|_{a=0} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)dx + \frac{\partial \eta}{\partial y}dy + \frac{\partial \eta}{\partial u}du.$$

Записывая критерий инвариантности в виде

$$\mathbf{x}\theta = \bar{\eta} - \left(u_x + \frac{1}{2}u_{ww}\right)\bar{\xi}^x - u_w\bar{\xi}^w - \zeta^x dx - \zeta^w dw = 0.$$

получим

$$\begin{aligned} \zeta^x &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial w^2} + u_x\frac{\partial \eta}{\partial u}\right) \\ &- \left(u_x + \frac{1}{2}u_{ww}\right)\left(\frac{\partial \xi^x}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial w^2} + u_x\frac{\partial \xi^x}{\partial u}\right) \\ &- u_w\left(\frac{\partial \xi^w}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi^w}{\partial w^2} + u_x\frac{\partial \xi^w}{\partial u}\right) \\ \zeta^w &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial w^2} + u_w\frac{\partial \eta}{\partial u}\right) \\ &- \left(u_x + \frac{1}{2}u_{ww}\right)\left(\frac{\partial \xi^x}{\partial x} + u_w\frac{\partial \xi^x}{\partial u}\right) \\ &- u_w\left(\frac{\partial \xi^w}{\partial x} + u_w\frac{\partial \xi^w}{\partial u}\right) \end{aligned}$$

Другими словами, инфинитезимальный сдвиг вдоль векторного поля $\mathbf{x}$ оставляет инвариантной форму Картана, т. е. производная Ли формы Картана по векторному полю $\mathbf{x}$ есть ноль [1]. Последнее обстоятельство позволяет использовать стандартные алгоритмы построения инвариантов СДУ для нахождения частных решений, а также находить классы уравнений, инвариантных относительно выделенных групп инфинитезимальных преобразований. Например, векторное поле

$$\mathbf{x} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \left(u_x + \frac{1}{2}u_{yy}\right)\frac{\partial}{\partial u_y} - u_y\frac{\partial}{\partial u_x}$$

сохраняет распределение Картана. Действительно, непосредственной проверкой можно показать, что производная Ли формы θ по векторному полю $\mathbf{x}$:

$$\mathcal{L}_X\theta = \mathbf{x}\lrcorner d\theta + d\mathbf{x}\lrcorner\theta = 0,$$

поэтому оно является контактным преобразованием.

3. Внешняя дифференциальная система (I, ω) на многообразии X задается дифференциальным идеалом $I \subset \Lambda^*(X)$ и формой $\omega \in \Lambda^n(X)$.

Произвольный интегральный элемент системы (I, ω) задается парой (p, E), состоящей из точки $p \in X$ и n-мерной плоскости $E \subset T_p(X)$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} \theta|E &= 0, \quad \forall\theta \in I, \\ \omega|E &\neq 0. \end{aligned}$$

Данная запись означает, что в кокасательном расслоении над X задана двухступенчатая фильтрация подрасслоениями

$$W^* \subset L^* \subset T^*(X), \quad rank\ L^*/W^* = 1.$$

Здесь, $rank\ \Omega$ – ранг формы, т. е. число n такое, что

$$\begin{aligned} \Omega^n &\neq 0, \\ \Omega^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Пример. На многообразии $X = J^1(R^2, M)$ в локальных координатах система (I, ω) имеет вид

$$\begin{cases} \theta = 0, \\ \omega = dx \wedge dy \neq 0, \end{cases}$$

где первое уравнение имеет смысл неголономной связи, налагаемой на интегральное многообразие, а второе уравнение есть условие трансверсальности, налагаемое на решения. Интегральные многообразия этой дифференциальной системы задаются 1-струями параметризованных иммерсированных кривых в M. Другими словами, первыми интегралами системы (I, ω) являются 1-струи кривых в M [5].

Теперь будем искать на некотором многообразии X пфаффову систему (J, ω), интегральные многообразия N которой находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с интегральными многообразиями системы (I, ω), удовлетворяющими уравнениям Эйлера – Лагранжа для функционала

$$\Phi = \int f\varphi,$$

где $\varphi \in \Lambda^n(X)$.

Поставленную вариационную задачу, ассоциированную с функционалом Φ, обозначим через $(J, \omega; \varphi)$. Геометрическая постановка задачи вариационного исчисления

$$\mathbf{v}\lrcorner d(Ldx \wedge dy + \Lambda \wedge \theta) = 0$$

предполагает использование распределения Картана θ в качестве неголономной связи и введения дифференциальной 1-формы импульса

$$\Lambda = \lambda dx + \mu dy$$

как множителя Лагранжа. Здесь L – плотность лагранжиана, а $\omega = Ldx \wedge dy \neq 0$ – условие трансверсальности. Используя в качестве векторных полей

$$\mathbf{v} = \partial_\theta, \quad \mathbf{v} = \partial_{u_x}, \quad \mathbf{v} = \partial_{u_y}$$

