

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 530.182
MSC 37N05, 37N20
краткое сообщение

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПОЗИТРОНОВ ВБЛИЗИ НАПРАВЛЕНИЯ [111] КРИСТАЛЛА КРЕМНИЯ

А. Ю. Исупов¹ , В. В. Сыщенко² , А. С. Парахин² 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

¹ Лаборатория физики высоких энергий имени В. И. Векслера и А. М. Балдина
Международная межправительственная организация
Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна, 141980, Россия

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: syshch@yandex.ru

Аннотация. Движение быстрой заряженной частицы в кристалле под малым углом к одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей с хорошей точностью описывается как движение в непрерывных потенциалах параллельных атомных цепочек, при котором сохраняется параллельная оси цепочки компонента импульса частицы. При этом финитное движение частицы в поперечной плоскости называется аксиальным каналированием. Известно, что такое движение может быть как регулярным (устойчивым), так и хаотическим (неустойчивым), в зависимости от наличия либо отсутствия второго (наряду с энергией поперечного движения) интеграла движения. В поле уединенной цепочки таким интегралом движения является проекция момента импульса частицы на ось цепочки. В отсутствие аксиальной симметрии потенциала наличие либо отсутствие второго интеграла движения можно определить методом сечений Пуанкаре. В статье исследуется характер движения позитрона, движущегося в режиме аксиального каналирования в направлении [111] кристалла кремния.

Ключевые слова: каналирование, быстрые частицы, высокие энергии, хаос, регулярная динамика, сечение Пуанкаре, кремний

Для цитирования: Исупов А. Ю., Сыщенко В. В., Парахин А. С. 2023. Об устойчивости движения позитронов вблизи направления [111] кристалла кремния. Прикладная математика & Физика, 55(1): 49–56.

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56

Short Message

ON THE STABILITY OF THE POSITRON'S MOTION NEAR $\langle 111 \rangle$ DIRECTION OF THE SILICON CRYSTAL

Alexander Isupov¹ , Vladislav Syshchenko² , Alexander Parakhin² 

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

¹ Laboratory of High Energy Physics named after V. I. Veksler and A. M. Baldina
International intergovernmental organization
Joint Institute for Nuclear Research,
Dubna, 141980 Russia

² Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: syshch@yandex.ru

Abstract. The fast charged particle's motion in the crystal under small angle to one of the crystallographic axes densely packed with atoms can be described with high accuracy as the motion in the uniform potentials of the parallel atomic strings that conserves the particle's momentum component parallel to the string axis. The finite motion in the transverse plane in this case is called as the axial channeling. This motion can be both regular (stable) and chaotic (unstable), depending on the presence or

absence of the second (in addition to the transverse motion energy) integral of motion. The motion in the axially symmetrical field of the single atomic string conserves the particle's angular momentum projection on the string axis, so the problem has two integrals of motion and hence the particle's motion is regular, periodic or quasiperiodic. The presence or absence of the second integral of motion in the absence of the potential's axial symmetry can be found using the Poincaré sections method. This paper studies the character of motion of the positron channeling in the $[111]$ direction of the Silicon crystal.

Keywords: Channeling, Fast Particles, High Energy, Chaosy, Regular Dynamics, Poincaré Section, Silicon

For citation: Isupov Alexander, Syshchenko Vladislav, Parakhin Alexander. 2023. On the stability of the positron's motion near $[111]$ direction of the Silicon crystal. *Applied Mathematics & Physics*, 55(1): 49–56. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56

1. Введение. Быстрая заряженная частица, движущаяся в кристалле вблизи одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей или плоскостей, может захватываться в образованную этими осями или плоскостями потенциальную яму, совершая финитное движение в плоскости, перпендикулярной соответствующей оси (плоскости) и аномально глубоко проникая в кристалл. Такое явление называется, соответственно, аксиальным или плоскостным каналированием. Оно было предсказано на основе численного моделирования в [16]; последующие теоретические и экспериментальные исследования отражены в многочисленных монографиях и обзорах (см., например, [1, 2, 13, 22]). Движение частицы в режиме аксиального каналирования с хорошей точностью может быть описано как движение в непрерывном потенциале атомной цепочки, то есть в потенциале, усредненном вдоль оси цепочки [6]. В таком потенциале сохраняется продольная компонента импульса частицы p_{\parallel} , и задача о движении частицы сводится к двумерной задаче о движении в поперечной плоскости. Характер динамики (регулярная либо хаотическая) в этом случае особенно удобно и наглядно исследовать с помощью метода сечений Пуанкаре. Знание характера движения каналированной частицы (регулярное либо хаотическое) важно во многих задачах при выборе приближенных аналитических методов их решения, в частности, при исследовании испускаемого такой частицей излучения [1] и управления пучками частиц с помощью прямых и изогнутых кристаллов [2].

