


ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 517, 519.6, 519.8
MSC 37M05, 34C55, 47J40
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-143-156

Новый класс гистерезисных преобразователей: обобщенный люфт со случайными направляющими функциями

С. В. Борзунов 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

Воронежский государственный университет,
Воронеж, 394018, Россия
E-mail: sborzunov@gmail.com

Аннотация. В работе приводится формальное определение, устанавливаются свойства стохастического гистерезисного преобразователя — обобщенного люфта. С помощью трехэтапной конструкции, включающей в себя последовательное определение входно-выходных соответствий на монотонных, кусочно-монотонных, непрерывных входах, введенный преобразователь трактуется как оператор, зависящий от своего начального состояния как от параметра, сопоставляющий всякому допустимому входу случайный процесс, параметры которого, в свою очередь, определяются свойствами направляющих функций обобщенного люфта. Доказывается корректность преобразователя, приводятся явные формулы для первой и второй моментных функций. Теоретические построения работы иллюстрируются результатами вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: гистерезис, люфт, случайный процесс

Для цитирования: Борзунов С. В. 2023. Новый класс гистерезисных преобразователей: обобщенный люфт со случайными направляющими функциями. Прикладная математика & Физика, 55(2): 143–156.

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-143-156

Original Research

A New Class of Hysteresis Converters: Generalized Backlash With Stochastic Determining Curves

Sergei Borzunov 

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

Voronezh State University,
Voronezh, 394018, Russia

E-mail: sborzunov@gmail.com

Abstract. The paper provides a formal definition and establishes the properties of a stochastic hysteresis converter — a generalized backlash. Using of a three-stage construction, which includes the sequential determination of input-output correspondences on monotone, piecewise monotone, and continuous inputs, the introduced converter is interpreted as an operator depending on its initial state as a parameter, matching a random process to any permissible input, the parameters of which, in turn, are determined by the properties of the guiding functions of the generalized backlash. The correctness of the converter is proved, explicit formulas for the first and second moment functions are given. The theoretical constructions of the work are illustrated by the results of computational experiments.

Keywords: Hysteresis, Backlash, Random Process

For citation: Borzunov Sergei. 2023. A new class of hysteresis converters: generalized backlash with stochastic determining curves. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 143–156. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-143-156

1. Введение. Математические модели гистерезисных нелинейностей восходят к классическим работам Дюема, Прейзаха, Вена [15, 30, 37]. Интерес к таким моделям обусловлен широким кругом задач (из самых разных предметных областей от физики и техники до биологии и экономики), где гистерезисные нелинейности играют едва ли не центральную роль. Некоторые примеры систем, отдельные составляющие которых демонстрируют гистерезисное поведение, приведены в работах [7, 9, 13, 1, 33, 19, 16, 6, 21, 29, 25, 20].

Указанный список ни в коей мере не претендует на полноту (ежегодно выходят тысячи работ в той или иной мере связанные с моделями гистерезиса), однако модели, применяемые в этих работах, обладают одним существенным недостатком: гистерезисные зависимости в них формализуются исключительно в рамках детерминированного подхода. Одна из первых монографий [3], посвященных моделям гистерезиса, появилась в 1983 году. С тех пор подходы к описанию гистерезисных зависимостей, предложенные в ней, давно стали классическими. Согласно М. А. Красносельскому элементарным носителем гистерезисных свойств является преобразователь – гистерон, формальное описание динамики входно-выходных соответствий которого сводится к двум соотношениям: вход – переменное состояние и состояние – выход (в некоторых случаях, когда состояние совпадает с выходом достаточно одного соотношения). При этом входно-выходные соответствия определяются сначала на монотонных входах, далее на кусочно-монотонных и на последнем этапе, с использованием предельного перехода, на непрерывных входах. Эта схема оказалась применима для формализации таких гистерезисных нелинейностей, как люфт и упор.

В большинстве практически важных задачах механики, физики, экономики, теории управления гистерезисное звено является частью более широкой системы, как правило, подверженной воздействию неконтролируемых факторов и шумов. В этом случае входы на гистерезисное звено либо неизвестны, либо известны с малой степенью точности, и структура входов может быть весьма сложной. В [3] предложена операторная трактовка гистерезисного преобразователя как оператора, определенного для достаточно широкого класса возможных входов.

Математические модели сложных систем, демонстрирующих гистерезисное поведение, применялись для анализа физических систем различной природы [2, 24, 12, 36, 4, 35, 18, 14, 34]. В работе [5] исследовано влияние электромагнитных актуаторов на частотную характеристику консольных балок. Результаты, полученные путем численного моделирования, демонстрируют возможность получения гистерезисного поведения и появления сдвига частоты вынужденных колебаний под действием электромагнитных сил. Использование преобразователя Преизаха описано в работах [31, 26], также указаны границы применимости соответствующей модели.

Одна из первых феноменологических моделей гистерезиса была предложена Боуком [8] и затем расширена Веном [37]. Эта модель способна отображать в аналитической форме особенности гистерезисного цикла, соответствующие поведению широкого класса гистерезисных систем. Первоначально она была применена к техническим задачам, включая расчеты в области сопротивления материалов и непрерывных сред.

Модель Боука – Вена активно изучается и широко применяется в настоящее время. Так, например, в работе [21] рассматривается задача аналитического анализа предельного цикла в данной модели. Этот вопрос часто возникает в вопросах идентификации параметров, когда на вход системы подается периодический сигнал, и экспериментальный полученный предельный цикл затем используется для определения параметров модели. Доказано, что выход в модели Боука – Вена для класса периодических входов, которые возможно реализовать физически и которые представляют практический интерес для процедур идентификации параметров, является периодическим.

Модель Боука – Вена является достаточно универсальной, но тем не менее она не лишена некоторых ограничений. В частности, ее применение весьма затруднено при входах малой амплитуды, из нее следует отсутствие затухания гистерезисных петель при малых нагрузках. Предложены модификации модели, которые устраняют эти и другие ограничения [11, 23]. В данных работах показано, что введение дополнительного коэффициента жесткости в гистерезисное дифференциальное уравнение позволяет различать исходное внешнее воздействие и последующее движение по петле гистерезиса. Доказано, что предлагаемая модификация корректирует нефизическое поведение модели для петель малой площади, не затрагивая остальные случаи.

Рассматривались и другие феноменологические модели. Так, например, в работе [23] представлена модель гистерезисного поведения материалов и конструкций, основанная на подходе, который рассматривает систему как состоящую из серии идеальных эластопластических элементов. Определен стационарный динамический отклик модели при воздействии возбуждения гармонической формы. Исследуется влияние деталей формы петли гистерезиса на характер реакции.

Все вышеперечисленные подходы основаны на детерминированности параметров изучаемых систем. Хотя имеется ряд работ, посвященных изучению отклика на случайный или зашумленный сигнал [32, 28], в большинстве из них внутренние параметры гистерезисной подсистемы считаются детерминированными. В интересной работе [10] предложен способ идентификации параметров гистерезисных систем Боука – Вена с использованием гибридного эволюционного алгоритма. Особенностью этого способа является использование избранных стохастических операторов, эвристик, а также дополнительной информации о специфике задачи. Показано, что предлагаемый метод нечувствителен к шумовым искажениям входных данных.

В работах [22, 27] исследуется отклик нелинейной системы на стохастическое внешнее воздействие. В них введена модель последствия случайных тепловых возмущений, приводящих к постепенной

потере памяти в гистерезисных системах. В предположении, что каждый домен имеет температуру фазового перехода $T_c \pm \delta T_c$, где знаки плюс и минус соответствуют нагреву и охлаждению соответственно, пространственные распределения T_c и δT_c служат параметрами модели.

Однако характеристики динамических систем, включающих блоки гистерезиса, могут быть известны лишь с той или иной точностью и, как правило, не позволяют провести идентификацию в условиях неразрушающего контроля. Такая ситуация возникает, например, при возникновении люфтов в механических узлах при длительной эксплуатации. При этом параметры носителей гистерезисных свойств могут испытывать закономерные или неравномерные изменения, связанные со старением материалов, или изменяться под влиянием других неконтролируемых факторов. В связи с этим возникает необходимость в обобщении конструктивных моделей гистерезисных преобразователей, учитывающих вероятностный характер определяющих их параметров.

Настоящая статья посвящена обобщению одной из основных моделей гистерезиса — люфта на класс преобразователей, характеристики которых определяются случайными параметрами.

2. Обобщенный люфт. Физическая модель люфта представляет собой систему, состоящую из цилиндра длины h и поршня, которые могут перемещаться в горизонтальном направлении (см. рис. 1а). Положение цилиндра будем считать входной координатой, а положение поршня — выходной. Вход системы в зависимости от времени на конечном интервале $t \in [t_0, T]$ обозначим через $x(t)$, выход — через $u(t)$.

Для вещественных чисел $v_r, v_l \in \mathbb{R}$ рассмотрим *определяющие кривые* $\tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}$ обобщенного люфта с параметрами сдвига v_l, v_r . Такие кривые вводятся согласно правилам: $\tilde{\Gamma}_l^{v_l} : u_l(x) = l(x) + v_l$ и $\tilde{\Gamma}_r^{v_r} : u_r(x) = r(x) + v_r$. Здесь $l(x)$ и $r(x)$ — функции, отражающие механизм передачи движения цилиндра на движение поршня. Предполагается, что функции $l(x)$ и $r(x)$ удовлетворяют глобальному условию Липшица на всей области определения и монотонно возрастают. Кроме того, пусть выполняется условие отсутствия пересечения положений границ люфта:

$$\forall x (l(x) > r(x)). \tag{1}$$

Для $v_r, v_l \in \mathbb{R}$, таких, что $l(w) + v_l > r(w) + v_r$ для всех $w \in \mathbb{R}$, и для произвольной непрерывной функции $x : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, и $x_0 := x(t_0)$ введем понятие обобщенного люфта.

Следуя классической схеме [3], определим сначала выход на монотонных входах. Выход $u(t)$ в каждый момент времени t подчиняется операторному соотношению

$$u(t) = \hat{L}_S[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}]x(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

где t_0 — начальный момент времени, $u_0 := u(t_0)$ — начальное значение функции выхода.

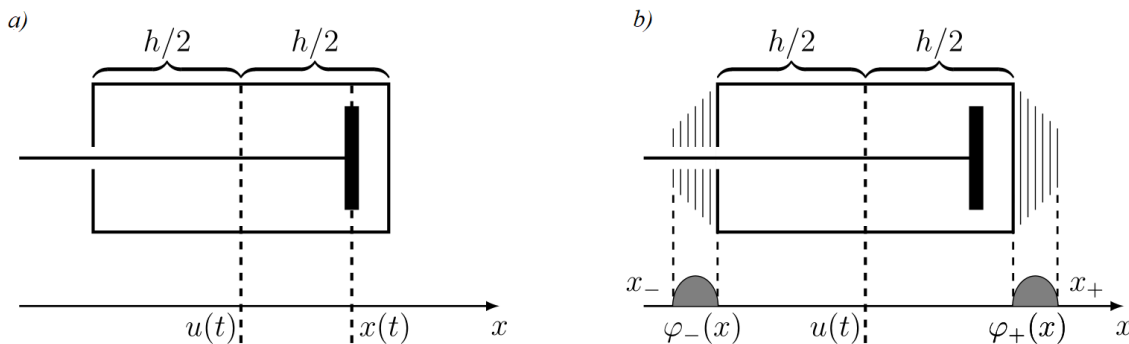


Рис. 1. Схематическое изображение люфта. Панель а) — люфт с детерминированными параметрами, панель б) — со стохастическими параметрами. Серой заливкой выделены области под кривыми $\varphi_l(z)$ и $\varphi_r(z)$, определяющими плотность вероятности левой и правой границ цилиндра соответственно

Fig. 1. Schematic view of the backlash. Panel a) — the backlash with deterministic parameters, panel b) — the backlash with stochastic parameters. Gray filling indicates the area under the curves $\varphi_l(z)$ and $\varphi_r(z)$ which determine the probability density for the left and right boundaries of the cylinder, respectively

Обратимся к реализации следующего этапа — определения выхода на кусочно-монотонных входах. Отметим, что оператор обобщенного люфта \hat{L}_S в (2) удовлетворяет полугрупповому тождеству

$$\hat{L}_S[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}]x(t) = \hat{L}_S[t_1, \hat{L}_S[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}]x(t_1); \tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}]x(t) \tag{3}$$

для произвольного момента времени $t_1 \in [t_0, T]$. Выполняя разбиение промежутка $[0, T] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n] \cup [t_n, T]$ на промежутки монотонности, определим на каждом из них соответствующий

оператор как оператор на монотонном входе. Таким образом, начальное состояние определяется как состояние в момент времени, соответствующий переходу на очередной участок монотонности.

3. Обобщенный люфт со случайными параметрами. В настоящем разделе введем понятие недетерминированного обобщенного люфта. Если рассматривать положения левой и правой стенок цилиндра, распределенные по случайному закону, то соответствующий преобразователь естественно назвать люфтом со случайными параметрами, или недетерминированным обобщенным люфтом. Ниже предполагается, что функции $\varphi_r(x)$ и $\varphi_l(x)$, интерпретируемые как плотности вероятности, соответствующие положениям левой и правой границ цилиндра, заданы.

Ниже будем полагать, что положения левой и правой границ цилиндра заданы случайным образом, причем они определяются известными функциями плотности вероятности $\varphi_r(x)$ и $\varphi_l(x)$.

Будем считать, что носители функций $\varphi_l(x)$ и $\varphi_r(x)$ расположены на промежутках $(-v_l, v_l)$ и $(-v_r, v_r)$ соответственно (см. рис. 1б). Пусть плотности вероятности $\varphi_r(x)$ и $\varphi_l(x)$ имеют ограниченную первую производную. Выход преобразователя-люфта со случайными параметрами будем считать случайным процессом $u(t)$ с функцией распределения $P\{u(t) < u\}$.

Как и выше для детерминированного преобразователя, определим сначала выход на монотонных входах. Для случайного процесса $u(t)$ в каждый момент времени t запишем операторное соотношение вида

$$u(t) = \hat{L}[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $x_0 = x(t_0)$ и $u_0 = u(t_0)$ — начальные значения функций входа и выхода соответственно, t_0 — начальный момент времени. Здесь $\tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}$ — определяющие кривые люфта, $\tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}: u_l = l(x) + \Xi_l$ и $\tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}: u_r = r(x) + \Xi_r$, где $l(x)$ и $r(x)$ — функции, отражающие механизм передачи движения поршня на движение цилиндра, Ξ_l, Ξ_r — случайные величины с плотностями вероятности $\varphi_l(x)$ и $\varphi_r(x)$ соответственно (см. рис. 2). Предполагается, кроме того, что при всяком значении аргумента вероятность положительности разности случайных величин u_r и u_l равна единице: $P\{u_r - u_l > 0\} = 1$.

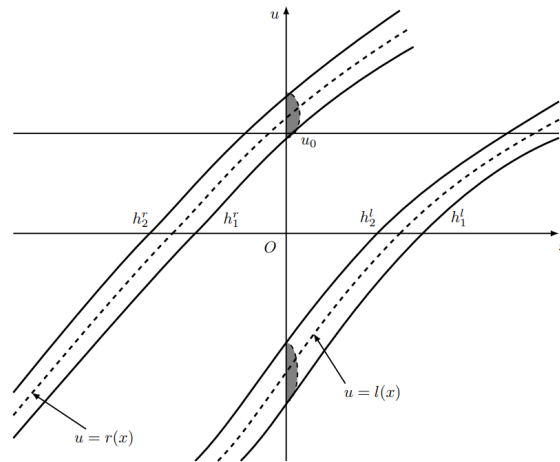


Рис. 2. Обобщенный люфт со случайными параметрами.

Серой заливкой выделены области под $\varphi_l(z - l(x))$ и $\varphi_r(z - r(x))$

Fig. 2. Generalized backlash with stochastic parameters: input-output plane with determining curves.

Gray filling indicates the area under the probability densities $\varphi_l(z - l(x))$ and $\varphi_r(z - r(x))$

Введем обозначения:

$$h_1^r(x) = r(x) - v_r, \quad (5)$$

$$h_2^r(x) = r(x) + v_r, \quad (6)$$

$$h_1^l(x) = l(x) - v_l, \quad (7)$$

$$h_2^l(x) = l(x) + v_l. \quad (8)$$

Величины $h_1^r(x)$ и $h_2^r(x)$ отвечают левой и правой границам носителя левой части люфта при изменении входа соответственно. В свою очередь, величины $h_1^l(x)$ и $h_2^l(x)$ отвечают левой и правой границам носителя правой части люфта соответственно (см. рис. 2).

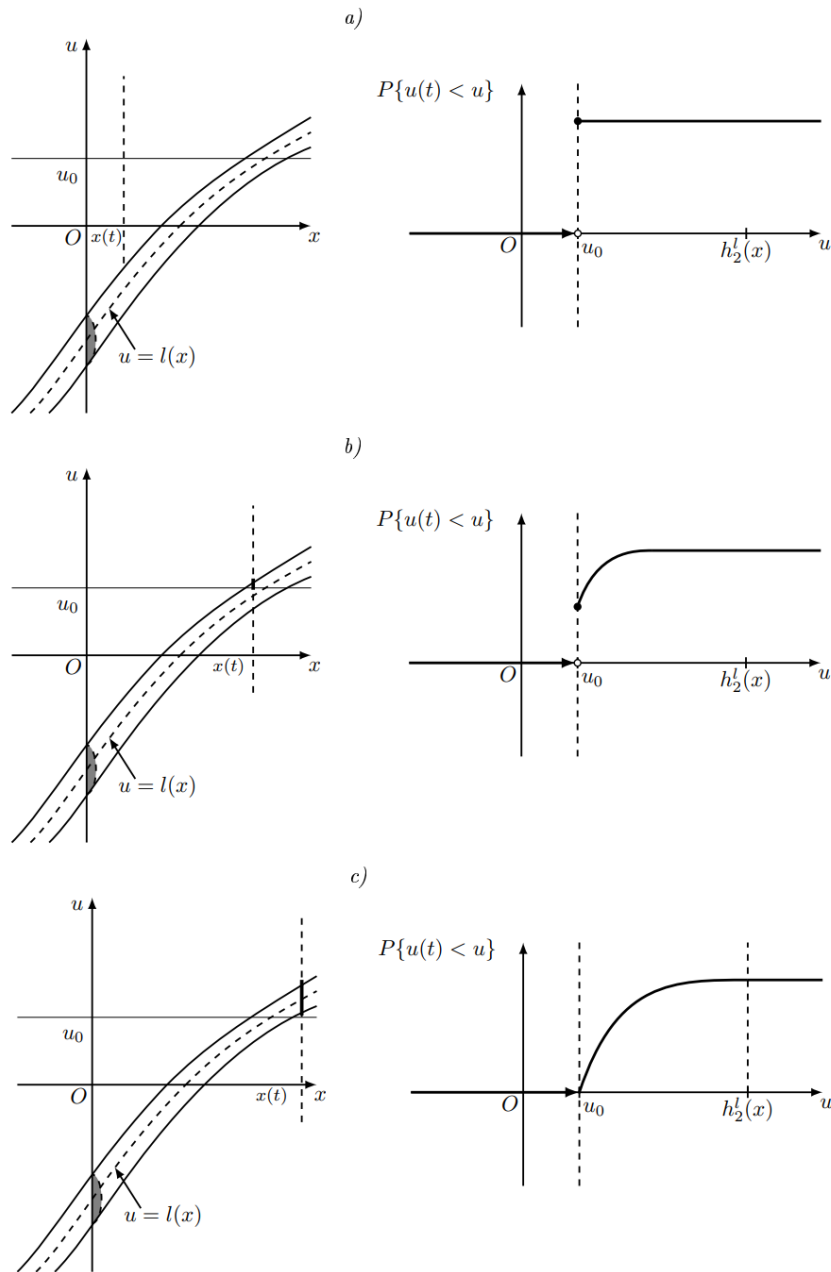


Рис. 3. Эволюция функции распределения $P(u) = \{u(t) < u\}$ для монотонно возрастающих входов.

Панель а) – $u_0 > h_2^l(x)$, панель б) – $h_1^l(x) \leq u_0 \leq h_2^l(x)$, панель с) – $u_0 < h_1^l(x)$

Fig. 3. Evolution of the distribution function $P(u) = \{u(t) < u\}$ for monotonically increasing inputs.

Panel a) – $u_0 > h_2^l(x)$, panel b) – $h_1^l(x) \leq u_0 \leq h_2^l(x)$, panel c) – $u_0 < h_1^l(x)$

Функцию распределения случайного процесса определим на монотонно возрастающих входах $x(t)$ следующим образом:

$$P_{x(t)}\{u(t) < u\} = \Phi_l(u - \tilde{\Gamma}_l^{\Xi l}(x(t))), \tag{9}$$

где введено определение $\Phi_l(u) \equiv \int_{-\infty}^u \varphi_l(s) ds$. Для монотонно убывающих входов $x(t)$ имеем по определению:

$$P_{x(t)}\{u(t) < u\} = \Phi_r(u - \tilde{\Gamma}_r^{\Xi r}(x(t))), \tag{10}$$

где $\Phi_r(u) \equiv \int_{-\infty}^u \varphi_r(s) ds$.

Соотношения (9) и (10) допускают следующую интерпретацию: вероятность $P(u) \equiv P\{u(t) < u\}$ определяется начальным положением цилиндра u_0 и координатой поршня $x(t)$ в текущий момент времени. В зависимости от соотношения между u_0 и $x(t)$ возможны несколько случаев (см. рис. 3).

1) Если $u_0 > h_2^l(x)$, то поршень расположен левее правой границы цилиндра. Следовательно, координата u не менялась за прошедший промежуток времени, и $P(u) = 1$ при $u \geq u_0$, $P(u) = 0$ при $u < u_0$. В данном случае функция $P(u)$ совпадает с функцией Хевисайда: $P(u) = \theta(u - u_0)$.

2) Если выполняются неравенство $u_0 \leq h_2^l(x)$, то поршень находится на промежутке, где плотность вероятности правой границы люфта отлична от нуля. Из физических свойств системы следует, что событие $u < u_0$ невозможно, а событие $u > h_2^l(x)$ — достоверно. Для u из интервала $[u_0, h_2^l(x)]$ вероятность противоположного события, как следует из рис. 2, равна $\varphi_l(u)$. Величина $P(u)$ с увеличением u монотонно возрастает до единицы.

Определение выхода на кусочно-монотонных входах. Определим выход в ситуации, когда начальное значение выхода является случайной величиной. Введем понятие базовых состояний обобщенного гистерезисного преобразователя со случайными параметрами. Под *базовым состоянием* недетерминированного обобщенного люфта будем понимать множество $\{t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}\}$, для элементов которого справедливо условие принадлежности носителя распределения u_0 внутренней области люфта:

$$\tilde{\Gamma}_l^{v_l} \leq \text{supp } \varphi_{u_0} \leq \tilde{\Gamma}_r^{v_r}. \quad (11)$$

Допустимыми состояниями назовем состояния вида $\{T, u(T); \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}\}$, удовлетворяющие следующему условию:

$$\exists u_0, x(t) : \hat{L}[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t) = u(T). \quad (12)$$

Другими словами, критерием допустимости состояния является возможность получения этого состояния в результате эволюции из какого-либо базового состояния.

Пусть начальное значение u_0 представляет собой случайную величину, распределенную с плотностью вероятности $\varphi_{u_0}(u)$, которая имеет ограниченную первую производную. Обозначим функцию распределения следующим образом:

$$P_{u_0}\{u(t) < u\} = \int_{-\infty}^u \varphi_{u_0}(s) ds. \quad (13)$$

Функцию распределения $P\{u(t) < u\}$ в ситуации, когда u_0 также является случайной величиной, для монотонно возрастающих входов определим как минимальное из значений (9) и (13):

$$P\{u(t) < u\} = \min(P_{x(t)}\{u(t) < u\}, P_{u_0}\{u(t) < u\}). \quad (14)$$

Для монотонно убывающих входов формула (14) принимает следующий вид:

$$P\{u(t) < u\} = \max(P_{x(t)}\{u(t) < u\}, P_{u_0}\{u(t) < u\}). \quad (15)$$

Отметим, что оператор люфта со случайными параметрами \hat{L} в (4) удовлетворяет полугрупповому тождеству

$$\hat{L}[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t) = \hat{L}[t_1, \hat{L}[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t_1); \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t) \quad (16)$$

для произвольного момента времени $t_1 \in [t_0, T]$.

Для определения оператора \hat{L} на кусочно-монотонных входах в случае конечного значения t выполним разбиение промежутка $[0, T]$ на промежутки монотонности и определим на каждом из них соответствующий оператор как оператор на монотонном входе. Начальное состояние при этом определяется как состояние в момент времени перехода на другой участок монотонности.

Теорема. Пусть на отрезке $t_0 \leq t \leq T$ имеет место равномерная сходимость последовательности кусочно-монотонных функций $\{x_n(t)\}$, $n = 1, 2, \dots$, к функции $x_*(t)$:

$$x_n(t) \rightrightarrows x_*(t) \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (17)$$

Тогда выход представляет собой случайный процесс, сходящийся по распределению к случайному процессу

$$u_*(t) = \hat{L}[u_0, x_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x_*(t). \quad (18)$$

Доказательство. Сходимость последовательности ξ_n , где $n = 1, 2, \dots$, по распределению к ξ (обозначение $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$) означает, что для произвольной ограниченной непрерывной функции $f = f(x)$ выполняется предельный переход

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(\xi_n) \rangle = \langle f(\xi) \rangle, \quad (19)$$

где $\langle \dots \rangle$ отвечает усреднению по функции распределения.

Выходу $x_*(t)$ сопоставляется случайный процесс с функцией распределения $P\{u_*(t) < u\}$ как верхний предел $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{u_n(t) < u\}$.

1. Докажем, что $u_n(t) \xrightarrow{d} u_*(t)$ выполняется для монотонных функций $x_n(t)$.

Для этого рассмотрим модуль разности математических ожиданий $\mathcal{D} = |\langle f(u_n(t)) \rangle - \langle f(u_*(t)) \rangle|$ и убедимся, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: при $|x_n(t) - x_*(t)| < \delta$ справедливо условие $\mathcal{D} < \varepsilon$. В самом деле, используя (14), получим:

$$\mathcal{D} = \left| \int_0^1 f(u) dP\{u_n < u\} - \int_0^1 f(u) dP\{u_* < u\} \right| = \left| \int_0^1 f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_* < u\}) \right|. \quad (20)$$

Далее докажем вспомогательное неравенство

$$|\min(A_1, B_1) - \min(A_2, B_2)| \leq \max(|A_1 - A_2|, |B_1 - B_2|), \quad (21)$$

справедливое для произвольных $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$. Перейдем к новым переменным $A_1 = x, A_2 = x + a, B_1 = y, B_2 = y + b$, где x, y, a, b также принадлежат множеству вещественных чисел:

$$|\min(x, y) - \min(x + a, y + b)| \leq \max(|a|, |b|). \quad (22)$$

Вспользуемся выражением для минимума двух чисел через функцию абсолютной величины двух чисел:

$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$. Обозначим левую часть неравенства (21) через L :

$$L = \left| \frac{x + y - |x - y|}{2} - \frac{x + a + y + b - |(x - y) + (a - b)|}{2} \right| = \frac{1}{2} ||(x - y) + (a - b)| - |x - y| - (a + b)|. \quad (23)$$

Согласно неравенству треугольника $|A| - |B| \leq |A + B| \leq |A| + |B|$ имеем:

$$|x - y| - |a - b| \leq |(x - y) + (a - b)| \leq |x - y| + |a - b|. \quad (24)$$

Следовательно, для L получаем оценку

$$\frac{1}{2}(-|a - b| - (a + b)) \leq L \leq \frac{1}{2}(|a - b| - (a + b)). \quad (25)$$

В силу приведенной оценки $(-\max(a, b)) \leq L \leq \min(a, b)$, или

$$L \leq \max(|\min(a, b)|, |\max(a, b)|) \equiv \max(|a|, |b|). \quad (26)$$

Таким образом, неравенство (21) доказано.

С помощью (21) получаем оценку, которой удовлетворяет модуль разности математических ожиданий \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left| \int_0^1 f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_* < u\}) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \max_{t \in [t_0, T]} \max(\varphi_l(u - h_2^l(x_n(t))) - \varphi_l(u - h_2^l(x_*(t))), \right. \\ &\quad \left. \varphi_{u_0}(u) - \varphi_{u_0}(u)) du \right| \leq \\ &\leq |h_2^l(x_n) - h_2^l(x_*)| \max_{t \in [t_0, T]} \max \left(\left. \frac{d\varphi_l(u)}{du} \right|_{\xi_n} |\text{supp } \varphi_l(u)|, \frac{d\varphi_{u_0}(u)}{du} \right|_{\xi_*} |\text{supp } \varphi_{u_0}(u)| \right) = \\ &= \text{const} \times \delta = \varepsilon, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\xi_n \in [\inf \text{supp } \varphi_l(u), \sup \text{supp } \varphi_l(u)]$, $\xi_* \in [\inf \text{supp } \varphi_{u_0}(u), \sup \text{supp } \varphi_{u_0}(u)]$.

Напомним, что функция $l(x)$ удовлетворяет глобальному условию Липшица. Принимая во внимание также непрерывность функций $f(u)$, и с учетом $x_n(t) \xrightarrow{d} x_*(t)$, на основании теоремы о среднем получаем, что $\mathcal{D} < \varepsilon$, следовательно, $u_n(t) \xrightarrow{d} u_*(t)$.

2. Перейдем к рассмотрению кусочно-монотонных входов $x(t)$ для $t_0 \leq t \leq T$. Обозначим $y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) dP\{u_n < u\}$. Докажем, что последовательность $\{y_n\}$ является фундаментальной на отрезке $[t_0, T]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n \geq N \forall t \in [t_0, T] |y_m(t) - y_n(t)| < \varepsilon. \quad (28)$$

Для некоторого члена последовательности $\{y_n\}$ запишем разбиение вещественной оси \mathbb{R} на промежутки монотонности $t_k^{(n)}$:

$$\mathcal{T}^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{S_n} T_k^{(n)}, \quad T_k^{(n)} \cap T_{k'}^{(n)} = \emptyset \text{ при } k \neq k'. \quad (29)$$

Аналогично, для еще одного представителя последовательности, например, $y_m(t)$, имеем разбиение на промежутки монотонности $T_k^{(m)}$:

$$\mathcal{T}^{(m)} = \bigcup_{k=1}^{S_m} T_k^{(m)}, \quad T_k^{(m)} \cap T_{k'}^{(m)} = \emptyset \text{ при } k \neq k'. \quad (30)$$

На основе разбиений \mathcal{T}_n и \mathcal{T}_m сконструируем новое разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n \cup \mathcal{T}_m = \bigcup_{k=1}^{S_n+S_m} T_k$, являющееся подразбиением \mathbb{R} на такие промежутки, для которых как $\{x_n(t)\}$, так и $\{x_m(t)\}$ обладают свойством монотонности.

Далее рассмотрим два случая:

1) одновременное возрастание (или убывание) функций $x_n(t)$ и $x_m(t)$ на некотором промежутке T_k .
Имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & |y_n(t) - y_m(t)| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_m < u\})| \leq \\ & \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \max_{t \in t_k} \max(\varphi_l(u - h_2^l(x_n(t))) - \varphi_l(u - h_2^l(x_m(t))), \right. \\ & \quad \left. \varphi_{u_0}(u) - \varphi_{u_0}(u)) du \right| \leq \\ & \leq |h_2^l(x_n(t)) - h_2^l(x_m(t))| \max_{t \in T_k} \max \left(\left. \frac{d\varphi_l(u)}{du} \right|_{\xi} |\text{supp } \varphi_l(u)|, \frac{d\varphi_{u_0}(u)}{du} \right|_{\xi} |\text{supp } \varphi_{u_0}(u)| \Big) = \text{const} \times \delta = \varepsilon, \quad (31) \end{aligned}$$

где $\xi_n \in [\inf \text{supp } \varphi_l(u), \sup \text{supp } \varphi_l(u)]$, $\xi_* \in [\inf \text{supp } \varphi_{u_0}(u), \sup \text{supp } \varphi_{u_0}(u)]$.

Заметим, что если значения входа $x(t)$ отличаются на ограниченные величины

$|\delta x_n(t)|, |\delta x_m(t)| < \varepsilon_0 = \text{const}$, то, в силу непрерывности функции $h_2^l(x)$ на промежутке t_k , оценка (31) сохраняет свою истинность.

2) функция $x_n(t)$ монотонно возрастает (убывает), а $x_m(t)$ монотонно убывает (возрастает) на некотором T_k :

$$\begin{aligned} & |y_n(t) - y_m(t)| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_m < u\})| \leq \\ & \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \max_{t \in t_k} \max(\varphi_l(u - h_2^l(x_n(t))) - \varphi_l(u - h_2^l(x_m(\inf T_k))), \right. \\ & \quad \left. \varphi_{u_0}(u) - \varphi_{u_0}(u)) du \right|. \quad (32) \end{aligned}$$

В силу того, что $\max_{t \in T_k} |x_n(t) - x_m(\inf T_k)| \leq \max_{t \in t_k} |x_n(t) - x_m(t)|$, для левой части неравенства (32) также справедлива оценка вида (31).

Следовательно, последовательность $\{y_n\}$ имеет предел: $Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}$.

3. Докажем, что $Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(u_n(t)) \rangle$.

Введем обозначения для нижнего и верхнего пределов последовательности функций распределения при фиксированном $t \in [t_0, T]$:

$$\tilde{P}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{u_n < n\}, \quad \tilde{\tilde{P}}(u) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P\{u_n < n\}, \quad (33)$$

Существование пределов (33) вытекает из ограниченности функции распределения (14).

Докажем, что $\tilde{P}(u) = \tilde{\tilde{P}}(u) = Y(t)$.

В самом деле, если для всех моментов времени $t \in [t_0, T]$ выполняется равенство $\tilde{P}(u) = \tilde{\tilde{P}}(u)$, то, следовательно, по свойствам верхнего и нижнего предела функциональной последовательности $Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}$.

Далее предположим, что в некоторый момент времени $t_w \in [t_0, T]$ значения пределов различны: $\tilde{P}(w) \neq \tilde{\tilde{P}}(w)$. Тогда для достаточно большого номера N_0 существуют порядковые номера n и m такие, что либо

$$\tilde{P}(w) \leq P(u_n(t_w) < w) < P(u_m(t_w) < w) \leq \tilde{\tilde{P}}(w), \quad (34)$$

либо

$$\tilde{P}(w) \leq P(u_n(t) < w) < P(u_n(t) < w) \leq \tilde{\tilde{P}}(w). \tag{35}$$

Без ограничения общности достаточно рассмотреть первый из двух случаев (34) и (35). Как доказано в пункте 2), неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_m < u\}) \right| \leq \varepsilon \tag{36}$$

справедливо для произвольной ограниченной непрерывной на \mathbb{R} функции $f(u)$. Положим $f(u) = \theta(w - u)$, где $\theta(u)$ – функция Хевисайда. Из этого следует оценка

$$|P\{u_n < w\} - P\{u_m < w\}| \leq \varepsilon, \tag{37}$$

что противоречит предположению (34).

Тем самым доказано, что для произвольного непрерывного на $[t_0, T]$ входе $x(t)$ определен случайный процесс $u(t)$, трактуемый как выход гистерезисного преобразователя со случайными параметрами на произвольном непрерывном входе. ■

4. Иллюстративные примеры. Рассмотрим люфт с направляющими прямыми $\tilde{I}_l: u = x + \Xi_l$ и $\tilde{I}_r: u = x + \Xi_r$, где Ξ_l, Ξ_r – определенные на интервале (x_-, x_+) случайные величины.

Динамика изменения функции распределения $P(u) = P\{u(t) < u\}$ для монотонно возрастающего входа $x(t) = t + 1$ и для $l(x) = x + \sin x - 3$ в зависимости от u приведена на рис. 4, правая граница является равномерно распределенной случайной величиной, значения параметров равны $x_- = -0.5, x_+ = 0.5, u_0 = 0, t = 1.2$ (сплошная кривая), $t = 4$ (пунктирная кривая), $t = 5$ (штрих-пунктирная кривая).

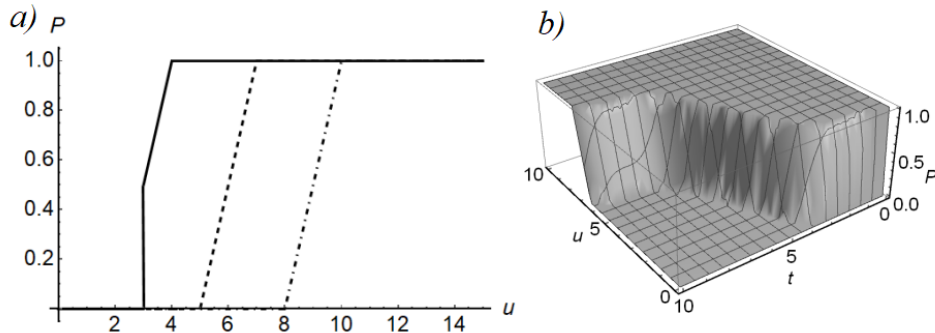


Рис. 4. Панель a) – динамика эволюции функции распределения $P(u) = P\{u(t) < u\}$ для входа $x(t) = t + 1$ и $l(x) = x + \sin x - 3$, сплошная линия соответствует моменту времени $t = 1.2$, пунктирная – $t = 4$, штрих-пунктирная – $t = 5$, панель b) – функция распределения $P_t(u) = \{u(t) < u\}$

Fig. 4. Panel a) – dynamics of the distribution function $P(u) = P\{u(t) < u\}$ for the input $x(t) = t + 1$, when $l(x) = x + \sin x - 3$, right edge is uniformly distributed, and the time moment is fixed: $t = 1.2$ (solid curve), $t = 4$ (dashed curve), $t = 5$ (dash-dotted curve), panel b) – the distribution function $P_t(u) = \{u(t) < u\}$

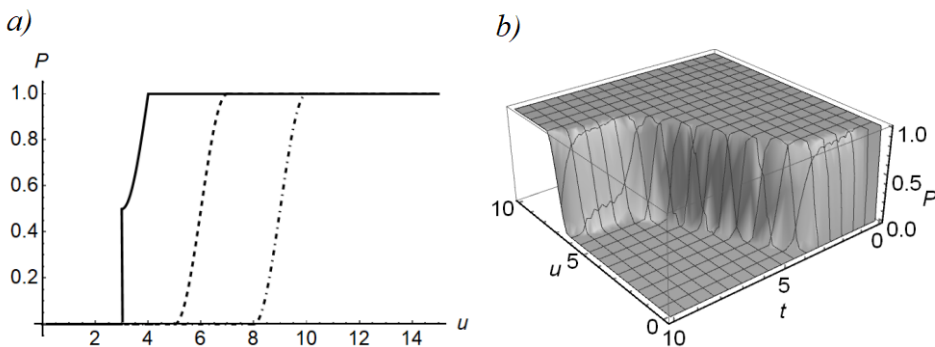


Рис. 5. Панель a) – динамика функции распределения $P(u) = P\{u(t) < u\}$ для входа $x(t) = t + 1$, когда $l(x) = x + \sin x - 3$, правый край распределен с плотностью (38), а момент времени фиксирован: $t = 1.2$ (сплошная кривая), $t = 4$ (штриховая кривая), $t = 5$ (штрихпунктирная кривая), панель b) – функция распределения $P_t(u) = \{u(t) < u\}$

Fig. 5. Panel a) – dynamics of the distribution function $P(u) = P\{u(t) < u\}$ for the input $x(t) = t + 1$, when $l(x) = x + \sin x - 3$, right edge is distributed with the density (38), and time moment is fixed: $t = 1.2$ (solid curve), $t = 4$ (dashed curve), $t = 5$ (dash-dotted curve), panel b) – the distribution function $P_t(u) = \{u(t) < u\}$

Рисунок 5 иллюстрирует эволюцию функции распределения в ситуации, когда правая граница является случайной величиной с плотностью распределения

$$\varphi_l(x) = \frac{\pi}{2(x_+ - x_-)} \sin\left(\pi \frac{x - x_-}{x_+ - x_-}\right) \tag{38}$$

при $x \in (x_-, x_+)$, и $\varphi_l(x) = 0$ при остальных значениях x , параметры равны $x_- = -0.5, x_+ = 0.5, u_0 = 0$.

Результаты численного эксперимента определения моментных функций $\langle u \rangle$ и $\langle u^2 \rangle$ приведены на рис. 6.

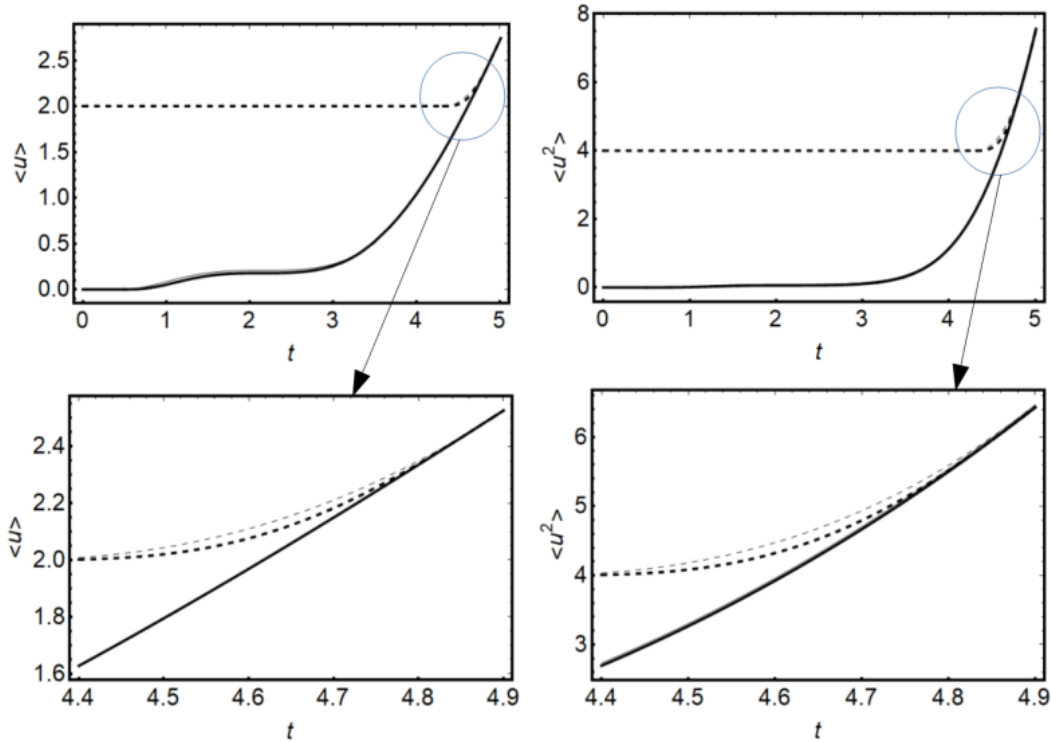


Рис. 6. Моменты $\langle u \rangle$ и $\langle u^2 \rangle$ для входа $x(t) = t + 1$ и $l(x) = x + \sin x - 3$ при $u_0 = 0$ (сплошные кривые) и $u_0 = 2$ (пунктирные кривые), правая граница является равномерно распределенной случайной величиной (тонкие кривые) или случайной величиной с плотностью распределения (38). Значения параметров равны $x_- = -0.5, x_+ = 0.5$
 Fig. 6. Moment functions $\langle u \rangle$ and $\langle u^2 \rangle$ for the input $x(t) = t + 1$ and $l(x) = x + \sin x - 3$: $u_0 = 0$ (solid curve) and $u_0 = 2$ (dashed curve). The right edge is a uniformly distributed (thin curves), or distributed with density (38). Parameters are: $x_- = -0.5, x_+ = 0.5$.

Рассмотрим динамику изменения функции распределения $P(u) = P\{u(t) < u\}$ для функции $l(x)$, задающей границу люфта, равной $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$. По-прежнему полагаем, что вход равен $x(t) = t + 1$.

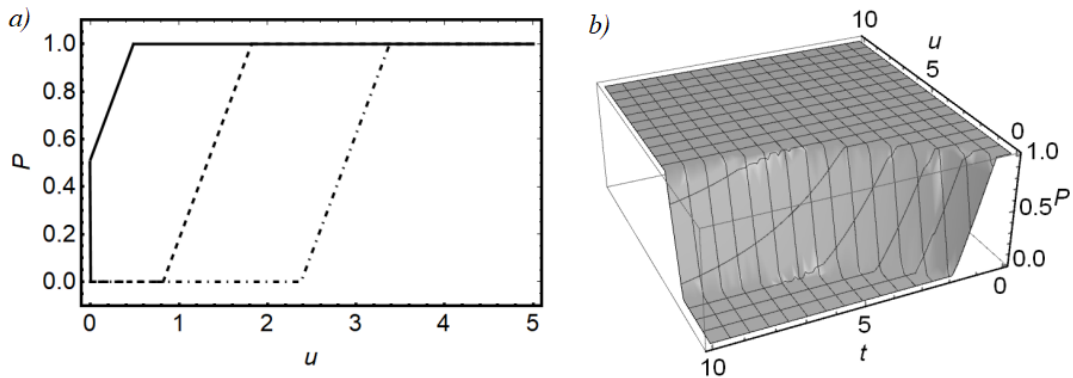


Рис. 7. Панель а) – динамика эволюции функции распределения $P(u) = P\{u(t) < u\}$ для входа $x(t) = t + 1$ и $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$, сплошная линия соответствует моменту времени $t = 1.2$, пунктирная – $t = 4$, штрих-пунктирная – $t = 5$, панель б) – функция распределения $P_t(u) = \{u(t) < u\}$
 Fig. 7. Panel a) – dynamics of evolution of distribution function $P(u) = P\{u(t) < u\}$ for input $x(t) = t + 1$ and $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$, solid line corresponds to time $t = 1.2$, dotted line – $t = 4$, dash-dotted line – $t = 5$, panel b) – distribution function $P_t(u) = \{u(t) < u\}$

График функции $P(u)$ в этом случае приведен на рис. 7, правая граница является равномерно распределенной случайной величиной, значения параметров равны $x_- = -0.5$, $x_+ = 0.5$, $u_0 = 0$, $t = 1.2$ (сплошная кривая), $t = 4$ (пунктирная кривая), $t = 5$ (штрих-пунктирная кривая).

Рисунок 8 иллюстрирует эволюцию функции распределения в ситуации, когда правая граница является случайной величиной с плотностью распределения (38) при $x \in (x_-, x_+)$, значения параметров равны $x_- = -0.5$, $x_+ = 0.5$, $u_0 = 0$.

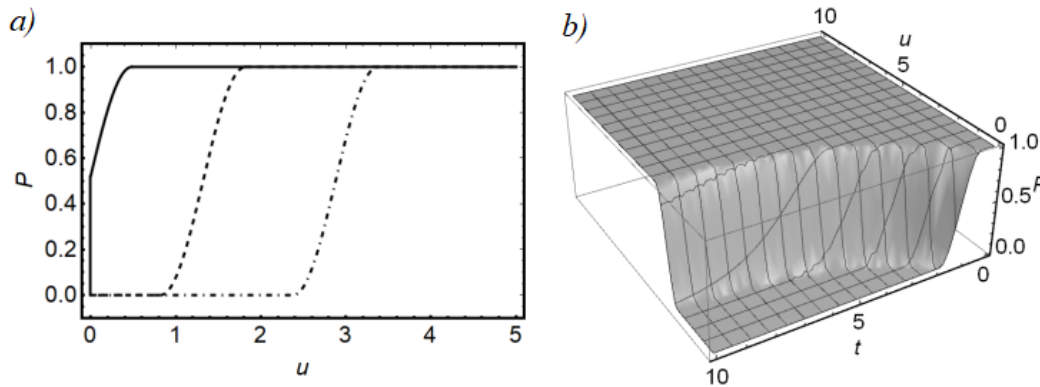


Рис. 8. То же, что и на рис. 5, но для $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$
 Fig. 8. The same as in Fig. 5, but for $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$

Результаты численного эксперимента определения моментных функций $\langle u \rangle$ и $\langle u^2 \rangle$ для $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$ приведены на рис. 9.

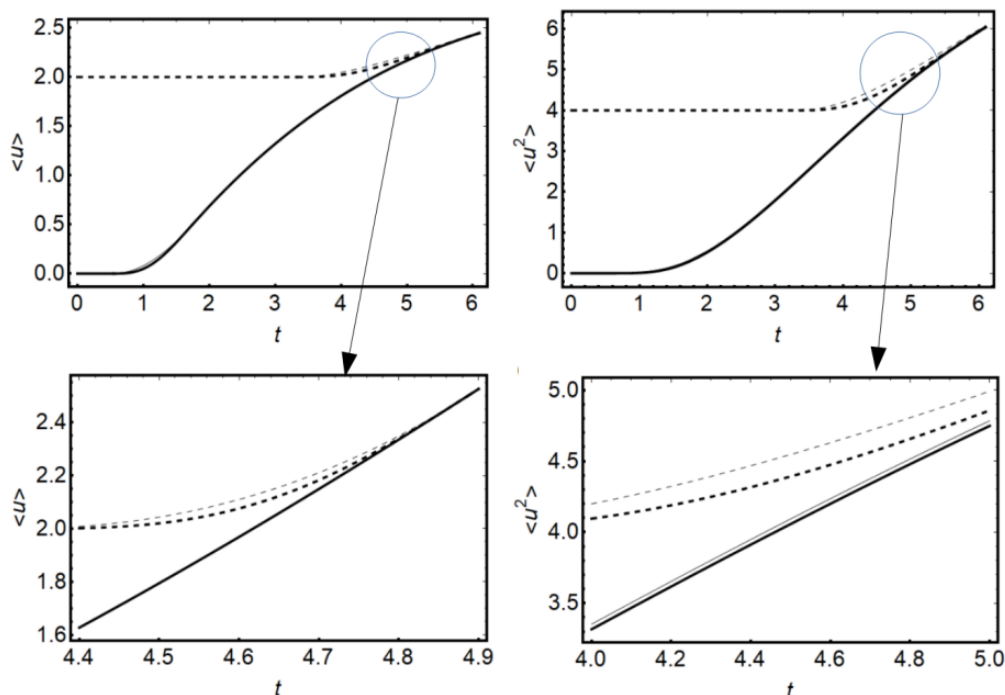


Рис. 9. То же, что и на рис. 6, но для $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$
 Fig. 9. The same as in Fig. 6, but for $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$

Список литературы

1. Борзунов С. В., Семенов М. Е., Сельвесюк Н. И., Мелешенко П. А. 2019. Гистерезисные преобразователи со случайными параметрами. Математическое моделирование. Т. 31(7). С. 109-126. EDN: KWHLZJ. DOI: 10.1134/S0234087919070074
2. Борзунов С. В., Семенов М. Е., Сельвесюк Н. И., Мелешенко П. А., Соловьев А. М. 2021. Стохастическая модель гистерезисного преобразователя с доменной структурой Математическое моделирование, 33(9): 60–86. EDN: XTIALM. DOI: 10.20948/mm-2021-09-05

3. Красносельский М. А., Покровский А. В. 1983. Системы с гистерезисом. М., Наука, 272.
4. Медведский А. Л., Мелешенко П. А., Нестеров В. А., Решетова О. О., Семенов М. Е. 2021. Динамика гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля: Метод малого параметра. Известия РАН. Теория и системы управления, 4: 7–26. DOI: 10.31857/S0002338821040107
5. Belhaq M., Bichri A., Der Hogapian J., Mahfoud J. 2011. Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam. International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.001
6. Benabou A., Clénet S., Piriou F. 2003. Comparison of Preisach and Jiles–Atherton models to take into account hysteresis phenomenon for finite element analysis. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 261(1): 139–160.
7. Brokate M., Krejčí P. 2013. Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality. Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B. 18: 331–348.
8. Bouc R. 1967. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation. Prague, Czechoslovakia, p. 315.
9. Carboni B., Lacarbonara W. 2016. Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: experiments and computations. Nonlinear Dynamics, 83: 23–39. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2305-9>
10. Charalampakis A. E., Koumoussis V. K. 2008. Identification of Bouc-Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm. Journal of Sound and Vibration, 314 (3–5): 571–585.
11. Charalampakis A. E., Koumoussis V. K. 2009. A Bouc–Wen model compatible with plasticity postulates. Journal of Sound and Vibration, 322, pp. 954–968.
12. Chtouki, A., Lakrad, F., Belhaq, M. 2020. Quasi-periodic bursters and chaotic dynamics in a shallow arch subject to a fast–slow parametric excitation. Nonlinear Dynamics, 99: 283–298. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05082-7>
13. Davino D., Krejčí P., Pimenov A. et al. 2016. Analysis of an operator-differential model for magnetostrictive energy harvesting. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 39: 504–519.
14. De Domenico, D., Quaranta, G., Ricciardi, G., Lacarbonara, W. 2022. Optimum design of tuned mass damper with pinched hysteresis under nonstationary stochastic seismic ground motion. Mechanical Systems and Signal Processing, 170: 108745.
15. Duhem P. 1987. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik. I. Z. Phys. Chem. 22: 543–589.
16. Dupre L. R., Van Keer R., Melkebeek J.A.A. 1999. Identification of the relation between the material parameters in the Preisach model and in the Jiles–Atherton hysteresis model. Journal of Applied Physics, 85(8): 4376–4378.
17. Kottaria A. K., Charalampakis A. E., Koumoussis V. K. 2014. A consistent degrading Bouc–Wen model. Engineering Structures 60: 235–240.
18. Formica G., Lacarbonara W. 2020. Asymptotic dynamic modeling and response of hysteretic nanostructured beams. Nonlinear Dynamics, 99(1): 227–248.
19. Gavioli C., Krejčí P. 2021. Control and controllability of PDEs with hysteresis. Applied Mathematics & Optimization, 84: 829–847.
20. Ikhouane F. 2018. A survey of the hysteretic Duhem model. Archives of Computational Methods in Engineering, 25(4): 965–1002.
21. Ikhouane F., Rodellar J. 2005. On the Hysteretic Bouc–Wen Model. Nonlinear Dynamics, 42: 63–78.
22. Korman C.E. Mayergoyz I.D. Review of Preisach type models driven by stochastic inputs as a model for after-effect. Physica B. 233: 381–389.
23. Kottaria A.K., Charalampakis A.E., Koumoussis V.K. 2014. A consistent degrading Bouc–Wen model. Engineering Structures 60: 235–240.
24. Lacarbonara W., Talò M., Carboni B., Lanzara G. Tailoring of Hysteresis Across Different Material Scales. In Collection: M. Belhaq (ed.), Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics, Springer Proceedings in Physics 199:227–250. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6_13
25. Lin C.-J., Lin P.-T. 2012. Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model. Computers and Mathematics with Applications, 64: 766–787.
26. Mayergoyz I. D. 1986. Mathematical models of hysteresis. Physical Review Letters, 56(15): 1518–1521.
27. Mayergoyz I., Dimian M. 2003. Analysis of spectral noise density of hysteretic systems driven by stochastic processes. Journal of Applied Physics, 93(10): 6826–6828.
28. Mayergoyz I. D., Dimian M. 2005. Stochastic aspects of hysteresis. Journal of Physics: Conference Series, 22: 139–147.
29. Padthe, A.K., Drincic, B., Oh, J. et al. 2008. Duhem modeling of friction-induced hysteresis. IEEE Control Systems Magazine, 28: 90–107. DOI: 10.1109/MCS.2008.927331
30. Preisach F. 1935. Über die magnetische Nachwirkung. Zeitschrift für Physik. 94(5–6): 277–302.
31. Rachinskii D. 2016. Realization of Arbitrary Hysteresis by a Low-dimensional Gradient Flow. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 21: 227–243.

32. Rios L.A., Rachinskii D., Cross R. 2017. A model of hysteresis arising from social interaction within a firm. *Journal of Physics: Conference Series*, 811 (1): 012011.
33. Semenov M. E., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. 2020. Stochastic Preisach operator: definition within the design approach. *Nonlinear Dynamics*, 101: 2599–2614. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>
34. Semenov M. E., Meleshenko P. A., Borzunov S. V., Reshetova O. O., Barsukov A. I. 2023. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach. *Micromachines*, 14: 310. <https://doi.org/10.3390/mi14020310>
35. Semenov M. E., Reshetova O. O., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. 2021. Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 230: 3565–3571. <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00237-3>
36. Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Reshetova O. O. 2020. Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 15: 43. <https://doi.org/10.1051/mmnp/2019053>
37. Wen Y. K. 1976. Method of random vibration of hysteretic systems. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 102(2): 249–263.

References

1. Borzunov S. V., Semenov M. E., Sel'vesyuk N. I., Meleshenko P. A. 2020. Hysteretic Converters with Stochastic Parameters. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 12 (2): 164-175. (in Russian)
2. Borzunov S. V., Semenov M. E., Sel'vesyuk N. I., Meleshenko P. A. 2022. Stochastic Model of a Hysteresis Converter with a Domain Structure. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 14(2): 305-321. (in Russian)
3. Krasnosel'skii M. A., Pokrovskii A. V. *Systems with Hysteresis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989, 410 p. (in Russian)
4. Medvedskii, A., Meleshenko, P., Nesterov, V., Reshetova, O., Semenov, M. 2021. Dynamics of hysteretic-related Van-Der-Pol oscillators: the small parameter method. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 60: 511–529. (in Russian)
5. Belhaq M., Bichri A., Der Hogopian J., Mahfoud J. 2011. Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.001
6. Benabou A., Clénet S., Piriou F. 2003. Comparison of Preisach and Jiles–Atherton models to take into account hysteresis phenomenon for finite element analysis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 261(1): 139–160.
7. Brokate M., Krejčí P. 2013. Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*. 18: 331–348.
8. Bouc R. 1967. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. *Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation*. Prague, Czechoslovakia, p. 315.
9. Carboni B., Lacarbonara W. 2016. Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: experiments and computations. *Nonlinear Dynamics*, 83: 23–39. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2305-9>
10. Charalampakis A. E., Koumousis V. K. 2008. Identification of Bouc-Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 314 (3–5): 571–585.
11. Charalampakis A. E., Koumousis V. K. 2009. A Bouc–Wen model compatible with plasticity postulates. *Journal of Sound and Vibration*, 322, pp. 954–968.
12. Chtouki, A., Lakrad, F., Belhaq, M. 2020. Quasi-periodic bursters and chaotic dynamics in a shallow arch subject to a fast–slow parametric excitation. *Nonlinear Dynamics*, 99: 283–298. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05082-7>
13. Davino D., Krejčí P., Pimenov A. et al. 2016. Analysis of an operator-differential model for magnetostrictive energy harvesting. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 39: 504–519.
14. De Domenico, D., Quaranta, G., Ricciardi, G., Lacarbonara, W. 2022. Optimum design of tuned mass damper with pinched hysteresis under nonstationary stochastic seismic ground motion. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 170: 108745.
15. Duhem P. 1987. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik. I. *Z. Phys. Chem.* 22: 543–589.
16. Dupre L. R., Van Keer R., Melkebeek J. A. A. 1999. Identification of the relation between the material parameters in the Preisach model and in the Jiles–Atherton hysteresis model. *Journal of Applied Physics*, 85(8): 4376–4378.
17. Kottaria A. K., Charalampakis A. E., Koumousi V. K. 2014. A consistent degrading Bouc–Wen model. *Engineering Structures* 60: 235–240.
18. Formica G., Lacarbonara W. 2020. Asymptotic dynamic modeling and response of hysteretic nanostructured beams. *Nonlinear Dynamics*, 99(1): 227–248.
19. Gavioli C., Krejčí P. 2021. Control and controllability of PDEs with hysteresis. *Applied Mathematics & Optimization*, 84: 829–847.
20. Ikhouane F. 2018. A survey of the hysteretic Duhem model. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 25(4): 965–1002.
21. Ikhouane F., Rodellar J. 2005. On the Hysteretic Bouc–Wen Model. *Nonlinear Dynamics*, 42: 63–78.

22. Korman C.E. Mayergoz I.D. Review of Preisach type models driven by stochastic inputs as a model for after-effect. *Physica B*. 233: 381–389.
23. Kottaria A. K., Charalampakis A. E., Koumoussi V. K. 2014. A consistent degrading Bouc–Wen model. *Engineering Structures* 60: 235–240.
24. Lacarbonara W., Talò M., Carboni B., Lanzara G. Tailoring of Hysteresis Across Different Material Scales. In Collection: M. Belhaq (ed.), *Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics*, Springer Proceedings in Physics 199:227–250. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6_13
25. Lin C.-J., Lin P.-T. 2012. Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model. *Computers and Mathematics with Applications*, 64: 766–787.
26. Mayergoz I. D. 1986. Mathematical models of hysteresis. *Physical Review Letters*, 56(15): 1518–1521.
27. Mayergoz I., Dimian M. 2003. Analysis of spectral noise density of hysteretic systems driven by stochastic processes. *Journal of Applied Physics*, 93(10): 6826–6828.
28. Mayergoz I. D., Dimian M. 2005. Stochastic aspects of hysteresis. *Journal of Physics: Conference Series*, 22: 139–147.
29. Padthe, A.K., Drincic, B., Oh, J. et al. 2008. Duhem modeling of friction-induced hysteresis. *IEEE Control Systems Magazine*, 28: 90–107. DOI: 10.1109/MCS.2008.927331
30. Preisach F. 1935. Über die magnetische Nachwirkung. *Zeitschrift für Physik*. 94(5–6): 277–302.
31. Rachinskii D. 2016. Realization of Arbitrary Hysteresis by a Low-dimensional Gradient Flow. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, 21: 227–243.
32. Rios L.A., Rachinskii D., Cross R. 2017. A model of hysteresis arising from social interaction within a firm. *Journal of Physics: Conference Series*, 811 (1): 012011.
33. Semenov M. E., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. 2020. Stochastic Preisach operator: definition within the design approach. *Nonlinear Dynamics*, 101: 2599–2614. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>
34. Semenov M. E., Meleshenko P. A., Borzunov S. V., Reshetova O. O., Barsukov A. I. 2023. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach. *Micromachines*, 14: 310. <https://doi.org/10.3390/mi14020310>
35. Semenov M. E., Reshetova O. O., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. 2021. Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 230: 3565–3571. <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00237-3>
36. Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Reshetova O. O. 2020. Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 15: 43. <https://doi.org/10.1051/mmnp/2019053>
37. Wen Y. K. 1976. Method of random vibration of hysteretic systems. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 102(2): 249–263.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 03.03.2023

Поступила после рецензирования 14.04.2023

Принята к публикации 18.04.2023

Received 03.03.2023

Revised 14.04.2023

Accepted 18.04.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Борзунов Сергей Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, Воронеж, 394018, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergei Borzunov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russia