получим систему

$$\begin{aligned} L_u dx \wedge dy &= -d\lambda \wedge dx - d\mu \wedge dy, \\ \lambda &= L_{u_y}, \\ \mu &= -\frac{L_{u_x}}{1 + \frac{1}{2}\frac{du_{yy}}{du_x}}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения Эйлера – Лагранжа поставленной вариационной задачи принимают вид

$$L_u = \frac{d}{dx}\left(\frac{L_{u_x}}{1 + \frac{1}{2}\frac{du_{yy}}{du_x}}\right) + \frac{d}{dy}\left(L_{u_y}\right).$$

4. Рассмотрим теперь гамильтонов вариант данной задачи. Для этого приведем форму

$$\psi = L dx \wedge dy + \Lambda \wedge \theta$$

к нормальному виду Пфаффа – Дарбу

$$\psi = -H\omega + \Lambda \wedge du,$$

с гамильтонианом

$$H = -L + \frac{u_x + u_{xx}/2}{1 + \frac{1}{2}\frac{du_{yy}}{du_x}} L_{u_x} + u_y L_{u_y}.$$

В классическом случае гамильтонианом H, ассоциированным с вариационной задачей $(J, \omega; \varphi)$, называется ограничение на пространство импульсов $Y \subset T^*(X)$ функции

$$H = -L + \mu u_x + \lambda u_y.$$

Дифференцируя форму Пфаффа – Дарбу, получим структурные уравнения

$$\Psi = d\psi,$$

или

$$\Psi = -\frac{\partial H}{\partial u} du \wedge \omega - \frac{\partial H}{\partial \lambda} d\lambda \wedge \omega - \frac{\partial H}{\partial \mu} d\mu \wedge \omega + d\lambda \wedge dx \wedge du + d\mu \wedge dy \wedge du.$$

Ограничение этой формы на поля $\mathbf{v} = \partial_u, \mathbf{v} = \partial_\lambda, \mathbf{v} = \partial_\mu$ дает систему Картана $C(\Psi_Y)$, которая порождается уравнениями Пфаффа

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -H_u\omega + d\lambda \wedge dx + d\mu \wedge dy, \\ \eta_2 &= -H_\lambda\omega + dx \wedge du, \\ \eta_3 &= -H_\mu\omega + dy \wedge du. \end{aligned}$$

Заметим, что векторное поле $\mathbf{v} = \partial_u$ является полем Риба:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} \lrcorner \psi = \Lambda, \\ &\mathbf{v} \lrcorner \Psi = \mathbf{v} \lrcorner d\psi = 0. \end{aligned}$$

Вместе с условиями трансверсальности $\omega \neq 0$ уравнения Пфаффа образуют систему Эйлера – Лагранжа (J, ω) на пространстве импульсов Y, а ее решения находятся из динамических уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{du} &= -\frac{d\lambda}{dy} + \frac{d\mu}{dx}, \\ \frac{dH}{d\lambda} &= \frac{d\mu}{dy}, \\ \frac{dH}{d\mu} &= -\frac{d\lambda}{dx}. \end{aligned}$$

Можно видеть, что множители Лагранжа (λ, μ) здесь приобретают смысл обобщенных импульсов.

Определение 2. *Пусть $N \subset X$ – интегральное многообразие системы (I, ω) с ассоциированной системой Эйлера – Лагранжа (J, ω) на пространстве импульсов Y. Тогда для интегрального многообразия $\Gamma \subset Y$ касательное пространство $T_\Gamma(J, \omega)$ – является пространством якобиевых векторных полей.*

Рассматривая нормальное векторное поле

$$\mathbf{x} = U\frac{\partial}{\partial u} + V\frac{\partial}{\partial \lambda} + W\frac{\partial}{\partial \mu},$$

из условия $\mathcal{L}_x\eta = 0$ получим систему уравнений Якоби в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial V}{\partial y} &= U\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + V\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} + W\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \mu}, \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= -\left(U\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} + V\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} + W\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \mu}\right), \\
\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= -\left(U\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \mu} + V\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \mu} + W\frac{\partial^2 H}{\partial \mu^2}\right).
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Виноградов А. М., Красильшик И. С. (ред.) 1997. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. М., Факториал, 368.

2. Гриффитс Ф. 1986. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М., Мир, 360.

3. Ибрагимов Н. Х. 1983. Группы преобразований в математической физике. М., Наука, 280.

4. Оксендаль Б. 2003. Стохастические дифференциальные уравнения. М., Мир, 408.

5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1999. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 408.

References

1. Vinogradov A.M., Krasilshchik I.S. (eds.) 1999. Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics. Providence, Amer. Math. Soc., 333.

2. Griffiths P. A. 1983. Exterior Differential Systems and the Calculus of Variations. Boston, Birkhauser, 339.

3. Ibragimov N.H. 1985. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. Dordrecht, Springer, 394.

4. Oksendal B. 2003. Stochastic Differential Equations. Heidelberg, Springer, 379.

5. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. 1999. Equations of mathematical physics. M .: Publishing House of Moscow State University, 408.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.10.2022
Поступила после рецензирования 12.11.2022
Принята к публикации 16.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Телкова Светлана Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России
проспект Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Svetlana Telkova – PhD, Assistant Professor of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia, Voronezh, Russia