2. Каналирование положительно заряженных частиц в направлении $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния. Классическое уравнение движения релятивистской частицы можно преобразовать к виду [1, 5]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{c^2}{E} \left(\mathbf{F} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \right), \quad (1)$$

где $E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ – энергия релятивистской частицы, \mathbf{F} – сумма действующих на частицу сил; в дальнейшем мы будем пренебрегать излучением заряженной частицей электромагнитных волн и связанной с этим силой лучистого трения.

При движении частицы под малым углом $\psi \ll 1$ к оси атомной цепочки (так что $|v_{\perp}| \ll v_{\parallel} \approx c$) и сохранении продольной оси цепочки компоненты импульса в непрерывном потенциале цепочки U_s уравнение движения в поперечной плоскости с хорошей точностью можно записать в виде

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} \approx \frac{c^2}{E_{\parallel}} \mathbf{F} = -\frac{c^2}{E_{\parallel}} \nabla U_s. \quad (2)$$

Мы видим, что это уравнение аналогично двумерному уравнению движения нерелятивистской частицы с точностью до замены

$$m \rightarrow \frac{E_{\parallel}}{c^2}, \quad (3)$$

где $E_{\parallel} = \sqrt{m^2 c^4 + p_{\parallel}^2 c^2} = \text{const} \approx E$.

Отсюда сразу видно, что при движении частицы в непрерывном потенциале цепочки будет сохраняться величина

$$E_{\perp} = \frac{E_{\parallel}}{c^2} \frac{v_{\perp}^2(0)}{2} + U_s(x_i, y_i) \quad (4)$$

(где $v_{\perp}(0) = v\psi$ – поперечная частицы электрона на входе в кристалл, x_i, y_i – координаты точки входа в кристалл), которую называют энергией поперечного движения [1, 2, 22, 8].

Непрерывный потенциал уединенной атомной цепочки может быть описан простой модификацией потенциала Линдхарда [1]

$$U^{(1)}(x, y) = U_0 \ln \left[1 + \frac{\beta R^2}{x^2 + y^2 + \alpha R^2} \right], \quad (5)$$

где в случае цепочки $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния $U_0 = 58.8$ эВ, $\alpha = 0.37$, $\beta = 2.0$, $R = 0.194 \text{ \AA}$ (радиус Томаса–Ферми). Такие цепочки образуют в поперечной им плоскости (111) гексагональную центрированную

решетку. Для электронов потенциал (5) является притягивающим, поэтому каналирование электрона будет происходить в потенциале одной цепочки, слабо возмущенной потенциалами шести ближайших соседей, то есть поле будет обладать осью симметрии шестого порядка. Иная ситуация возникает при движении в кристалле положительно заряженной частицы, например, позитрона или протона (в дальнейшем, для определенности, мы будем говорить о позитроне). Для них потенциалы отдельных цепочек будут отталкивающими, однако между тремя ближайшими соседними цепочками (чьи оси расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = a_z/\sqrt{6} \approx 2.217 \text{ \AA}$, где a_z — основной период кристалла кремния, то есть период цепочки $\langle 100 \rangle$) возникает небольшая потенциальная ямка с осью симметрии третьего порядка, в которой возможно финитное в поперечной плоскости движение частицы. Таким образом, потенциальная энергия позитрона в поле трех ближайших атомных цепочек будет описываться формулой

$$U_s^{(+)}(x, y) = U^{(1)}(x, y - a/\sqrt{3}) + U^{(1)}(x + a/2, y + a/2\sqrt{3}) + U^{(1)}(x - a/2, y + a/2\sqrt{3}) - 7.8571 \text{ eV}, \quad (6)$$

где константа выбрана таким образом, чтобы потенциал в центре треугольника был равен нулю. Глубина центральной ямки (или высота седловой точки потенциала) составляет приблизительно

$$U_0 = 0.3276 \text{ эВ}. \quad (7)$$

Интегрирование уравнения движения (2) с потенциалом (6) возможно только численно; нами использован для этой цели так называемый алгоритм Верле в скоростной форме (velocity Verlet algorithm) [3].

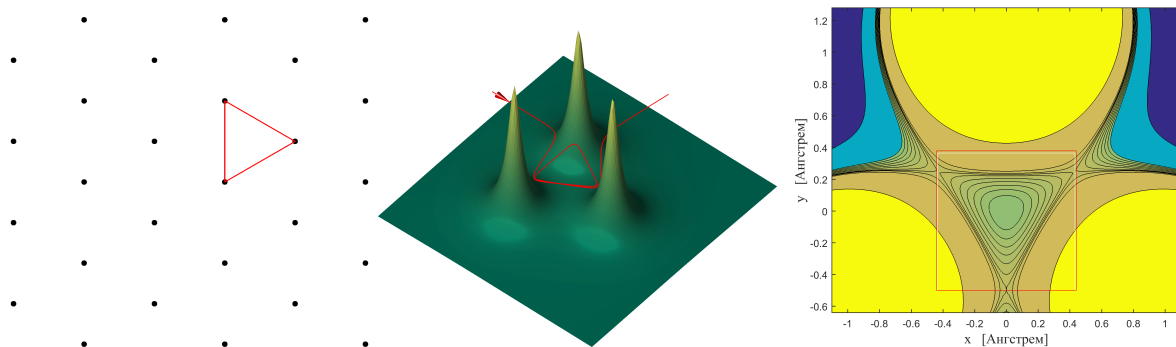


Рис. 1. Слева: проекция решетки кристалла типа алмаза на плоскость (111). В центре: Потенциал (6) и пример инфинитной траектории, возникающей, когда энергия поперечного движения E_{\perp} немного превышает величину (7). Справа: линии уровня потенциала (6); вблизи начала координат видна потенциальная ямка

Fig. 1. Left: Rojection of the dimond-like lattice on the (111) plane. Center: The potential (6) and the sample infinite trajectory that arizes while the transverse motion energy E_{\perp} slightly exceeds the value (7). Right: equipotentials of (6); the small potential pit is seen near the origin of coordinates

3. Регулярное и хаотическое движение каналированных позитронов. Движение частицы в заданном внешнем поле может быть как регулярным, так и хаотическим [1, 7, 14]. Оказывается, что характер динамики частицы тесно связан с интегрируемостью уравнения движения в квадратурах, а последнее, в свою очередь, связано с количеством интегралов движения рассматриваемой системы. Уравнение движения инегрируемо, если число интегралов движения совпадает с числом степеней свободы системы. В частности, регулярным оказывается движение частицы в центральном поле. В этом случае, помимо энергии, сохраняющейся величиной является момент импульса частицы относительно центра поля. Таким образом, задача о движении в центральном поле оказывается двумерной задачей с двумя интегралами движения. Как следствие, динамика частицы оказывается регулярной и, если говорить о финитном движении, то оно будет периодическим (в исключительных случаях) или квазипериодическим, когда траектория частицы не замыкается, а всюду плотно покрывает разрешенную для движения область [4].

Аналогичным образом, регулярный характер будет носить движение частицы в непрерывном потенциале уединенной атомной цепочки (5): движение в поперечной плоскости двумерно и обладает двумя интегралами движения: энергией поперечного движения (4) и проекцией момента импульса частицы на ось цепочки.

Иная ситуация имеет место в отсутствие аксиальной симметрии потенциала, например, в потенциале (6), когда сохранение момента импульса не имеет места. В общем случае движение может носить как регулярный, так и хаотический характер. Выяснить наличие либо отсутствие второго (наряду с энергией поперечного движения) интеграла движения можно с помощью метода сечений Пуанкаре [1, 7, 14]. Напомним, в чем он состоит.

Наличие одного интеграла движения — энергии поперечного движения — означает, что фазовая траектория лежит на трёхмерной гиперповерхности

$$\text{const} = E_{\perp} = E_{\perp}(x, p_x, y, p_y).$$

Рассмотрим точки пересечения траектории с осью y (что соответствует точкам пересечения фазовой траектории с плоскостью (y, p_y)), то есть положим $x = 0$. Тогда, если существует второй интеграл движения

$$J = J(x, p_x, y, p_y),$$

то, исключая p_x из уравнений

$$E_{\perp} = E_{\perp}(0, p_x, y, p_y),$$

$$J = J(0, p_x, y, p_y),$$

получаем, что точки пересечения фазовой траектории с секущей плоскостью будут удовлетворять уравнению

$$y = y(p_y; E_{\perp}, J),$$

представляющему собой уравнение некоторой кривой в плоскости (y, p_y) . Таким образом, если мы численно интегрируем двумерное уравнение движения (2) при заданной энергии поперечного движения, то, если точки пересечения фазовой траектории с плоскостью (y, p_y) лежат на какой-то линии в этой плоскости (как на рис. 2 (a, b, c)), то, значит, второй интеграл движения существует. В противном случае все точки будут случайным образом лежать в некоторой области (рис. 2 (d)).

На рис. 2 (a, b, c) представлены типичные регулярные траектории финитного поперечного движения позитрона в потенциале (6) и соответствующие им сечения Пуанкаре, а на рис. 2 (d) — хаотическая траектория. Траектории найдены для позитрона с энергией $E_{\parallel} = 1$ ГэВ, причем энергия поперечного движения выбрана равной $E_{\perp} = 0.1839$ эВ. Такой выбор E_{\perp} обусловлен тем обстоятельством, что это энергия единственного связанного состояния поперечного движения позитрона с таким значением E_{\parallel} в потенциальной яме (6), возникающим при квантовом описании такого движения. Мы видим, что при данном значении энергии поперечного движения в фазовом пространстве каналирующего позитрона сосуществуют области регулярного и хаотического движения, причем движение оказывается регулярным для подавляющего большинства начальных условий.

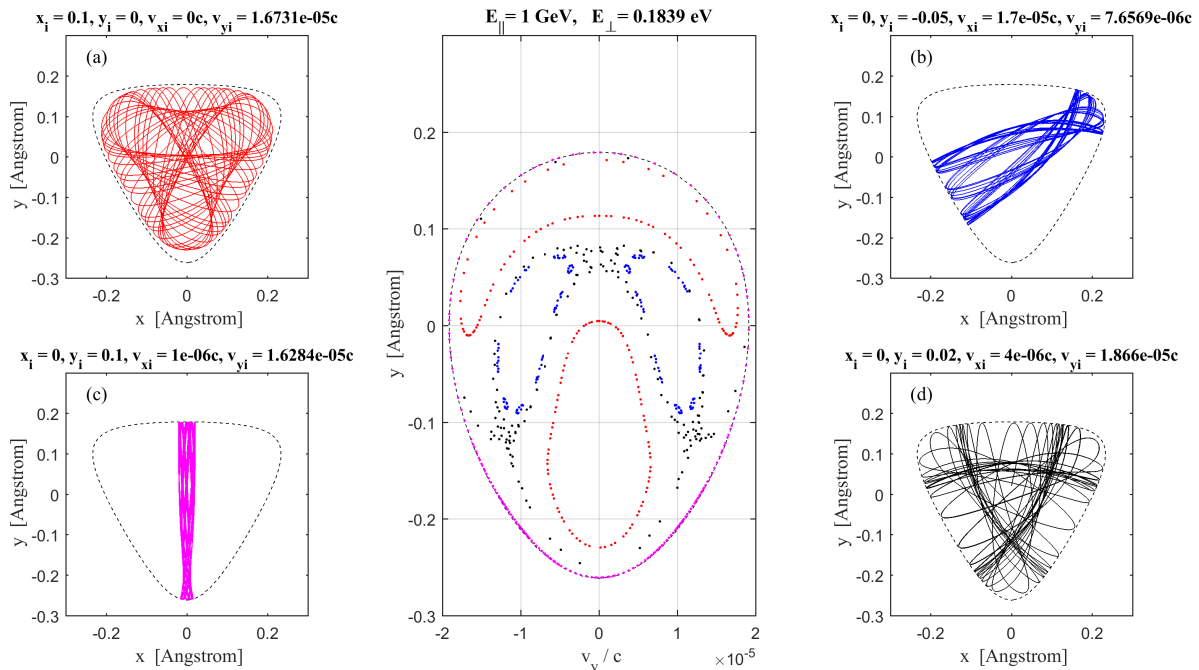


Рис. 2. Примеры траекторий и соответствующие им сечения Пуанкаре для поперечного движения позитрона в потенциале (6). $E_{\parallel} = 1$ ГэВ, $E_{\perp} = 0.1839$ эВ

Fig. 2. Sample trajectories of the positron's motion in the potential (6) and the corresponding Poincaré sections. $E_{\parallel} = 1$ GeV, $E_{\perp} = 0.1839$ eV

С ростом величины E_{\parallel} количество уровней в потенциальной яме будет возрастать, как это следует из квазиклассических соображений в квантовой механике, причем в двумерном случае число уровней в яме возрастает пропорционально первой степени E_{\parallel} (см., например, [1]). Поэтому более интересная

ситуация возникает уже в случае каналирования позитрона с энергией $E_{\parallel} = 1.5$ ГэВ. В этом случае решение уравнения Шрёдингера с потенциалом (6) предсказывает существование двух уровней энергии финитного поперечного движения: $E_{\perp} = 0.1503$ эВ и $E_{\perp} = 0.2928$ эВ. Результаты построения сечений Пуанкаре, представленные на рис. 3, показывают, что на нижнем уровне энергии классическая динамика системы будет полностью регулярной, а на верхнем — хаотической для подавляющей части начальных условий.

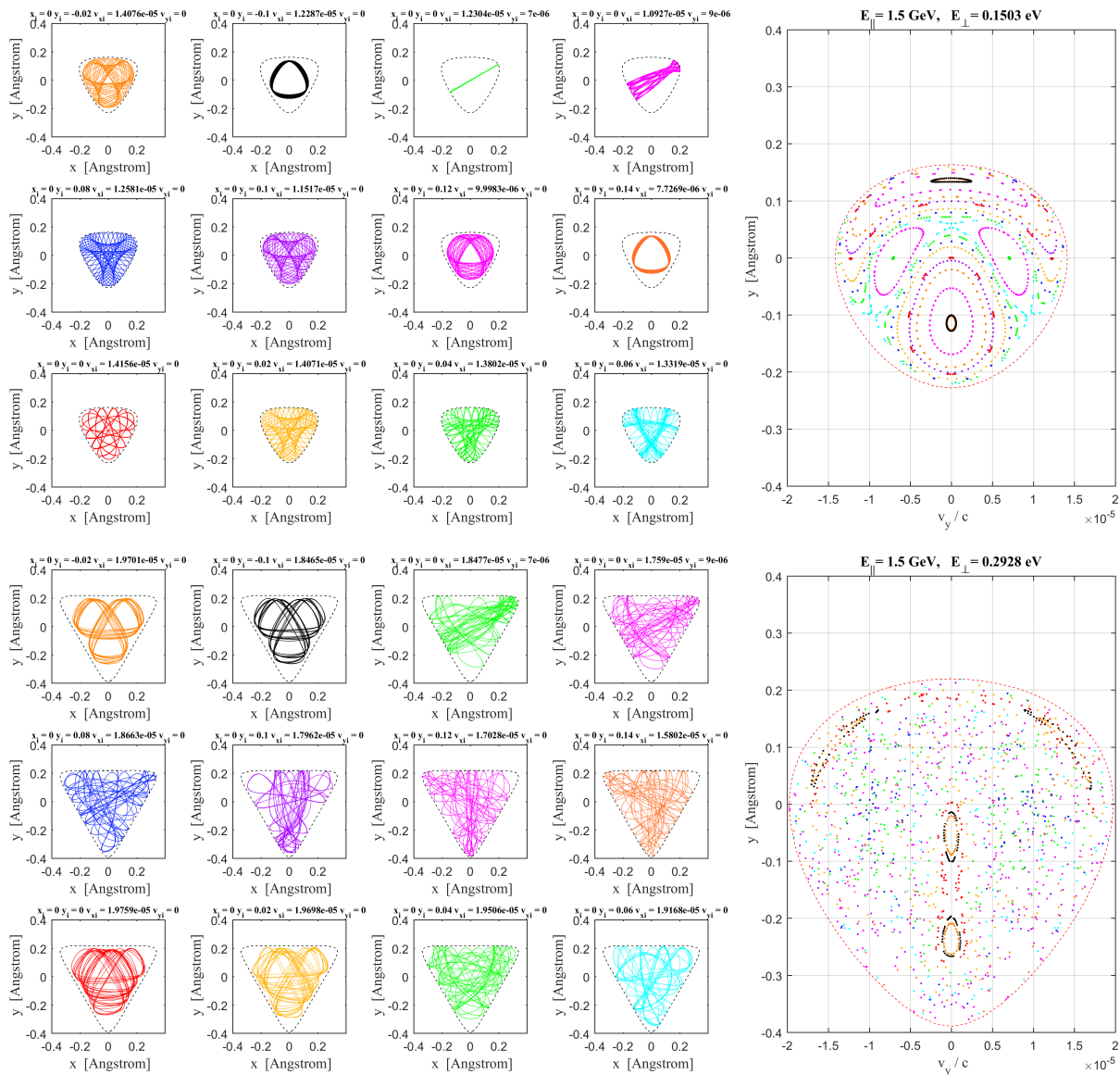


Рис. 3. Примеры траекторий и соответствующие им сечения Пуанкаре для поперечного движения позитрона в потенциале (6). $E_{\parallel} = 1.5$ ГэВ, $E_{\perp} = 0.1503$ эВ (верхняя панель) и $E_{\perp} = 0.2928$ эВ (нижняя панель)

Fig. 3. Sample trajectories of the positron's motion in the potential (6) and the corresponding Poincaré sections. $E_{\parallel} = 1.5$ GeV, $E_{\perp} = 0.1503$ eV (upper panel) and $E_{\perp} = 0.2928$ eV (lower panel)

По мере дальнейшего увеличения E_{\parallel} уровни энергии будут все плотнее заполнять всю глубину потенциальной ямы, и мы увидим как случаи полностью регулярного движения вблизи дна ямы, так и случаи полного хаоса вблизи верха ямы и случаи сосуществования в фазовом пространстве значительных областей регулярной и хаотической динамики.

4. Заключение. В статье в рамках классической механики исследована динамика положительно заряженной частицы в потенциальной яме, образованной непрерывными потенциалами трех соседних атомных цепочек $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния. Потенциальная яма в этом случае обладает симметрией равностороннего треугольника, подобно потенциалу Хенона – Хейлса [15], рассмотренного в одной из пионерских работ, посвященных проблематике динамического хаоса. И хотя аналогия рассмотренного здесь случая со случаем [15] отмечалась еще в обзоре [2], исследование устойчивости движения положительно заряженной частицы в потенциальной ямке вблизи направления $\langle 111 \rangle$ кристалла типа алмаза ранее проведено не было.

Установлено, что вблизи дна потенциальной ямы движение частицы является полностью регулярным. По мере увеличения энергии поперечного движения частицы в ее фазовом пространстве появляется область хаотической динамики. Вблизи верхнего края потенциальной ямы (точнее, вблизи седловой точки потенциала (6)) динамика частицы постепенно становится полностью хаотической.

Эти результаты будут использованы в дальнейшем при исследовании квантового хаоса в данной системе. Проблематика квантового хаоса (см., например, [7, 14]) означает поиск отличий в поведении квантовых систем, чей классический аналог обладает хаотической динамикой, от поведения систем, чей классический аналог обладает регулярной динамикой. Проявления квантового хаоса в аксиальном каналировании электронов в кристалле кремния в направлении $\langle 110 \rangle$ исследовались ранее в работах [10, 12, 17, 18], при каналировании электронов в направлении $\langle 100 \rangle$ — в работах [9, 19, 20], при каналировании позитронов в направлении $\langle 100 \rangle$ — в работах [20, 11, 21].

Список литературы

1. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. 1993. Электродинамика высоких энергий в веществе. М., Наука, 344.
2. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Гриненко А. А., Сыщенко В. В. 1995. Динамика заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах. УФН, 165 (10): 1165–1192. DOI: 10.3367/UFNr.0165.199510c.1165
3. Гулд Х., Тобочник Я. 1990. Компьютерное моделирование в физике. Часть 1. М., Мир, 349.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1988. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М., Наука, 216.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1988. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М., Наука, 512.
6. Линдхард Й. 1969. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц. УФН, 99: 249–296. DOI: 10.3367/UFNr.0099.196910c.0249
7. Райхл Л. Е. 2008. Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 756.
8. Сыщенко В. В., Сыщенко В. Г. 2022. Теория твердого тела для начинающих. М.–Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 260.
9. Сыщенко В. В., Тарновский А. И., Исупов А. Ю., Соловьев И. И. 2020. Структура областей регулярного движения в фазовом пространстве каналированных электронов. Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед., 3: 103–108. DOI: 10.31857/S1028096020030188
10. Сыщенко В. В., Тарновский А. И. 2021. Статистические свойства уровней энергии поперечного движения при каналировании электронов в кристалле кремния. Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед., 7: 84–88. DOI: 10.31857/S1028096021070207
11. Сыщенко В. В., Тарновский А. И., Дроник В. И., Исупов А. Ю. 2022. Расщепление уровней энергии поперечного движения позитронов при каналировании в направлении $[100]$ кристалла кремния. Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед., 3: 79–88. DOI: 10.31857/S1028096022030207
12. Шульга Н. Ф., Сыщенко В. В., Тарновский А. И., Исупов А. Ю. 2015. Проявления квантового хаоса в аксиальном каналировании электронов. Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед., 7: 72–76. DOI: 10.7868/S0207352815070197
13. Gemmel D. S. 1974. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals, Rev. Mod. Phys. 46 (1): 129–227. DOI: 10.1103/RevModPhys.46.129
14. Gutzwiller M.C. 1990. Chaos in Classical and Quantum Mechanics, New York, Springer-Verlag, 432.
15. Hénon M., Heiles C. 1964. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. Astronomical Journal, 69: 73. DOI: 10.1086/109234
16. Robinson M. T., Oen O. S. 1963. Computer Studies of the Slowing Down of Energetic Atoms in Crystals. Phys. Rev., 132 (6): 2385–2398. DOI: 0.1103/PhysRev.132.2385
17. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2016. Structure of the channeling electrons wave functions under dynamical chaos conditions. Nuclear Instrum. Methods B., 370: 1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.nimb.2015.12.040

18. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2016. Wave functions of channeling electrons in regular and chaotic cases. *Journal of Physics: Conference Series*, 732: 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012028
19. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Solovyev I. I., Isupov A. Yu. 2018. Positrons vs electrons channeling in silicon crystal: energy levels, wave functions and quantum chaos manifestations. *Journal of Instrumentation*, 13: C01017. DOI: 10.1088/1748-0221/13/01/C01017
20. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I., Isupov A. Yu. 2019. Regular and chaotic motion domains in the channeling electron's phase space and mean level density for its transverse motion energy. *Journal of Instrumentation*, 14: C12022. DOI: 10.1088/1748-0221/14/12/C12022
21. Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I. 2022. Channeling in crystals and quantum chaos. Partial differential equations and related topics (PDERT'22): collection of materials of the International Conference. Belgorod, Publishing house "BelSU" NRU "BelSU": 188–190.
22. Uggerhøj U. I. 2005. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields, *Rev. Mod. Phys.*, 77(4): 1131–1171. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.1131

References

1. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F. 1996. *High-Energy Electrodynamics in Matter*. Gordon and Breach, 400 (in Russian).
2. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F., Truten' V. I., Grinenko A. A., Syshchenko V. V. 1995. Dynamics of high-energy charged particles in straight and bent crystals. *Physics-Uspekhi*, 38: 1119–1145. DOI: 10.1070/PU1995v038n10ABEH000114 (in Russian).
3. Gould H., Tobochnik J., Christian W. 2006. *An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems* (third edition). San Francisco, M., Addison Wesley, 796.
4. Landau L. D., Lifshitz E. M. 1969. *Mechanics*, Vol. 1 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 165.
5. Landau L. D., Lifshitz E. M. 1971. *The Classical Theory of Fields*, Vol. 2 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 374.
6. Lindhard J. 1965. Influence of Crystal Lattice on Motion of Energetic Charged Particles. *Kongel. Dan. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd*, 34 (14): 1–64.
7. Reichl L. E. 2004. *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations*, 2nd ed. Springer, New York, 675.
8. Syshchenko V. V., Syshchenko V. G. 2022. *Teoriya tvyordogo tela dlya nachinayushchih* [Solid state theory for beginners]. M.–Izhevsk, *Regularnaya i haoticheskaya dinamika Publ.*, 260.
9. Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu., Solovyev I. I. 2020. Structure of Regions of Regular Motion in the Phase Space of Channeled Electrons. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 14 (2): 306–311. DOI: 10.1134/S1027451020020354 (in Russian).
10. Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I. 2021. Statistical Properties of the Transverse-Motion Energy Levels for Channeling Electrons in a Silicon Crystal under Dynamical Chaos Conditions. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 15 (7): 84–88. DOI: 10.1134/S1027451021040200 (in Russian).
11. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I., Isupov A. Yu. 2021. Splitting of the Transverse-Motion Energy Levels of Positrons during Channeling in the [100] Direction of a Silicon Crystal. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 15, Suppl. 1: 79–88. DOI: 10.1134/S1027451022020203
12. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2015. Quantum Chaos Effects in the Axial Channeling of Electrons. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 9 (4): 721–725. DOI: 10.7868/S0207352815070197
13. Gemmel D. S. 1974. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals, *Rev. Mod. Phys.* 46 (1): 129–227. DOI: 10.1103/RevModPhys.46.129

14. Gutzwiller M. C. 1990. Chaos in Classical and Quantum Mechanics, New York, Springer-Verlag, 432.
15. Hénon M., Heiles C. 1964. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. *Astronomical Journal*, 69: 73. DOI: 10.1086/109234
16. Robinson M. T., Oen O. S. 1963. Computer Studies of the Slowing Down of Energetic Atoms in Crystals. *Phys. Rev.*, 132(6): 2385–2398. DOI: 0.1103/PhysRev.132.2385
17. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2016. Structure of the channeling electrons wave functions under dynamical chaos conditions. *Nuclear Instrum. Methods B.*, 370: 1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.nimb.2015.12.040
18. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2016. Wave functions of channeling electrons in regular and chaotic cases. *Journal of Physics: Conference Series*, 732: 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012028
19. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Solovyev I. I., Isupov A. Yu. 2018. Positrons vs electrons channeling in silicon crystal: energy levels, wave functions and quantum chaos manifestations. *Journal of Instrumentation*, 13: C01017. DOI: 10.1088/1748-0221/13/01/C01017
20. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I., Isupov A. Yu. 2019. Regular and chaotic motion domains in the channeling electron's phase space and mean level density for its transverse motion energy. *Journal of Instrumentation*, 14: C12022. DOI: 10.1088/1748-0221/14/12/C12022
21. Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I. 2022. Channeling in crystals and quantum chaos. Partial differential equations and related topics (PDERT'22): collection of materials of the International Conference. Belgorod, Publishing house "BelSU" NRU "BelSU": 188–190.
22. Uggerhøj U. I. 2005. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields, *Rev. Mod. Phys.*, 77(4): 1131–1171. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.1131

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 19.09.2022

Поступила после рецензирования 02.11.2022

Принята к публикации 05.11.2022

Received 19.09.2022

Revised 02.11.2022

Accepted 05.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Исупов Александр Юрьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории физики высоких энергий Лаборатории физики высоких энергий имени В. И. Векслера и А. М. Балдина, Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований

ул. Академика Балдина, 4, Дубна, 141980, Россия

Сыщенко Владислав Вячеславович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Парахин Александр Сергеевич – студент выпускного курса магистратуры института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander Isupov – PhD in Physics and Mathematics, leading research associate of the Laboratory of High Energy Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

Vladislav Syshchenko – PhD in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Alexander Parakhin – graduate student at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia