Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 29–38.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 29–38.

УДК 517.9
MSC 35J25
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-29-38

ОБ ИНДЕКСЕ ДЛЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В. А. Полунин[1], **Л. А. Ковалева**[2]

(*Статья представлена членом редакционной коллегии О. В. Черновой*)

[1] Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова,
Белгород, 308012, Россия

[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: polunin@bsu.edu.ru, Kovaleva_L@bsu.edu.ru

Аннотация. В трехмерном пространстве рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения на двумерном комплексе. На границе двумерного комплекса задается условие Дирихле. В рамках теоретико-функционального подхода данная задача сводится к нелокальной краевой задаче Римана. Решение задачи ищется в пространствах Гельдера с весом. В статье доказана фредгольмова разрешимость задачи Дирихле на двумерном комплексе. Вычислен индекс для сформулированной задачи.

Ключевые слова: задача Дирихле, двумерный комплекс, задача Римана, индекс задачи, пространство Гельдера с весом

Для цитирования: Полунин В. А., Ковалева Л. А. 2023. Об индексе для одной краевой задачи. Прикладная математика & Физика, 55(1): 29–38. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-29-38

Original Research

ABOUT THE INDEX FOR ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM

Victor Polunin[1], **Lidiya Kovaleva**[2]

(*Article submitted by a member of the editorial board O. V. Chernova*)

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
Belgorod, 308012, Russia

Belgorod State National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: polunin@bsu.edu.ru, Kovaleva_L@bsu.edu.ru

Abstract. In the 3D space, a boundary value problem for an elliptic equation on a two-dimensional complex is considered. The Dirichlet condition is set on the boundary of a two-dimensional complex. Within the framework of the functional-theoretic approach, this problem is reduced to a non-local Riemann boundary value problem. The solution of the problem is sought in Helder spaces with weight. The Fredholm solvability of the Dirichlet problem on a two-dimensional complex is proved in the article. The index for the formulated problem is calculated.

Keywords: Dirichlet Problem, Two-Dimensional Complex, Riemann Problem, Index of the Problem, Helder Space with Weight

For citation: Kovaleva Lidiya, Polunin Victor. 2023. About the index for one boundary value problem. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 29–38 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-29-38

---

1. Введение. На сегодняшний день задача Дирихле является одной из самых востребованных задач. Она возникает не только на плоскости, но и на многообразиях. Моделируя различные физические процессы, ученые получают набор уравнений с краевыми условиями Дирихле. Так, например, рассматривая колебания мембран, диффузию в неоднородных средах или в среде со сложным геометрическим устройством получается задача Дирихле на многообразиях разной размерности или так называемых стратифицированных множествах. Этим задачам посвящены работы Ю. В. Покорного [4], G. Lumer'a [8], О. М. Пенкина [9] и др.

В работах И. А. Лукьянчук, Ю. Н. Овчинникова [3] сформулирована задача о распределении поля и проводимости многокомпонентной системы, составленной из правильных треугольников. Эта задача может быть исследована в рамках теории, связанной с задачей Римана, описанной в работах Солдатова А. П. [7]. Именно эта задача легла в основу настоящей работы.

2. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим комплекс K, полученный из четырехугольной пирамиды путем выбрасывания основания. Общую вершину всех граней обозначим τ_0, остальные вершины τ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ распределим таким образом, чтобы $M_1 = \{\tau_0\tau_1\tau_2\}, M_2 = \{\tau_0\tau_2\tau_3\}, M_3 = \{\tau_0\tau_3\tau_4\}$ и $M_4 = \{\tau_0\tau_4\tau_1\}$. Множество F_j, $j = 1, 2, 3, 4$ состоит из точек τ, соответствующих вершинам M_j, а их объединение $F = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$. Будем считать, что грани M_1, M_3 и M_2, M_4 попарно имеют равные углы при вершине τ_0, которые обозначим соответственно θ_1 и θ_2. Также нам необходимо обозначить стороны граней, которые в дальнейшем будем называть ребрами комплекса, следующим образом $L_l = \{\tau_0\tau_l\}$, $l = 1, .., 4$, $L_5 = \{\tau_1\tau_2\}$,$L_6 = \{\tau_2\tau_3\}$, $L_7 = \{\tau_3\tau_4\}$ и $L_8 = \{\tau_4\tau_1\}$.

Задача D состоит в определении семейства из четырех гармонических функций $u^j \in C(\overline{M_j} \setminus F_j)$, удовлетворяющих на ребрах L_l, $l = 1, 2, 3, 4$ следующим контактным условиям

$$u^4 = u^1, \;\; \nu_1\frac{\partial u^4}{\partial n} + \nu_2\frac{\partial u^1}{\partial n} = 0 \;\text{ на }\; L_1, \quad u^1 = u^2, \;\; \nu_1\frac{\partial u^1}{\partial n} + \nu_2\frac{\partial u^2}{\partial n} = 0 \;\text{ на }\; L_2,$$

$$u^2 = u^3, \;\; \nu_2\frac{\partial u^2}{\partial n} + \nu_1\frac{\partial u^3}{\partial n} = 0 \;\text{ на }\; L_3, \quad u^3 = u^4, \;\; \nu_1\frac{\partial u^3}{\partial n} + \nu_2\frac{\partial u^4}{\partial n} = 0 \;\text{ на }\; L_4.$$

Здесь n – нормаль, направленная внутрь грани M.

На ребрах L_l, $l = 5, 6, 7, 8$ выполнено условие Дирихле

$$u^j\big|_{L_l} = f_l, \;\; l = 5, 6, 7, 8 \;\; j = 1, 2, 3, 4.$$

Поставленную задачу рассмотрим в весовом классе Гельдера, здесь мы напомним только основные определения, подробно эти классы описаны в [2], [5].

Пространство всех непрерывных функций φ, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем μ, обозначим $C^\mu(\overline{K})$, $0 < \mu < 1$.

Исходя из весовой функции

$$\rho_\lambda(z) = |x - \tau_0|^\lambda \cdots |x - \tau_4|^\lambda, \;\; \lambda = (\lambda_{\tau_j, j=1,\dots,4}, \tau \in F),$$

пространство $C^\mu_\lambda(K; F)$ определяется как класс функций φ, для которых справедливо $\varphi = \rho_{\lambda-\mu}\psi$, $\psi \in C^\mu(K)$, $\psi\big|_F = 0$, где весовой порядок $\lambda - \mu = (\lambda_\tau - \mu, \; \tau \in F)$.

Если $\lambda < 0$, то функции $\varphi \in C^\mu_\lambda$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ и в точках $\tau \in F$ допускают логарифмические особенности.

Если $\lambda > 0$, то функция $\varphi \in C^\mu_\lambda$ удовлетворяет условию Гельдера на K с показателем $\nu = \min(\mu, \lambda_\tau, \tau \in F)$ и обращается в нуль в точках $\tau \in F$.

С возрастанием μ и λ семейство пространств C^μ_λ монотонно убывает в смысле вложений:

$$C^{\mu+\varepsilon}_\lambda \subseteq C^\mu_\lambda, \quad C^\mu_{\lambda+\varepsilon} \subseteq C^\mu_\lambda, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда рассмотрим классы

$$C^\mu_{\lambda+0} = \bigcup_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda+\varepsilon}, \qquad C^\mu_{\lambda-0} = \bigcap_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda-\varepsilon}.$$

При $\lambda = 0$ пространство $C^\mu_{\lambda+0}$ удобно записывать как C^μ_{+0}, и соответственно $C^\mu_{\lambda-0}$ как C^μ_{-0}.

Таким образом, функции $\varphi \in C^\mu_{+0}(K, F)$ удовлетворяют условию Гельдера на всем множестве K с некоторым показателем и обращаются в нуль в точках $\tau \in F$, а класс $C^\mu_{-0}(K, F)$ состоит из всех функций, которые после умножения на весовую функцию ρ_ε с любым $\varepsilon > 0$ принадлежат C^μ_{+0}. В этом смысле данные функции в точках $\tau \in F$ допускают особенности логарифмического характера.

Весовое пространство $C^{1,\mu}_\lambda(K, F)$ дифференцируемых функций φ определяется условиями

$$\varphi \in C^\mu_\lambda(K, F), \quad \varphi'\big|_M = \left(\frac{\partial \varphi_M}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_M}{\partial y}\right) \in C^\mu_{\lambda-1}(M, F), \quad \varphi_M = \varphi\big|_M,$$

здесь φ' обозначает вектор-градиент рассматриваемый по отношению к некоторой декартовой системе координат в плоскости M.

Все перечисленные пространства совершенно аналогично вводятся и для правых частей f в краевом условии Дирихле.

3. Редукция задачи к нелокальной задаче Римана. Эту задачу можно переформулировать по отношению к аналитическим функциям ϕ^j, реальные части которых совпадают с гармоническими функциями u^j. Так как мнимые части функции ϕ^j определены с точностью до константы, с учетом соотношений Коши – Римана предыдущие краевые условия переходят соответственно в

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Re}\,(\phi^1-\phi^2)=0, & \mathrm{Im}\,(\nu_1\phi^1+\nu_2\phi^2)=C_1, & \text{на}\, L_2 \\ \mathrm{Re}\,(\phi^2-\phi^3)=0, & \mathrm{Im}\,(\nu_2\phi^2+\nu_1\phi^3)=C_2, & \text{на}\, L_3 \\ \mathrm{Re}\,(\phi^3-\phi^4)=0, & \mathrm{Im}\,(\nu_1\phi^3+\nu_2\phi^4)=C_3, & \text{на}\, L_4 \\ \mathrm{Re}\,(\phi^4-\phi^1)=0, & \mathrm{Im}\,(\nu_2\phi^4+\nu_1\phi^1)=C_4, & \text{на}\, L_1 \end{array} \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}\,\phi^j\big|_{L_l}=f_l, \quad ,5\le l\le 8, j=1,..4, \tag{2}$$

здесь $C_l, l=1,..4$ некоторые константы.

Введем нумерацию Γ_n ребер комплекса K, учитывая, что каждое ребро $L_l, l=1,..,4$ состоит из двух сторон граней пирамиды M_j, принадлежность ребра к грани укажем верхним индексом. В явном виде эта нумерация выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^4 & L_2^1 & L_2^2 & L_3^2 & L_3^3 & L_4^3 & L_4^4 & L_5^1 & L_6^2 & L_7^3 & L_8^4 \\ \Gamma_1 & \Gamma_3 & \Gamma_5 & \Gamma_7 & \Gamma_2 & \Gamma_4 & \Gamma_6 & \Gamma_8 & \Gamma_9 & \Gamma_{10} & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \end{pmatrix}.$$

Каждую сторону Γ_n, $n=1,..,12$ ориентируем так, чтобы при обходе соответствующей грани M_j, $j=1,..,4$, она оставалась слева.

Выберем гладкие параметризации $\gamma_i:[0,1]\to\Gamma_i$, согласованные с ориентацией дуг Γ_i.

Сужение функции φ^j на отрезок Γ_i, принадлежащий соответствующей грани M_j, дает граничное значение функции φ^j, которое обозначим φ_i^+. Семейство всех граничных значений обозначим $\varphi^+=(\varphi_i^+)_1^{12}$. Тогда с помощью введенных параметризаций семейство φ^+ «снесем» на интервал $(0,1)$ и получим вектор φ_γ^+ с компонентами $\varphi_{\gamma,i}^+=\varphi_i^+\circ\gamma_i$, $1\le i\le 12$. В этих обозначениях краевые условия (1)-(2) запишутся в виде

$$\mathrm{Re}\,a\varphi_\gamma^+=f \tag{3}$$

с блочно диагональной матрицей $a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{C}^{12\times12}$

$$a_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i\nu_1 & -i\nu_2 \end{pmatrix},\quad a_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i\nu_2 & -i\nu_1 \end{pmatrix},$$

$$a_3=1,\in C^{4\times4}.$$

и 12-вектор-функцией f, заданной на интервале $(0,1)$.

Заметим, что в такой постановке задача D относится к типу нелокальных краевых задач Римана, подробно изученных в работах [6], [7].

4. Основные результаты. В настоящей статье основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Неоднородная задача D всегда разрешима в классе C_0^μ, а пространство решений однородной задачи одномерно. Кроме того, если правая часть f принадлежит классу C_{+0}^μ, то ее решение $\phi\in C_{(+0)}^\mu$.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, нам нужно провести дополнительные вычисления, будем следовать схеме исследования краевой задачи, описанной автором в работе [1].

Составим матрицу

$$b=a^{-1}\overline{a}=\mathrm{diag}(b_1,b_2,b_1,b_2,b_3),$$

$$b_2=\tfrac{1}{\nu_1+\nu_2}\begin{pmatrix} -\nu_1+\nu_2 & -2\nu_2 \\ -2\nu_1 & \nu_1-\nu_2 \end{pmatrix},\quad b_1=\tfrac{1}{\nu_1+\nu_2}\begin{pmatrix} \nu_1-\nu_2 & -2\nu_1 \\ -2\nu_2 & -\nu_1+\nu_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$b_3=1\in C^{4\times4}.$$

Рассмотрим пересечение шара $B(\tau,\varepsilon)$, радиусом ε, с каждой гранью M_j комплекса K для всех его вершин. Здесь радиус ε выбран так, чтобы выполнялось $B(\tau_i,\varepsilon)\cap B(\tau_j,\varepsilon)=\emptyset$. В результате получим 12 секторов $S_j(\tau)$, $j=1,2,3,4$, боковые стороны которых обозначим $\partial^\pm S_j(\tau)$, предполагая, что поворот от $\partial^+S_j(\tau)$ к $\partial^-S_j(\tau)$ вокруг вершины τ внутри этого сектора осуществляется против часовой стрелки.

Все 24 боковые стороны секторов занумеруем единым образом $\Gamma_{(j)}$, $j=0,..24$.

Для точки τ_0

$$\begin{pmatrix} \partial^+S_1(\tau_0) & \partial^-S_1(\tau_0) & \partial^+S_2(\tau_0) & \partial^-S_2(\tau_0) & \partial^+S_3(\tau_0) & \partial^-S_3(\tau_0) & \partial^+S_4(\tau_0) & \partial^+S_4(\tau_0) \\ \Gamma_{(2)} & \Gamma_{(7)} & \Gamma_{(8)} & \Gamma_{(4)} & \Gamma_{(3)} & \Gamma_{(6)} & \Gamma_{(5)} & \Gamma_{(1)} \end{pmatrix}$$

Обозначим полученное множество дуг $E_0(\tau_0)=\{\Gamma_{(1)},..,\Gamma_{(8)}\}$.

Для точки τ_1

$$\begin{pmatrix} \partial^+ S_1(\tau_1) & \partial^- S_1(\tau_1) & \partial^+ S_4(\tau_1) & \partial^- S_4(\tau_1) \\ \Gamma_{(11)} & \Gamma_{(9)} & \Gamma_{(10)} & \Gamma_{(12)} \end{pmatrix}, \quad E_1(\tau_1) = \{\Gamma_{(9)}, .., \Gamma_{(12)}\}.$$

Для точки τ_2

$$\begin{pmatrix} \partial^+ S_1(\tau_2) & \partial^- S_1(\tau_2) & \partial^+ S_2(\tau_2) & \partial^- S_2(\tau_2) \\ \Gamma_{(13)} & \Gamma_{(15)} & \Gamma_{(16)} & \Gamma_{(14)} \end{pmatrix}, \quad E_2(\tau_2) = \{\Gamma_{(13)}, .., \Gamma_{(16)}\}.$$

Для точки τ_3

$$\begin{pmatrix} \partial^+ S_2(\tau_3) & \partial^- S_2(\tau_3) & \partial^+ S_3(\tau_3) & \partial^- S_3(\tau_3) \\ \Gamma_{(17)} & \Gamma_{(19)} & \Gamma_{(20)} & \Gamma_{(18)} \end{pmatrix}, \quad E_3(\tau_3) = \{\Gamma_{(17)}, .., \Gamma_{(20)}\}.$$

Для точки τ_4

$$\begin{pmatrix} \partial^+ S_3(\tau_4) & \partial^- S_3(\tau_4) & \partial^+ S_4(\tau_4) & \partial^- S_4(\tau_4) \\ \Gamma_{(21)} & \Gamma_{(23)} & \Gamma_{(24)} & \Gamma_{(22)} \end{pmatrix}, \quad E_4(\tau_4) = \{\Gamma_{(21)}, .., \Gamma_{(24)}\}.$$

Пусть $\theta_j(\tau)$ – раствор сектора $S_j(\tau)$, в дальнейшем будем предполагать, что все они положительны: $0 < \theta_j(\tau) < 2\pi$.

Согласно [1], 24×24 матрица $v(\zeta), \zeta \in C$ состоит из следующих элементов:

$$v_{kr}(\zeta) = \begin{cases} e^{i\theta_j(\tau)}, & \{\Gamma_{(k)}, \Gamma_{(r)}\} = \{\partial^+ S_j(\tau), \partial^- S_j(\tau)\}, \\ \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{5}$$

Эта матрица целиком зависит от геометрии рассматриваемого множества.

Очевидно, что τ является концом отрезка Γ_i, $1 \le i \le 12$ и пересечение шара $B(\tau, \varepsilon)$ с Γ_i дает отрезок $\Gamma_i(\tau)$ с концом τ. Удобно положить

$$\Gamma_i(\tau) = \begin{cases} \Gamma_i^0, & \text{если } \tau \text{ есть левый конец } \Gamma_i, \\ \Gamma_i^1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Согласно [1], введем 24×24 матрицу $\widehat{b}$ с элементами:

$$\widehat{b}_{kr} = \begin{cases} \overline{b_{ij}(0)}, & \text{если} \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^0, \Gamma_{(r)} = \Gamma_j^0, \\ \\ b_{ij}(1), & \text{если} \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^1, \Gamma_{(r)} = \Gamma_j^1, \\ \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим множество пар $P_i(\tau)$, которые образуют угол при вершине τ и составлены из элементов $\{\Gamma_i^k, i = 1, ..12, k = 0, 1\}$:

$$\begin{array}{cccc} P_1(\tau_0) = \{\Gamma_1^0, \Gamma_5^1\}, & P_2(\tau_0) = \{\Gamma_7^0, \Gamma_2^1\}, & P_3(\tau_0) = \{\Gamma_4^0, \Gamma_6^1\}, & P_4(\tau_0) = \{\Gamma_8^0, \Gamma_3^1\}, \\ P_5(\tau_1) = \{\Gamma_9^0, \Gamma_1^1\}, & P_6(\tau_1) = \{\Gamma_3^0, \Gamma_{12}^1\}, & P_7(\tau_2) = \{\Gamma_{10}^0, \Gamma_7^1\}, & P_8(\tau_2) = \{\Gamma_5^0, \Gamma_9^1\}, \\ P_9(\tau_3) = \{\Gamma_2^0, \Gamma_{10}^1\}, & P_{10}(\tau_3) = \{\Gamma_{11}^0, \Gamma_4^1\}, & P_{11}(\tau_4) = \{\Gamma_6^0, \Gamma_{11}^1\}, & P_{12}(\tau_4) = \{\Gamma_{12}^0, \Gamma_8^1\}. \end{array}$$

Заметим, что совокупность $\Gamma_{(j)}$ боковых сторон всех секторов $S_j(\tau), \tau \in F$ совпадает с множеством пар $P_i(\tau) = \{\Gamma_i^k, 1 \le i \le 12, \ k = 0, 1\}$, таким образом имеем:

$$\begin{array}{cc} P_1(\tau_0) = \{\Gamma_{(2)}, \Gamma_{(7)}\}, & P_2(\tau_0) = \{\Gamma_{(8)}, \Gamma_{(4)}\}, \\ P_3(\tau_0) = \{\Gamma_{(3)}, \Gamma_{(6)}\}, & P_4(\tau_0) = \{\Gamma_{(5)}, \Gamma_{(1)}\}, \\ P_5(\tau_1) = \{\Gamma_{(9)}, \Gamma_{(11)}\}, & P_6(\tau_1) = \{\Gamma_{(10)}, \Gamma_{(12)}\}, \\ P_7(\tau_2) = \{\Gamma_{(13)}, \Gamma_{(15)}\}, & P_8(\tau_2) = \{\Gamma_{(14)}, \Gamma_{(16)}\}, \\ P_9(\tau_3) = \{\Gamma_{(17)}, \Gamma_{(19)}\}, & P_{10}(\tau_3) = \{\Gamma_{(18)}, \Gamma_{(20)}\}, \\ P_{11}(\tau_4) = \{\Gamma_{(21)}, \Gamma_{(23)}\}, & P_{12}(\tau_4) = \{\Gamma_{(22)}, \Gamma_{(24)}\}. \end{array}$$

Множества $E_j(\tau)$ можно описать как объединение элементов множества пар $P_i(\tau)$, а именно

$$E_0 = \{P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4\}, \quad E_1 = \{P_5 \cup P_6\}, \quad E_2 = \{P_7 \cup P_8\},$$

$$E_3 = \{P_9 \cup P_{10}\}, \quad E_4 = \{P_{11} \cup P_{12}\}.$$

В общем случае условимся говорить, что 24×24 матрица $x = (x_{kr})_1^{24}$ блочно-диагональна относительно некоторого разбиения $E = (E_i)_1^n$ множества $\{\Gamma_{(1)} ... \Gamma_{(24)}\}$, если ее элементы $x_{kr} = 0$ при $\Gamma_{(k)} \in E_i$, $\Gamma_{(r)} \in E_j$, $i \neq j$. Умножение таких матриц сводится к поблочному умножению их диагональных блоков $x(E_i) = \{x_{kr}, \ \Gamma_{(k)}, \Gamma_{(r)} \in E_i\}$.

Применительно к определениям (5) и (6) можем заключить, что матрица v блочно-диагональна относительно разбиения множества $\{\Gamma_{(1)},\ldots,\Gamma_{(24)}\}$ на пары $P_i(\tau)=\{\partial^+S_j(\tau),\partial^-S_j(\tau)\}$, $j=1,\ldots,4$, $\tau\in F$ с диагональными блоками

$$v(\zeta,P_i(\tau))=e^{i\theta_j\zeta}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Аналогично матрица $\widehat{b}$ блочно-диагональна относительно разбиения на два множества $I^0=\{\Gamma_i^0,1\le i\le 12\}$, $I^1=\{\Gamma_i^1,1\le i\le 12\}$

$$\widehat{b}(I^0)=\overline{b(0)},\quad \widehat{b}(I^1)=b(1).$$

В нашей нумерации матрица $\widehat{b}$ блочно-диагональна относительно разбиения множества $\{\Gamma(1),..,\Gamma_{(24)}\}$ на множества $E_j(\tau)$, которые в свою очередь составлены из элементов множества $P_i(\tau)$.

Поэтому каждая матрица $v(\zeta)$ и $\widehat{b}$ блочно-диагональны относительно разбиения $E_j(\tau)$, а значит этим свойством обладает и их сумма $v(\zeta)+\widehat{b}$.

Согласно [2], матрица-функция $v(\zeta)+\widehat{b}$ называется концевым символом задачи. Мероморфная функция

$$\frac{\det[v(\zeta)+\widehat{b}]}{\det[v(\zeta)+1]}$$

при $\operatorname{Im}\zeta\longrightarrow\pm\infty$, $\operatorname{Re}\zeta=const$ стремится к ненулевым пределам, так что проекция нулей функции $\det[v(\zeta)+\widehat{b}]$ на действительную ось является дискретным множеством. Пусть $\alpha>0$ выбрано столь малым, что эти нули отсутствуют в полосе $-\alpha\le\operatorname{Re}\zeta<0$. Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрица-функция $a(t)\in C^{\mu+0}[0,1]$ и $\det a\ne 0, 0\le t\le 1$. Тогда задача Дирихле фредгольмова в классе C^{μ}_{-0} и ее индекс $æ_\lambda$, при $\lambda=-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ и достаточно мало, вычисляется по формуле*

$$æ_{-\varepsilon}=æ_0+4 \tag{7}$$

где величина

$$æ_0=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\det b(t)\right]\Big|_0^1-\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(v+\widehat{b})(\zeta)}{\det(v+1)(\zeta)}\right]\Big|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}, \tag{8}$$

выражения в квадратных скобках определяются непрерывными ветвями логарифма, а вертикальная черта означает приращение в соответствующих пределах.

В выбранной нумерации матрицы $v(\zeta)$ и b представимы в виде:

$$v(\zeta,E_0)=\begin{pmatrix}0&v_0(\zeta)\\v_0(\zeta)&0\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{8\times8},\ v_0(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_2\zeta}&0&0&0\\0&0&e^{i\theta_1\zeta}&0\\0&e^{i\theta_1\zeta}&0&0\\0&0&0&e^{i\theta_2\zeta}\end{pmatrix};$$
$$\widehat{b}(\zeta,E_0)=\begin{pmatrix}b_1&0&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&b_1&0\\0&0&0&b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{8\times8}. \tag{9}$$

где b_1,b_2 из (4). Диагональные блоки $4\times4-$ для вершин τ_j, $j=\overline{1,4}$ имеют вид

$$v(\zeta,E_j)=\begin{pmatrix}0&v_j(\zeta)\\v_j(\zeta)&0\end{pmatrix},\quad\text{где}$$
$$v_1(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1(\tau_1)\zeta}&0\\0&e^{i\theta_4(\tau_1)\zeta}\end{pmatrix},\quad v_2(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1(\tau_2)\zeta}&0\\0&e^{i\theta_2(\tau_2)\zeta}\end{pmatrix},$$
$$v_3(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_2(\tau_3)\zeta}&0\\0&e^{i\theta_3(\tau_3)\zeta}\end{pmatrix},\quad v_4(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_3(\tau_4)\zeta}&0\\0&e^{i\theta_4(\tau_4)\zeta}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\widehat{b}(E_j)=\begin{pmatrix}b_1&0\\0&1\end{pmatrix},\ j=1,3,\quad \widehat{b}(E_j)=\begin{pmatrix}b_2&0\\0&1\end{pmatrix},\ j=2,4.$$

Согласно теореме 1, характер разрешимости задачи (D) в классе C^{μ}_{-0} определяется нулями определителя $\det\,(v(\zeta)+\hat{b})(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta=0$, причем важную роль играет и порядок полюса точки $\zeta=0$ обратной матрицы- функции $(v+\hat{b})^{-1}$. В силу блочно-диагональной структуры матриц соответствующие свойства достаточно выяснить для их диагональных блоков.

Введем обозначение $z = e^{i\theta_1(\tau)\zeta}$, $y = e^{i\theta_2(\tau)\zeta}$ и $t = \frac{v_1}{v_2}$, тогда

$$\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_0) = \frac{1}{(t+1)^4}\Big(-2(t^2-1)^2y^2z^2(y^2+z^2)+(t+1)^4y^2z^2+4(t^4-10t^2+1)y^2z^2+ (t-1)^4(z^4+y^4)-2(t^2-1)^2(y^2-z^2)+(t+1)^4\Big). \quad (11)$$

Обратная матрица $(v+\widehat{b})^{-1}(\zeta,E_0)$ в явном виде имеет громоздкое представление, поэтому выпишем ее элементы отдельно,

$$(v+\widehat{b})^{-1}(\zeta,E_0) = \frac{1}{(1+t)^3\det(v+\widehat{b})}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix}, \quad A,B\in C^{4\times 4}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & ta_2 & ta_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 \\ a_4 & ta_3 & ta_2 & a_1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_7 & ta_8 & ta_9 & a_{10} \\ a_8 & a_{10} & a_7 & a_9 \\ a_9 & a_7 & a_{10} & a_8 \\ a_{10} & ta_9 & ta_8 & a_7\end{pmatrix}$$

$$a_1 = -(t-1)(z^2-1)((y^2-1)(z^2-1)+t^2(y^2-1)(z^2-1)+2t(1+y^2)(1+z^2))$$

$$a_2 = -2(1+t^2)(y^2-1)(z^2-1)-4t(1+z^2+y^2(1-3z^2))$$

$$a_3 = 2yz((y^2-1)(z^2-1)(1+t^2)+2t(-3+z^2+y^2(1+z^2)))$$

$$a_4 = -8tyz(t-1)(z^2-1)$$

$$a_5 = (t-1)(y^2-1)((y^2-1)(z^2-1)+2t(y^2+1)(z^2+1))$$

$$a_6 = 8tyz(t-1)(y^2-1)$$

$$a_7 = y(-(t^2-1)^2+(t-1)^4y^2-2z^2((t^2-1)^2y^2-t^4+10t^2-1)+$$

$$(1+t)^2z^4(1|y+t(y-1))(t(y+1)+y-1))/(t+1)$$

$$a_8 = 2y(t-1)((y^2-1)(z^2-1)(t^2+1)+2t(1+y^2+(-3+y^2)z^2))/(t+1)$$

$$a_9 = 2z(t-1)(t(6+t)y^2+y^2+(t-2)tz^2+z^2-(t+1)^2y^2z^2-t(t+2)-1)/(t+1)$$

$$a_{10} = -4t((t+1)^2z(1+4tz^2y^2)+(t-1)^2z(y^2=4tz^2))/(t+1)$$

Далее введем обозначение в соответствии с (10), элементы $z_m = (v_{mn})^2$, $m=n, m=1,2$, учитывая соответствие рассматриваемого множества E_j и матрицы $v_j(\zeta)$, тогда

$$\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_1) = \frac{(t+1)(z_1^2z_2^2-1)+(t-1)(z_1^2-z_2^2)}{t+1}, \quad (12)$$

$$(v+\widehat{b})^{-1}(\zeta,E_1) = \frac{1}{(t+1)\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_1)}*$$

$$\begin{pmatrix} -(z_2^2t+z_2^2+t-1) & 2t & (z_2^2t+z_2^2+t-1)z_1 & -2tz_2 \\ 2 & -(z_1^2t+z_1^2-t+1) & -2tz_1 & (z_1^2t+z_1^2-t+1)z_2 \\ (z_2^2t+z_2^2+t-1)z_1 & -2tz_1 & -(z_2^2t-z_2^2+t+1) & 2tz_2z_1 \\ -2z_2 & (z_1^2t+z_1^2-t+1)z_2 & 2z_2z_1 & (z_1^2t-z_1^2-t-1)\end{pmatrix}.$$

Вычисления для множества E_3 дают аналогичные результаты.

Для множества E_2 справедливы следующие равенства:

$$\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_2)=\frac{(t+1)(z_1^2z_2^2-1)+(t-1)(z_1^2-z_2^2)}{t+1},$$

$$(v+\widehat{b})^{-1}(\zeta,E_2)=\frac{1}{(t+1)\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_2)}*$$

$$\begin{pmatrix} -(z_2^2t+z_2^2-t+1) & 2 & (z_2^2t+z_2^2-t+1)z_1 & -2z_2 \\ 2t & -(z_1^2t+z_1^2+t-1) & -2tz_1 & (z_1^2t+z_1^2+t-1)z_2 \\ (z_2^2t+z_2^2-t+1)z_1 & -2z_1 & z_2^2t-z_2^2-t-1 & 2z_2z_1 \\ -2z_2t & (z_1^2t+z_1^2+t-1)z_2 & 2tz_2z_1 & -(z_1^2t-z_1^2+t+1) \end{pmatrix}.$$

Вычисления для множества E_4 дают аналогичные результаты.

Из (9) и (10) следует

$$\det(v+1)(\zeta,E_0)=(y^2-1)^2(z^2-1)^2$$

$$(v+1)^{-1}(\zeta,E_0)=\frac{1}{(1-y^2)(1-z^2)}$$
$$\begin{pmatrix} 1-z^2 & 0 & 0 & 0 & -y(1-z^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z(1-y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-y^2 & 0 & 0 & -z(1-y^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-z^2 & 0 & 0 & 0 & -y(1-z^2) \\ -y(1-z^2) & 0 & 0 & 0 & 1-z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z(1-y^2) & 0 & 0 & (1-y^2) & 0 & 0 \\ 0 & -z(1-y^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y(1-z^2) & 0 & 0 & 0 & 1-z^2 \end{pmatrix},$$

$$\det(v+1)(\zeta,E_j)=(z_1^2-1)(z_2^2-1)$$

$$(v+1)^{-1}(\zeta,E_j)=\frac{1}{\det(v+1)(\zeta,E_j)}\begin{pmatrix} 1-z^2 & 0 & -y(1-z^2) & 0 \\ 0 & 1-y^2 & 0 & -z(1-y^2) \\ -y(1-z^2) & 0 & 1-z^2 & 0 \\ 0 & -z(1-y^2) & 0 & 1-y^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим поведение на мнимой оси функций $\det(v+\hat{b})(\zeta,E_0)$ и $\det(v+\hat{b})(\zeta,E_j)$. Обозначим s порядок нуля функции.

Лемма 1. *Функции* $\det(v+\hat{b})(\zeta,E_0)$ *и* $\det(v+\hat{b})(\zeta,E_j)$, $j=1,\dots,4$ *на мнимой оси имеют единственный нуль в точке* $\xi=0$ *и его порядок равен* $s(E_0)=2$ *и* $s(E_j)=1$.

Доказательство. Согласно (11), определитель матрицы $(v+\widehat{b})(\zeta,E_0)$, который обозначим $f(y,z)$, дается выражением

$$f(y,z)=\frac{1}{(t+1)^4}\Big((-2t^4+4t^2-2)y^2z^4+(-2t^4+4t^2-2)y^4z^2+(t+1)^4y^4z^4+ \\ (4t^4-40t^2+4)y^2z^2+(t-1)^4y^4+(t-1)^4z^4- \\ (2(t-1)^2y^2+2(t-1)^2z^2-(t+1)^2)(t+1)^2\Big). \quad (13)$$

Согласно введенному выше обозначению $z=e^{i\theta_1(\tau)\zeta}, y=e^{i\theta_2(\tau)\zeta}$, очевидно, что функции y и z – вещественны и положительны при $\mathrm{Re}\xi=0$, более того одновременно либо больше 1, либо меньше 1, либо равны 1.

Из (12) видно, что при $y=z=1$ функция обращается в нуль и справедливо соотношение

$$f\Big(\frac{1}{y},\frac{1}{z}\Big)=-\frac{f(y,z)}{yz}.$$

Теперь убедимся, что в квадрате $K=\{0<y,z<1\}$ функция $f(y,z)$ нигде не принимает значения нуль. На границе квадрата функция $f(y,z)$ не положительная и обращается в нуль только в точке $(1,1)$. Градиент функции $\mathrm{grad} f(y,z) \neq 0$, $y, z \in K$, поэтому $f(y,z) < 0$ во всем квадрате. Определим порядок нуля функции $\det(v+\widehat{b})(\zeta, E_0)$ в точке $\xi = 0$. Согласно (13)

$$(1+t)^4[\det(v+\widehat{b})]'(0,E_0) = (-2t^4+4t^2-2)(2i\theta_2+4i\theta_1) + (-2t^4+4t^2-2)(4i\theta_2+2i\theta_1) +$$
$$(t+1)^4(4i\theta_2+4i\theta_1) + (4t^4-40t^2+4)(2i\theta_2+2i\theta_1) + 4(t-1)^4 i\theta_2 + 4(t-1)^4 i\theta_1 -$$
$$2(t+1)^2(2(t-1)^2 i\theta_2 + 2(t-1)^2 i\theta_1) = 0$$

$$(1+t)^4[\det(v+\widehat{b})]''(0,E_0) = 128t(it\theta_2+i\theta_1)(it\theta_1+i\theta_2) \neq 0$$

Следовательно порядок нуля равен $s(E_0) = 2$. Посчитаем порядок нуля для функции $det(v+\hat{b})(\zeta, E_j)$ в точке $\zeta = 0$.

$$(t+1)[\det(v+\hat{b})(0,E_1)]' = 4i(t\theta_1(\tau_1)+\theta_4(\tau_1)) \neq 0.$$

Аналогично, для всех остальных множеств E_j, $j = 2,3,4$ порядок нуля равен $s(E_j) = 1$.

Перейдем к основному результату.

Теорема 2. *Неоднородная задача D всегда разрешима в классе C_0^μ, а пространство решений однородной задачи одномерно. Кроме того, если правая часть f принадлежит классу C_{+0}^μ, то ее решение $\phi \in C_{(+0)}^\mu$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, нам необходимо вычислить индекс задачи $æ_0$. В силу блочно-диагональной структуры матриц $\det(V+\hat{b})(\zeta,E)$ и $\det(V+1)(\zeta,E)$, формулу (8) можно переписать в виде

$$æ_0 = -\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_0)}{\det(v+1)(\zeta,E_0)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} - \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_j)}{\det(v+1)(\zeta,E_j)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}.$$

Согласно принципу аргумента для аналитических функций, имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Bigg|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} - \frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = m, \tag{14}$$

где $m = s - p$.

Заметим, что в нашем случае $h(\zeta)$ представима в виде частного двух функций

$$f(\zeta) = \det(v+\widehat{b})(\zeta,E_0) = f(y,z),$$

$$g(\zeta) = \det(v+1)(\zeta,E_0) = (y^2-1)^2(z^2-1)^2.$$

Исследуем функцию $h(\zeta)$ на четность и нечетность. Очевидно, что

$$f(\frac{1}{y},\frac{1}{z}) = -\frac{1}{yz}f(y,z),$$

$$g(\frac{1}{y},\frac{1}{z}) = \frac{1}{yz}g(y,z).$$

Тогда функция $h(\zeta)$ нечетная и для нее справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = -\frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Bigg|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}.$$

Поставив последнее равенство в (14), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = \frac{m}{2}.$$

Отсюда легко видеть, что первое слагаемое в формуле индекса равно

$$\frac{m}{2} = \frac{2-4-1+1}{2} = -1.$$

Перейдем ко второму слагаемому.

Для множества E_1.

$$f(z_1,z_2) = \det(v+\widehat{b})(\zeta,E_1) = \frac{(t+1)(z_1^2z_2^2-1)+(t-1)(z_1^2z_2^2-1)}{t+1},$$

$$g(z_1,z_2)\det(v+1)(\zeta,E_1) = (z_1^2-1)(z_2^2-1).$$

Проделав исследование, аналогичное вышеуказанному, получим, что функция $h(\zeta) = \frac{f}{g}$ нечетная, и, следовательно,

$$\frac{m}{2} = \frac{1+1-1-2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Нетрудно показать, что для остальных номеров $j = 2, 3, 4$ значение $\frac{m}{2} = -\frac{1}{2}$. Таким образом, индекс задачи

$$æ = 4 - (1 + 4 * \frac{1}{2}) = 1.$$

Для доказательства второго утверждения теоремы вспомним теорему 2, сформулированную в [1], в которой говорится следующее.

Пусть выполнены условия теоремы 1: матрица-функция $\zeta(v+\hat{b})^{-1}(\zeta)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Тогда любое решение $\phi \in C^{\mu}_{-0}$ задачи (3) с правой частью $f \in C^{\mu}_{+0}$ принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}$. В частности, æ является индексом задачи и в классе $C^{\mu}_{(+0)}$.

Докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Обозначим p − порядок полюса функции, считая кратности. Для матриц-функций*

$$(v+\hat{b})^{-1}(\zeta, E_0) \quad и \quad (v+\hat{b})^{-1}(\zeta, E_j),\ j = 1, \ldots, 4$$

в точке $\xi = 0$ *порядок полюса* $p = 1$.

Доказательство. Согласно вычислениям выше, элементы матрицы $(v+1)^{-1}(\zeta, E_0)$ при $\zeta = 0$ обращаются в нуль. А так как $\det(v+\hat{b})(\zeta, E_0)$ имеет нуль второго порядка в точке $\zeta = 0$, то матрица $(v+1)^{-1}(0, E_0)$ имеет полюс первого порядка.

Что касается множеств E_j, $j = 1, \ldots, 4$, то очевидно, что элементы матрицы не обращаются в нуль при $\zeta = 0$, и следовательно, полюс матрицы равен порядку нуля матрицы $det(v+\hat{b})(0, E_j)$, то есть $p = 1$.

Теперь вернемся к рассмотрению выполнения условий теоремы 2 из [1]. Согласно лемме 2, из второго утверждения следует, что матрицы-функции $\zeta(v+\hat{b})^{-1}(\zeta, E_0)$ и $\zeta(v+\hat{b})^{-1}(\zeta, E_j)$, $j = 1, \ldots, 4$ не имеют полюсов на мнимой оси. Следовательно, условия теоремы выполнены. Таким образом, мы получили, что любое решение $\phi \in C^{\mu}_{-0}$ задачи (3) с правой частью $f \in C^{\mu}_{+0}$ принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}$. Индекс рассматриваемой задачи в классе $C^{\mu}_{(+0)}$ равен 1.

Что касается единственности решения задачи, то она следует из принципа максимума.

Список литературы

1. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. 2007. Об одной задаче теории функций. Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук, 9(2): 30–38.

2. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. 2015. Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах. Изв. РАН, сер. Матем., 79(1): 77–114.

3. Овчинников Ю. Н., Лукьянчук И. А. 2002. Проводимость и распределение токов в двухкомпонентной системе состоящей из правильных треугольников. ЖЭТФ, 121(1): 239–252.

4. Покорный Ю. В. 2004. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 272с.

5. Солдатов А. П. 2005. Элементы функционального анализа и теории функций. Изд-во БелГУ, 140 с.

6. Солдатов А. П. 1992. Метод теории функций в эллиптических краевых задачах на плоскости. II. Кусочно-гладкий случай. Изв. АН СССР, 56(3): 566–604.

7. Солдатов А. П. 1998. Обобщенная задача Римана на римановой поверхности. Докл. РАН, 362(6): 735–738.

8. Lumer G. 1980. Espases ramifes et diffusion sur les reseaux topologiques. C. R. Acad. Sc. Paris. Serie A. 291: 219–234.

9. Penkin O. M. 2004. Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks. J. Math. Sci. (N. Y.). 119(6): 836–867.

References

1. Kovaleva L. A., Soldatov A. P. 2007. Ob odnoj zadache teorii funkcij [About a problem in the theory of functions]. Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) mezhdunarodnoj akademii nauk 9(2): 30–38.

2. Kovaleva L. A., Soldatov A. P. 2015.The dirichlet problem on two-dimensional stratified sets. Izv. RAN, Mathematics. 79(1): 77–114 (in Russian).

3. Ovchinnikov Yu. N., Luk'yanchuk I. A. 2002. Provodimost' i raspredelenie tokov v dvukhkomponentnoi sisteme sostoyashchei iz pravil'nykh treugol'nikov [Conductivity and current distribution in a two-component system consisting of regular triangles]. ZhETF, 121(1): 239–252.

4. Pokorny Yu. V. 2004. Differentsial'nyye uravneniya na geometricheskikh grafakh [Differential equations on geometric graphs] M.: Fizmatlit, 272 s.

5. Soldatov A. P. 2005. Elementy funktsional'nogo analiza i teorii funktsii [Elements of functional analysis and theory of functions]. Izd-vo BelGU, 140 s.

6. Soldatov A. P. 1992. Metod teopii funktsii v ellipt. kpaevykh zadachakh na ploskosti. II. Kusochno-gladkii sluchai Izv. AH SSSR [A method of the theory of functions in an ellipt. boundary value problems on the plane. II. Piecewise smooth case]. Izv. AN USSR. 56(3): 566–604.

7. Soldatov A. P. 1998. Obobshchennaya zadacha Rimana na rimanovoi poverkhnosti [Generalized Riemann problem on a Riemann surface]. Dokl. RAH. 362(6): 735–738.

8. Lumer G. 1980. Espases ramifes et diffusion sur les reseaux topologiques. C. R. Acad. Sc. Paris. Serie A. 291: 219–234.

9. Penkin O. M. 2004. Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks. J. Math. Sci. (N. Y.). 119(6): 836–867.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.11.2022
Поступила после рецензирования 05.01.2023
Принята к публикации 09.01.2023

Received 21.11.2022
Revised 05.01.2023
Accepted 09.01.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Полунин Виктор Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики института экономики и менеджмента Белгородского государственного технологического университета имени В. Г. Шухова

ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Victor Polunin – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of of Higher Mathematics, Institute of Economics and Management, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Lidiya Kovaleva – PhD , Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling of the Institute of Engineering and Digital Technologies of the Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia