Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 2. С. 125–131.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 2. P. 125–131.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.55+517.96
MSC 39A06, 32A10, 39A10, 39A14
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-125-131

Дискретные производящие функции

В. С. Алексеев[1], **С. С. Ахтамова**[2], **А. П. Ляпин**[1]

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

[1] Сибирский федеральный университет,
Красноярск, 660041, Россия

[2] Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета,
Лесосибирск, 662544, Россия

E-mail: ddbnfc@mail.ru, ahtamova-ss@mail.ru, aplyapin@sfu-kras.ru

Аннотация. В данной работе определено понятие дискретной производящей функции, использующее в своем определении убывающий факториал вместо степенной функции. Найдено функциональное соотношение для дискретной производящей функции решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Для дискретной производящей функции решения линейного разностного уравнения с полиномиальными коэффициентами сформулировано понятие D-финитности и доказан аналог теоремы Р. Стенли, а именно, найдено условие D-финитности дискретной производящей функции решения такого уравнения.

Ключевые слова: производящая функция, D-финитность, p-рекурсивность, производящий ряд, правый разностный оператор

Для цитирования: Алексеев В. С., Ахтамова С. С., Ляпин А. П. 2023. Дискретные производящие функции. Прикладная математика & Физика, 55(2): 125–131. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-125-131

Original Research

Discrete Generating Functions

Vitaliy Alekseev[1], **Svetlana Akhtamova**[2], **Alexander Lyapin**[1]

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

[1]Siberian Federal University,
Krasnoyarsk, 660041, Russia

[2]Lesosibirskij Pedagogical Institute — branch of Siberian Federal University,
Lesosibirsk, 662544, Russia

E-mail: ddbnfc@mail.ru, ahtamova-ss@mail.ru, aplyapin@sfu-kras.ru

Abstract. The discrete generating function of one variable is defined as a generalization of discrete hypergeometric functions and some of its properties are investigated. This type of generating series uses a falling power in its definition as opposed to a monomial, and leads to solutions of delay difference equations with polynomial coefficients. In particular, the effect of the operator θ, which is a modification of the forward difference operator Δ, on the discrete generating functions is determined. Functional equations with the operator θ for difference generating functions of solutions to linear difference equations with constant and polynomial coefficients are derived. Finally, an analogue of differentiably finite (D-finite) power series is given for discrete power series and the condition for its D-finiteness is proven: the discrete generating function of $f(x)$ is D-finite if $f(x)$ is a polynomially recursive sequence (an analog of Stanley and Lipshits theorems).

Keywords: Generating Function, D-finitness, p-recursiveness, Generating Series, Forward Difference Operator

For citation: Alekseev Vitaliy, Akhtamova Svetlana, Lyapin Alexander. 2023. Discrete Generating Functions. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 125–131. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-125-131

---

1. Введение. Основные определения и обозначения. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\geqslant}, \mathbb{C}$ – множества натуральных, целых, целых неотрицательных и комплексных чисел соответственно, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $n, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant}$,

$z^{\underline{n}} = z(z-1)\cdots(z-n+1)$ — убывающий факториал, $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ — символ Похгаммера. Обобщенные дискретные гипергеометрические функции были определены в работе [2] как

$${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;t;n;\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\frac{\xi^k t^{\underline{nk}}}{k!}, \quad f(k) = \frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k},$$

где $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,\ldots,p$, $b_j \in \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$, $j = 1,\ldots,q$. Отметим, что различные варианты обобщенных дискретных гипергеометрических функций рассматривались в работах [1, 2, 4, 5, 7].

В данной работе определена дискретная производящая функция для произвольной функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ и получены функциональные соотношения для таких производящих функций.

Определение 1.1. *Дискретной производящей функцией будем называть формальную сумму вида*

$$F(z;\xi;\ell) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}}.$$

Определение 1.2. *Дискретной производящей функцией экспоненциального типа будем называть формальную сумму вида*

$$E(z;\xi;\ell) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f(x)}{x!}\xi^x z^{\underline{\ell x}}.$$

В данной работе ограничимся исследованием только дискретных производящих функций. Например, в уравнении $f(x) - f(x-1) - f(x-2) = 0$ сделаем замену $f(x) = \dfrac{g(x)}{x!}$, тогда

$$\frac{g(x)}{x!} - \frac{g(x-1)}{(x-1)!} - \frac{g(x-2)}{(x-2)!} = 0,$$

после умножения полученного соотношения на $x!$ получим $g(x) - xg(x-1) - x^{\underline{2}}g(x-2) = 0$. Таким образом, вместо дискретной производящей функции экспоненциального типа можно рассматривать дискретную производящую функцию решения уравнения с соответствующими коэффициентами.

Покажем простую связь между производящей функцией и дискретной производящей функцией. Известна общая формула для коэффицентов в разложении

$$z^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} z^i,$$

где

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \frac{(2n-i)!}{(i-1)!}\sum_{t=0}^{n-i}\frac{\sum\limits_{j=0}^{t}\frac{(-1)^j j^{n-i+t}}{j!(t-j)!}}{(n+t)(n-i-t)!(n-i+t)!}$$

есть числа Стирлинга первого рода. Отметим, что при $m > n$ числа Стирлинга равны нолю. Пусть

$$F(z) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)z^x \tag{1}$$

есть производящая функция для последовательности $f(x)$, $x = 0,1,2,\ldots$. Подставим разложение

$$z^{\underline{\ell x}} = \sum_{i=0}^{\ell x}\begin{bmatrix} \ell x \\ i \end{bmatrix} z^i = \sum_{i=0}^{\infty}\begin{bmatrix} \ell x \\ i \end{bmatrix} z^i$$

в дискретную производящую функцию $F(z;\xi;\ell)$, тогда

$$F(z;\xi;\ell) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x \sum_{i=0}^{\infty}\begin{bmatrix} \ell x \\ i \end{bmatrix} z^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x \begin{bmatrix} \ell x \\ i \end{bmatrix}\right) z^i.$$

2. Дискретная производящая функция решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. В этом параграфе приведем определение линейного разностного уравнения с полиномиальными коэффициентами. Для его частного случая – линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами – найдем функциональное соотношение для дискретной производящей функции решения такого уравнения.

Определение 2.1. *Пусть* $\{p_k(x)\}_{k=0}^{r}$ *— набор многочленов, причем* $p_r(x)$ *тождественно не равен нолю. Линейное разностное уравнение с полиномиальными коэффициентами – это соотношение вида*

$$\sum_{k=0}^{r} p_k(x) f(x-k) = 0. \tag{2}$$

Решить уравнение (2) *означает найти функцию* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, *удовлетворяющую соотношению* (2).

В случае, если в уравнении (2) коэффициенты $p_k(x) = c_k, k = 0, \ldots, r,$ — некоторые постоянные, будем говорить о линейных разностных уравнениях с постоянными коэффициентами и записывать (2) как

$$\sum_{k=0}^{r} c_k f(x-k) = 0. \tag{3}$$

Такие уравнения возникают в широком классе задач перечислительного комбинаторного анализа, например, в задачах о решеточных путях (см. [3]) или в баллотировочной задаче (см. пример из [11]), в теории числовых рекурсивых фильтров (см. [6]).

Введем следующие обозначения. Будем рассматривать конечные суммы вида

$$F_r(z;\xi;\ell) = \sum_{x=0}^{r} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}},$$

далее обозначим оператор сдвига $\rho^r z = z - r$. Тогда полиномиальный дискретный оператор сдвига определим как

$$\varrho(z;\xi;\ell;\rho) = \sum_{k=0}^{r} c_k \xi^k z^{\underline{\ell k}} \rho^{\ell k}.$$

Теорема 2.2. *Дискретная производящая функция* $F(z;\xi;\ell)$ *решения разностного уравнения* (3) *удовлетворяет функциональному соотношению*

$$\varrho(z;\xi;\ell;\rho) F(z;\xi;\ell) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k \xi^k z^{\underline{\ell k}} \rho^{\ell k} F_{r-k-1}(z;\xi;\ell).$$

Суммы в правой части данного равенства можно группировать различными способами, различные варианты группировки для более сложного многомерного случая производящей функции были приведены в [8]).

Доказательство. Умножим обе части равенства (3) на $\xi^x z^{\underline{\ell x}}$ и просуммируем по всем $x \geqslant r$:

$$\sum_{x=r}^{\infty} c_0 f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} + \sum_{x=r}^{\infty} c_1 f(x-1)\xi^x z^{\underline{\ell x}} + \cdots + \sum_{x=r}^{\infty} c_r f(x-r)\xi^x z^{\underline{\ell x}} = 0.$$

Изменим индексы суммирования:

$$c_0 \sum_{x=r}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} + c_1 \xi \sum_{x=r-1}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell(x+1)}} + \cdots + c_r \xi^r \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell(x+r)}} = 0.$$

Так как $z^{\underline{n+m}} = z^{\underline{n}}(z-n)^{\underline{m}} = z^{\underline{n}} \rho^n z^{\underline{m}}$, где $\rho^n z = z - n$, получим

$$c_0 \sum_{x=r}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} + c_1 \xi z^{\underline{\ell}} \sum_{x=r-1}^{\infty} f(x)\xi^x (z-l)^{\underline{\ell x}} + \cdots +$$

$$+ c_r \xi^r z^{\underline{\ell r}} \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x (z-\ell r)^{\underline{\ell x}} = 0,$$

$$c_0 \left(F(z;\xi;\ell) - \sum_{x=0}^{r-1} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} \right) + c_1 \xi z^{\underline{\ell}} \rho^{\ell} \left(F(z;\xi;\ell) - \sum_{x=0}^{r-2} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} \right) + \cdots +$$

$$+ c_r \xi^r z^{\underline{\ell r}} \rho^{\ell r} F(z;\xi;\ell) = 0,$$

после перегруппировки получим

$$(c_0 + c_1 \xi z^{\underline{\ell}} \rho^{\ell} + \cdots + c_r \xi^r z^{\underline{\ell r}} \rho^{\ell r}) F(z;\xi;\ell) =$$

$$= c_0 \sum_{x=0}^{r-1} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} + c_1 \xi z^{\underline{\ell}} \rho^{\ell} \sum_{x=0}^{r-2} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} + \cdots + c_{r-1} \xi^{r-1} z^{\underline{\ell(r-1)}} f(0),$$

или

$$\sum_{k=0}^{r} c_k \xi^k z^{\underline{\ell k}} \rho^{\ell k} F(z) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k \xi^k z^{\underline{\ell k}} \rho^{\ell k} \sum_{x=0}^{r-k-1} f(x) \xi^x z^{\underline{\ell x}},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Рассмотрим разностное уравнение с постоянными коэффициентами (уравнение Фибоначчи)

$$f(x) - f(x-1) - f(x-2) = 0,$$

умножим обе его части на $\xi^x z^{\underline{\ell x}}$ и просуммируем по $x \geqslant 2$:

$$\sum_{x=2}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} - \sum_{x=2}^{\infty} f(x-1)\xi^x z^{\underline{\ell x}} - \sum_{x=2}^{\infty} f(x-2)\xi^x z^{\underline{\ell x}} =$$
$$= \big(F(z) - f(0) - f(1)\xi z^{\underline{\ell}}\big) - \sum_{x=1}^{\infty} f(x)\xi^{x+1} z^{\underline{\ell(x+1)}} - \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^{x+2} z^{\underline{\ell(x+2)}} =$$
$$= \big(F(z) - f(0) - f(1)\xi z^{\underline{\ell}}\big) - \xi z^{\underline{\ell}} \sum_{x=1}^{\infty} f(x)\xi^x (z-\ell)^{\underline{\ell x}} - \xi^2 z^{\underline{2\ell}} \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x (z-2\ell)^{\underline{\ell x}} =$$
$$= \left(F(z) - f(0) - f(1)\xi z^{\underline{\ell}}\right) - \xi z^{\underline{\ell}}\left(F(z-\ell) - f(0)\right) - \xi^2 z^{\underline{2\ell}} F(z-2\ell).$$

В результате получим функциональное соотношение для $F(z)$:

$$\left(1 - \xi z^{\underline{\ell}}\rho^{\ell} - \xi^2 z^{\underline{2\ell}}\rho^{2\ell}\right)F(z) = f(0) + (f(1) - f(0))\xi z^{\underline{\ell}}.$$

3. D-финитные дискретные производящие функции. В этом параграфе рассмотрим дискретные производящие функции решений линейных разностых уравнений с полиномиальными коэффициентами и докажем аналог теоремы Р. Стенли — получим условия D-финитности дискретных производящих функций.

Обозначим $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$ – правый разностный оператор, тогда $\Delta z^{\underline{x}} = x z^{\underline{x-1}}$. Следовательно, оператор Δ является дискретным аналогом оператора дифференцирования. Далее,

$$\Delta F(z;\xi;\ell) = \Delta \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} = \sum_{x=0}^{\infty} \ell x f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x - 1}}.$$

Обозначим $\rho F(z) = F(z-1)$ и определим оператор $\theta = \ell^{-1} z \rho \Delta$. Тогда справедлива лемма.

Лемма 3.1. *Для дискретной производящей функции справедливо соотношение*

$$\theta F(z;\xi;\ell) = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}}.$$

Доказательство.

$$\theta F(z;\xi;\ell) = \ell^{-1} z\rho\Delta \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} = \ell^{-1} z\rho \sum_{x=0}^{\infty} \ell x f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x-1}} = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}},$$

что и требовалось доказать.

Для разностного оператора высшего порядка $\theta^n = \underbrace{\theta \circ \cdots \circ \theta}_{n \text{ раз}}$ имеет место следующая лемма.

Лемма 3.2. *Для дискретной производящей функции справедливо соотношение*

$$\theta^n F(z;\xi;\ell) = \sum_{x=0}^{\infty} x^n f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}}.$$

Доказательство. Применим предыдущую лемму n раз к производящему ряду $F(z;\xi;\ell)$ и получим утверждение теоремы.

Лемма 3.3. *Для дискретной производящяей функции справедливо соотношение:*

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) f(x) \xi^x z^{\underline{\ell x}} = p(\theta) \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\underline{\ell x}},$$

где $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ *— многочлен степени* n, $p(\theta) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \ldots + a_n\theta^n$ *— полиномиальный разностный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) f(x) \xi^x z^{\underline{\ell x}} = \sum_{x=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) f(x) \xi^x z^{\underline{\ell x}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{x=0}^{\infty} x^k f(x) \xi^x z^{\underline{\ell x}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \theta^k \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\underline{\ell x}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \theta^k F(z;\xi;\ell) = p(\theta) F(z;\xi;\ell),$$

что и требовалось доказать.

Обозначим

$$\varrho(z;\xi;\ell;\theta;\rho) = \sum_{k=0}^{r} p_k(\theta + k) \xi^k z^{\underline{\ell k}} \rho^{\ell k}.$$

Теорема 3.4. *Дискретная производящая функция* $F(z;\xi;\ell)$ *решения разностного уравнения* (2) *удовлетворяет функциональному соотношению*

$$\varrho(z;\xi;\ell;\theta;\rho) F(z;\xi;\ell) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{x=0}^{r-k-1} p_k(x+k) f(x) \xi^{x+k} z^{\underline{\ell(x+k)}}. \tag{4}$$

Доказательство. Умножим обе части разностного уравнения (2) на $\xi^x z^{\underline{\ell x}}$ и просуммируем по всем целым $x \geqslant r$:

$$\sum_{x=r}^{\infty} \sum_{k=0}^{r} p_k(x) f(x-k) \xi^x z^{\underline{\ell x}} = 0.$$

Изменим индексы суммирования и преобразуем левую часть:

$$\sum_{k=0}^{r} \sum_{x=r-k}^{\infty} p_k(x+k) f(x) \xi^{x+k} z^{\underline{\ell(x+k)}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{r} \xi^k \left(\sum_{x=0}^{\infty} p_k(x+k) f(x) \xi^x z^{\underline{\ell(x+k)}} - \sum_{x=0}^{r-k-1} p_k(x+k) f(x) \xi^x z^{\underline{\ell(x+k)}} \right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{r} \xi^k \left(p_k(\theta+k) z^{\underline{\ell k}} \rho^{\ell k} F(z;\xi;\ell) - \sum_{x=0}^{r-k-1} p_k(x+k) f(x) \xi^x z^{\underline{\ell(x+k)}} \right).$$

В результате,

$$\sum_{k=0}^{r} p_k(\theta+k) \xi^k z^{\underline{\ell k}} \rho^{\ell k} F(z;\xi;\ell) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{x=0}^{r-k-1} p_k(x+k) f(x) \xi^{x+k} z^{\underline{\ell(x+k)}},$$

что и требовалось доказать.

В работе [12] последовательности, удовлетворяющие соотношению (2), называются полиномиально-рекурсивными. В этой же работе определно понятие конечно дифференцируемых (D-финитных) степенных рядов, а именно производящий ряд (1) называется конечно дифференцируемым, если для набора полиномов $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_r(z)$ и $P(z)$, среди которых есть хотя бы один, тождественно не равный нолю, выполянется соотношение

$$\left(P_r(z) \frac{\partial^r}{\partial z^r} + \cdots + P_1(z) \frac{\partial}{\partial z} + P_0(z) \right) F(z) = P(z). \tag{5}$$

Тогда формула (4) будет представлять аналог формулы (5) для случая дискретных производящих функций $F(z;\xi;\ell)$, а сами функции, удовлетворяющие данному соотношению, будем называть конечно дифференцируемыми дискретными производящими функциями. Отметим, что случай D-финитных производящих рядов от нескольких переменных был рассмотрен в работе [9], условия D-финитности производящего ряда от нескольких переменных были приведены в [11], а вопросы D-финитности сечений такого ряда — в работе [10].

Теперь можно сформулировать простое следствие из Теоремы 3.4.

Следствие 3.5. *Дискретная производящая функция $F(z;\xi;\ell)$ полиномиально рекурсивной последовательности $f(x)$ является конечно дифференцируемой.*

Пример 2. Рассмотрим разностное уравнение

$$f(x) - xf(x-1) - x^3 f(x-2) = 0$$

умножим обе его части на $\xi^x z^{\underline{\ell x}}$ и просуммируем по $x \geqslant 2$:

$$\sum_{x=2}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} - \sum_{x=2}^{\infty} x f(x-1)\xi^x z^{\underline{\ell x}} - \sum_{x=2}^{\infty} x^3 f(x-2)\xi^x z^{\underline{\ell x}} = 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=2}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} - \xi\sum_{x=1}^{\infty}(x+1) f(x)\xi^x z^{\underline{\ell(x+1)}} - \xi^2\sum_{x=0}^{\infty}(x+2)^3 f(x)\xi^x z^{\underline{\ell(x+2)}} = \\
&= \left(\sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} - f(0) - f(1)\xi z^{\underline{\ell}}\right) - \xi\left(\sum_{x=0}^{\infty}(x+1) f(x)\xi^x z^{\underline{\ell(x+1)}} - f(0) z^{\underline{\ell}}\right) - \\
&\qquad - \xi^2\sum_{x=0}^{\infty}(x+2)^3 f(x)\xi^x z^{\underline{\ell(x+2)}} = \\
&= \left(F(z;\xi;\ell) - f(0) - f(1)\xi z^{\underline{\ell}}\right) - \xi\left((\theta+1)\sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell(x+1)}} - f(0) z^{\underline{\ell}}\right) - \\
&\qquad - \xi^2(\theta+2)^3\sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell(x+2)}} = \\
&= F(z;\xi;\ell) - f(0) - f(1)\xi z^{\underline{\ell}} - \xi(\theta+1) z^{\underline{\ell}}\rho^{\ell}\sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} + \xi f(0) z^{\underline{\ell}} - \\
&\qquad - \xi^2(\theta+2)^3 z^{\underline{2\ell}}\rho^{2\ell}\sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\underline{\ell x}} = \\
&= \left(1 - \xi(\theta+1) z^{\underline{\ell}}\rho^{\ell} - \xi^2(\theta+2)^3 z^{\underline{2\ell}}\rho^{2\ell}\right) F(z;\xi;\ell) - f(0) - f(1)\xi z^{\underline{\ell}} + \xi f(0) z^{\underline{\ell}}.
\end{aligned}$$

В итоге получим функциональное соотношение

$$\left(1 - (\theta+1)\xi z^{\underline{\ell}}\rho^{\ell} - (\theta+2)^3\xi^2 z^{\underline{2\ell}}\rho^{2\ell}\right) F(z;\xi;\ell) = f(0) + \left(f(1) - f(0)\right)\xi z^{\underline{\ell}}.$$

Благодарность. *Авторы выражают благодарность Т. Кучте за внимание к работе и полезные замечания.*

References

1. Bohner M., Cuchta, T. 2017. The Bessel difference equation. Proc. Am. Math. Soc. 145: 1567–1580. DOI: 10.1090/proc/13416
2. Bohner M., Cuchta T. 2018. The generalized hypergeometric difference equation. Demonstr. Math. 51: 62–75. DOI: 10.1515/dema-2018-0007
3. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. 2000. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. Discrete Mathematics. 2000. 225:51–75. DOI: 10.1016/S0012-365X(00)00147-3
4. Cuchta T., Luketic R. 2021. Discrete Hypergeometric Legendre Polynomials. Mathematics. 9(20): 2546. DOI: 10.3390/math9202546
5. Cuchta T.,Pavelites M., Tinney R. 2021. The Chebyshev Difference Equation. Mathematics 8:74. DOI: 10.3390/math8010074
6. Dudgeon D. E., Mersereau R.M. Multidimensional digital signal processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.
7. Khan M. A. 1994. Discrete hypergeometric functions and their properties. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1, Math. Stat.43(1-2): 31–40. DOI: 10.1501/Commua1_0000000469
8. Leinartas E. K., Lyapin A. P. 2009. On the Rationality of Multidimensional Recursive Series. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2 (4): 449–455.
9. Lipshitz L. 1989. D-Finite Power Series. J. of Algebra. 122: 353–373. DOI: 10.1016/0021-8693(89)90222-6
10. Lyapin A. P., Cuchta T. 2022. Sections of the generating series of a solution to the multidimensional difference equation. Bulletin of Irkutsk State University-Series mathematics. 42: 75–89. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.42.75

11. Nekrasova T. I. 2014. On the Hierarchy of Generating Functions for Solutions of Multidimensional Difference Equations. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 9: 91–102.
12. Stanley R. P. 1980. Differentiably Finite Power Series. Europ. J. Combinatorics. 1: 175–188. DOI: 10.1016/S0195-6698(80)80051-5

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.03.2023
Поступила после рецензирования 29.04.2023
Принята к публикации 03.05.2023

Received 18.03.2023
Revised 29.04.2023
Accepted 03.05.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алексеев Виталий Сегеевич – магистрант Института математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия

Ахтамова Светлана Станиславовна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, информатики, экономики и естествознания, Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета
ул. Победы, 42, Красноярский край, Лесосибирск, 662544, Россия

Ляпин Александр Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент базовой кафедры вычислительных и информационных технологий, Сибирский федеральный университет
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vitaliy Alekseev – Undergraduate, School of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Svetlana Akhtamova – Candidate of Pedagogical Sciences, Assosiate Professor, Lesosibirskij Pedagogical Institute — branch of Siberian Federal University, Lesosibirsk, Russia

Alexander Lyapin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, School of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia