Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 1. С. 5–12.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 1. P. 5–12.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.92 DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-5-12
MSC 37G40, 34C23
Оригинальное исследование

О бифуркациях сепаратрисных контуров векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией

Ройтенберг В. Ш.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. Н. Куликовым*)

Ярославский государственный технический университет,
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский проспект, 88
vroitenberg@mailru

Аннотация. Рассматривается типичное двухпараметрическое семейство векторных полей на плоскости с симметрией относительно оси x. Предполагается, что при нулевых значениях параметров векторное поле имеет лежащие на оси x седло-узел с отрицательным собственным значением матрицы линейной части и грубое седло, а также два симметричных контура, образованные выходящими сепаратрисами седла, совпадающими со входящими сепаратрисами седло-узла. Описана бифуркационная диаграмма такого семейства – разбиение окрестности нуля на плоскости параметров по типам фазовых портретов в окрестности объединения указанных контуров. В частности показано, что из каждого контура может родиться по одному устойчивому грубому предельному циклу.

Ключевые слова: векторное поле на плоскости, динамическая система, седло-узел, седло, сепаратрисный контур, предельный цикл, бифуркационная диаграмма

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. 2024. О бифуркациях сепаратрисных контуров векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 5–12.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-5-12

Original Research

On Bifurcation of Separatrix Contours of Planar Vector Fieds with Involutive Symmetry

Vladimir Sh. Roitenberg
(*Article submitted by a member of the editorial board A. N. Kulikov)*

Yaroslavl State Technical University,
88 Moscow Avenu, Yaroslavl, 150023, Russia
vroitenberg@mail.ru

Abstract. We consider a two-parameter family of vector fields in the plane with symmetry about the x-axis. It is assumed that at zero values of the parameters, the vector field has a saddle-node with a negative eigenvalue of the matrix of the linear part of the field and a rough saddle lying on the x-axis, as well as two symmetric contours formed by the outgoing separatrices of the saddle, coinciding with the incoming separatrices of the saddle-node. A bifurcation diagram of such a family is described – a partition of the neighborhood of zero on the parameter plane by types of phase portraits in a neighborhood of the union of these contours. In particular, it is shown that one stable rough limit cycle can be born from each contour.

Keywords: Planar Vector Field, Dynamical System, Saddle-node, Saddle, Separatrix Contour, Limit Cycle, Bifurcation Diagram

For citation: Roitenberg V. Sh. 2024. On Bifurcation of Separatrix Contours of Planar Vector Fieds with Involutive Symmetry. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 5–12. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-5-12

---

1. Введение. Изучение динамических систем с различного рода симметрией интересно с теоретической точки зрения и полезно для приложений. Имеется ряд работ, в которых рассматриваются бифуркации динамических систем с симметрией, как двумерных, так и многомерных [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Традиционный интерес представляют бифуркации, при которых рождаются устойчивые предельные циклы, поскольку в прикладных задачах они моделируют автоколебания. В основном изучались бифуркации положений равновесия и замкнутых траекторий. Описание бифуркаций сепаратрисных контуров в типичных однопараметрических семействах динамических систем на плоскости, допускающих простейшие группы симметрий, в большинстве случаев можно извлечь из описания бифуркаций в типичных двухпараметрических семействах динамических систем без симметрии, хорошо изученных к настоящему времени (см. например, [10, 11]). Однако для двухпараметрических семейств систем с симметрией такой подход невозможен, поскольку описание нетривиальных нелокальных бифуркаций в семействах динамических систем с числом параметров больших двух неизвестно. Некоторые двухпараметрические бифуркации изучались в [5, 8] для систем на плоскости с центральной симметрией. Однако естественно рассматривать нелокальные бифуркации и для систем с другими симметриями.

Пусть $R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ – инволюция $R(x_1,x_2):=(x_1,-x_2)$, D – замкнутая область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, $R(D)=D$. Обозначим $\mathfrak{X}^r(D)$ – банахово пространство C^r-векторных полей с C^r-нормой ($r\geq 3$) [12], а $\mathfrak{X}^r_R(D)$ – его подпространство, состоящее из векторных полей $X:D\to TD=\mathbb{R}^2$, инвариантных относительно инволюции R, то есть таких, что $X\circ R=R\circ X$.

Пусть $X_\varepsilon(x_1,x_2)=P_1(x_1,x_2,\varepsilon)\partial/\partial x_1+P_2(x_1,x_2,\varepsilon)\partial/\partial x_2$ – семейство векторных полей из $\mathfrak{X}^r_R(D)$, C^r-гладко зависящих от точки (x_1,x_2) и параметра $\varepsilon\in\mathbb{R}^2$. Вследствие симметрии $P_1(x_1,-x_2,\varepsilon)=P_1(x_1,x_2,\varepsilon)$, $P_2(x_1,-x_2,\varepsilon)=-P_2(x_1,x_2,\varepsilon)$, а множество неподвижных точек инволюции R, прямая $F:x_2=0$, инвариантно для всех полей семейства и разбивает D на инвариантные множества $D_+=\{(x_1,x_2)\in D:x_2>0\}$ и $D_-=\{(x_1,x_2)\in D:x_2<0\}$.

Локальные бифуркации в типичных семействах таких векторных полей изучены Х. Жолондеком в [2]. Мы опишем некоторые нелокальные бифуркации.

Предположим, что поле X_0 удовлетворяет следующим условиям.

Условия (А). *Поле X_0 имеет особую точку $S_1^0=(s_1^0,0)$ – седло-узел и особую точку $S_2^0=(s_2^0,0)$ – грубое седло, $s_1^0<s_2^0$. Открытая дуга $(S_1^0S_2^0)$ прямой F между точками S_1^0 и S_2^0 является выходящей сепаратрисой седло-узла и входящей сепаратрисой седла. Выходящая сепаратриса седла L_+^0 (L_-^0) принадлежит $\mathrm{int}D_+$ ($\mathrm{int}D_-$) и совпадает с входящей сепаратрисой седло-узла.*

Будем исследовать бифуркации полицикла Γ^0, полученного объединением двух симметричных сепаратрисных контуров $\Gamma_\pm^0:=L_\pm^0\cup(S_1^0S_2^0)\cup\{S_1^0,S_2^0\}$. Векторные поля X_0, удовлетворяющие условиям (А), образуют в пространстве $\mathfrak{X}^r_R(D)$ C^{r-2}-подмногообразия коразмерности два. Поэтому естественно рассматривать их бифуркации в двухпараметрических семействах X_ε «общего положения». В пространстве $\mathfrak{X}^r(D)$ эти векторные поля имеют более высокую коразмерность и их бифуркации в $\mathfrak{X}^r(D)$ следует изучать в семействах векторных полей с большим числом параметров. Однако бифуркации сепаратрисных контуров рассматриваемого вида в семействах векторных полей из $\mathfrak{X}^r(D)$ с числом параметров ≥ 3 не исследовались.

2. Условие типичности. Формулировка результатов. Вследствие симметрии поля X_0 относительно оси x_1 $\left(\partial P_i(s_k^0,0,0)/\partial x_j\right)=diag(\lambda_{k1}^0,\lambda_{k2}^0)$. Ввиду условий (А) $\lambda_{21}^0<0$, $\lambda_{22}^0>0$.

Так как S_1^0 – седло-узел, а поле симметрично, то ограничение поля на его инвариантное многообразие F имеет вид $(bx_1^2+o(x_1^2))\partial/\partial x_1$, где $b\neq 0$. Ввиду условий (А) $\lambda_{11}^0<0$, $b>0$. Из параграфов 5.1 в [13] и 11.2 в [11] следует, что в окрестности точки S_1^0 существует такая C^r-замена координат $x_1=g_1(x,y,\varepsilon)$, $x_2=g_2(x,y,\varepsilon)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon\in(-\delta_*,\delta_*)^2$, $g_1(0,0,0)=s_1^0$, $\mathrm{sgn}g_2(x,y,\varepsilon)=\mathrm{sgn}y$, что в координатах x,y линия F задается уравнением $y=0$, причем при $\varepsilon=0$ точки F с координатой $x>0$ лежат на дуге $(S_1^0S_2^0)$, а векторное поле X_ε имеет вид

$$P(x,\varepsilon)\partial/\partial x+(\lambda_{12}^0+r_2(x,y,\varepsilon))y\,\partial/\partial y, \tag{1}$$

где

$$P(x,\varepsilon)=a(\varepsilon)+(b+r_1(x,\varepsilon))x^2,\quad a\in C^1,\quad a(0)=0,\quad r_1,r_2\in C,\quad r_1(0,0)=r_2(0,0,0)=0. \tag{2}$$

Обозначим l_ε^2 дугу, задаваемую условиями $y=d$, $-d<x<d$, и параметризованную параметром x. Ввиду (1), (2) и условий (А) сепаратриса L_+^0 трансверсально пересекает дугу l_0^2 в точке с параметром $x=0$. При ε, достаточно близких к нулю, поле X_ε имеет седло $S_2(\varepsilon)\in F$, выходящая сепаратриса которого, лежащая в D_+, пересекает дугу l_ε^2 в точке с параметром $x=\hat{x}(\varepsilon)$, где $\hat{x}(\cdot)\in C^1$, $\hat{x}(0)=0$.

Пусть теперь выполняется и

Условие (Б). *Производные $\partial a(0)/\partial\varepsilon$ и $\partial\hat{x}(0)/\partial\varepsilon$ – линейно независимы, то есть*

$$\begin{vmatrix}\partial a(0)/\partial\varepsilon_1 & \partial a(0)/\partial\varepsilon_2\\ \partial\hat{x}(0)/\partial\varepsilon_1 & \partial\hat{x}(0)/\partial\varepsilon_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

Это условие не зависит от произвола в выборе координат x,y и числа d. Можно показать, что условие (Б) означает трансверсальность отображения $\varepsilon\mapsto X_\varepsilon$ в точке $\varepsilon=0$ подмногообразию $\mathfrak{X}^r_R(D)$, задаваемому условиями (А).

Сделав замену параметров $\bar{\varepsilon}_1=a(\varepsilon)$, $\bar{\varepsilon}_2=\hat{x}(\varepsilon)$ и вернувшись к их прежним обозначениям, мы можем считать

$$a(\varepsilon)=\varepsilon_1,\quad \hat{x}(\varepsilon)=\varepsilon_2. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть выполняются условия (А) и (Б). Тогда существуют число $\delta > 0$, окрестность U полицикла Γ^0, $R(U) = U$, и разбиение области параметров $\mathrm{E} = (-\delta, \delta)^2$ на множества (рис. 1)*

$\mathrm{B}_0 = \{(0,0)\}$, $\mathrm{B}_1 = \{0\} \times (0, \delta)$, $\mathrm{B}_3 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, $\mathrm{B}_2 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 = \beta(\varepsilon_2)\}$,

где $\beta : (0, \delta) \to (-\delta, 0)$, $\beta \in C^1$, $\beta(+0) = \beta'(+0) = 0$,

$\mathrm{E}_1 = (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$, $\mathrm{E}_2 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 \in (0, \delta),\ \beta(\varepsilon_2) < \varepsilon_1 < 0\}$,

$\mathrm{E}_3 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) :\ \varepsilon_2 \in (0, \delta),\ -\delta < \varepsilon_1 < \beta(\varepsilon_2)\} \cup (-\delta, 0) \times (-\delta, 0]$,

такие, что поле X_ε, $\varepsilon \in \mathrm{E}$, имеет в U только следующие особые точки:

седло $S_2(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in \mathrm{E}$, седло-узел $S(\varepsilon) \in F$ при $\varepsilon \in \mathrm{B}_0 \cup \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_3$, грубое седло $S_R(\varepsilon) \in F$ и грубый узел $S_L(\varepsilon) \in F$ при $\varepsilon \in \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{E}_2$

и следующие нетривиальные неблуждающие множества:

два симметричных грубых устойчивых предельных цикла при $\varepsilon \in \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{E}_2$, два симметричных устойчивых контура, образованных сепаратрисами седел S_1^0 (соотв. $O_R(\varepsilon)$)) и $O_2(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ (соотв. $\varepsilon \in \mathrm{B}_2$).

Доказательство теоремы приведено в разделах 3–5. В силу симметрии векторных полей X_ε, достаточно описать поведение их траекторий в окрестности контура Γ_+^0 в $\overline{D}_+$.

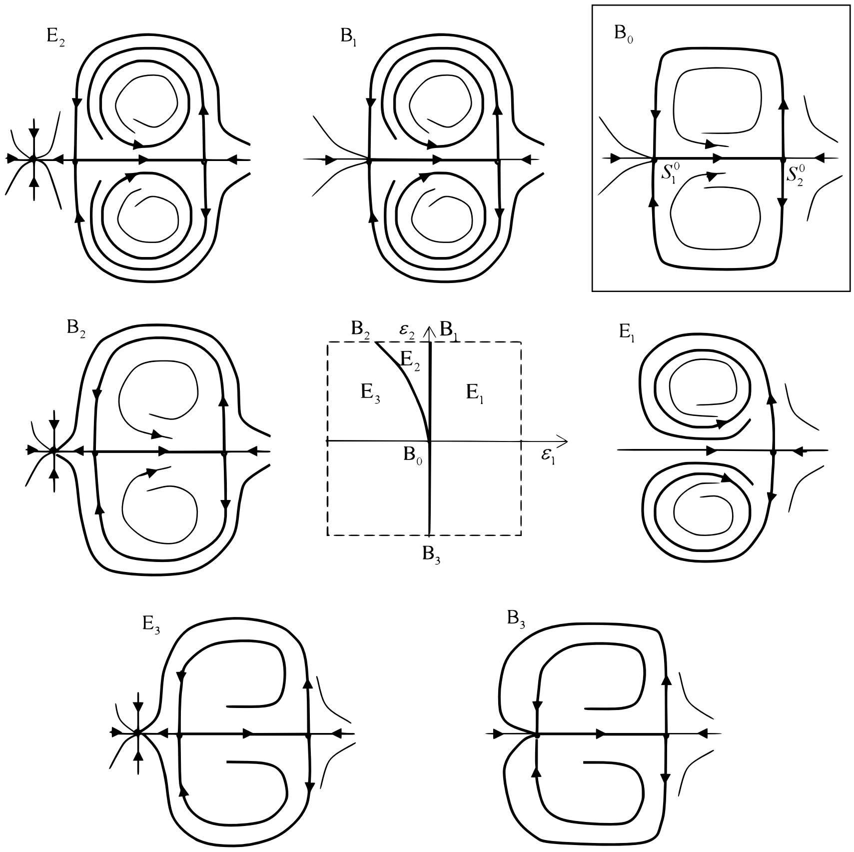

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма
Fig. 1. Bifurcation diagram

3. Отображения соответствия по траекториям. Функция последования. Зададим число α, удовлетворяющее неравенствам

$$0 < \alpha < 1/10;\ \ 10\alpha < -\lambda_{21}^0/\lambda_{22}^0. \tag{4}$$

Пусть D_ε^1, $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$, – область в D, задаваемая в координатах x, y неравенствами $|x| < 2d$, $|y| < 2d$, где $d > 0$ и $\delta' > 0$ выбраны столь малыми, чтобы в D_ε^1 выполнялось неравенство

$$|div\, X_\varepsilon(x_1, x_2) - div\, X_0(s_1^0, 0)| \ = |div\, X_\varepsilon(x_1, x_2)\ - \lambda_{11}^0| \ < \ \alpha|\lambda_{11}^0|, \tag{5}$$

$$\lambda_{12}^0 + r_2(x, y, \varepsilon) > (1 + \alpha)\lambda_{12}^0. \tag{6}$$

Вследствие (2) и (3) при достаточно малом $\delta_1 \in (0, \delta')$ уравнение $P(x, \varepsilon) = 0$ на интервале $(-d, d)$ имеет при $\varepsilon \in (-\delta_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1)$ корни $x = x_R\left(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2\right) \geq 0$ и $x = x_L\left(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2\right) \leq 0$, где x_R и x_L – C^1-функции на $(-\delta_1, \delta_1)^2$, для которых

$$x_R(0, \varepsilon_2) = x_L(0, \varepsilon_2) = 0,\ \ (x_R)'_\mu(\mu, \varepsilon_2)\left.\right|_{\mu=\varepsilon_2=0} \ = -(x_L)'_\mu(\mu, \varepsilon_2)\left.\right|_{\mu=\varepsilon_2=0} \ = 1/\sqrt{b} > 0, \tag{7}$$

а при $\varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$ не имеет корней. Если δ_1 достаточно мало, то поле X_ε имеет в D^1_ε две особых точки, принадлежащие F: грубое седло $S_R(\varepsilon)$ с координатой $x = x_R\left(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2\right) > 0$ и грубый узел $S_L(\varepsilon)$ с координатой $x = x_L\left(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2\right) < 0$, если $\varepsilon \in (-\delta_1, 0) \times (-\delta_1, \delta_1)$, седло-узел $S(\varepsilon)$ с координатой $x = 0$, если $\varepsilon \in \{0\} \times (-\delta_1, \delta_1)$, и не имеет особых точек, если $\varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$. Пусть

$$x_+(\varepsilon) := x_R\left(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2\right) \text{ при } \varepsilon \in (-\delta_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1) \text{ и } x_+(\varepsilon) := -d \text{ при } \varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1). \tag{8}$$

Обозначим l^1_ε открытую дугу в D^1_ε, задаваемую в координатах x, y условиями $x = d$, $-d < y < d$ и параметризованную параметром y (рис. 2). Дуга l^2_ε, заданная условиями $y = d$, $-d < x < d$, уже была введена выше. Вследствие (1), (6), (8) и неравенства $P(x, \varepsilon) > 0$ для $x > x_+(\varepsilon)$ отрицательная полутраектория поля X_ε, начинающаяся в точке $A_1 \in l^1_\varepsilon$ с параметром $u > 0$, задается в G^1_ε уравнением $x = X(y, u, \varepsilon)$, $y \in [u, 2d)$, где X – C^{r-1}-функция, пересекает дугу l^2_ε в точке с параметром $x = \varphi_1(u, \varepsilon) = X(d, u, \varepsilon)$ (см. рис. 2), а время перехода по траекториям поля от точки A_2 до точки A_1

$$T_1(u, \varepsilon) = -\int\limits_u^d \frac{dy}{(\lambda^0_{12} + r_2(X(y, u, \varepsilon), y, \varepsilon))y} \geq \frac{1}{(1+\alpha)\lambda^0_{12}}(\ln u - \ln d). \tag{9}$$

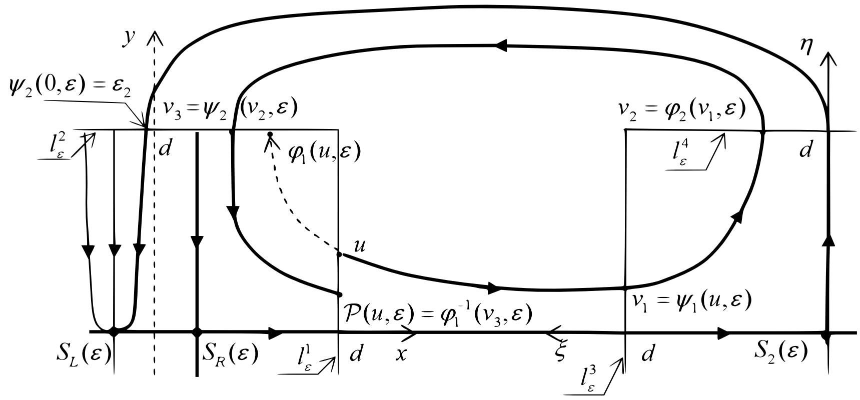

Рис. 2. Функции соответствия. Функция последования
Fig. 2. Matching functions. Poincare mapping

Мы можем считать, что при выбранном δ' локальные устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия седла $S_2(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$ задаются, соответственно, уравнениями $x_2 = 0$ и $x_1 = w(x_2, \varepsilon)$, где $w(\cdot, \cdot) \in C^r$, $w(-x_2, \varepsilon) = w(x_2, \varepsilon)$, $w(0, 0) = s^0_2$. Сделаем C^r-замену координат $\xi = w(x_2, \varepsilon) - x_1$, $\eta = x_2$, выпрямляющую неустойчивое инвариантное многообразие. В новых координатах поле X_ε имеет вид

$$X_\varepsilon = (\lambda^0_{21} + q_1(\xi, \eta, \varepsilon))\, \xi\, \partial/\partial\xi + (\lambda^0_{22} + q_2(\xi, \eta, \varepsilon))\, \eta\, \partial/\partial\eta, \tag{10}$$

где $\lambda^0_{21} < 0$, $\lambda^0_{22} > 0$, q_k – непрерывные функции, $q_k(0, 0, 0) = 0$, $k = 1, 2$, причем при $\varepsilon = 0$ точки с координатами $\eta = 0$, $\xi > 0$ лежат на дуге $(S^0_1 S^0_2)$.

Пусть D^2_ε – область в D, задаваемая в выбранных координатах ξ, η в окрестности точки $S_2(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$, неравенствами $|\xi| < 2d$, $|\eta| < 2d$, где d и δ' можно считать теми же, что были выбраны для области D^1_ε и столь малыми, что для $(x_1, x_2) \in D^2_\varepsilon$, $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$

$$|div\, X_\varepsilon(x_1, x_2) - div\, X_0(s^0_2, 0)| \; = |div\, X_\varepsilon(x_1, x_2) - (\lambda^0_{21} + \lambda^0_{22})| \; < \alpha\, |\lambda^0_{21} + \lambda^0_{22}|, \tag{11}$$

$$|q_k(x, y, \varepsilon)| \;\leq\; \alpha|\lambda^0_{2k}| \text{ при } |x| < 2d,\;\; |y| < 2d,\;\; \varepsilon \in (-\delta', \delta')^2,\;\; k = 1, 2. \tag{12}$$

Обозначим l^3_ε (соотв. l^4_ε) открытую дугу в D^2_ε (см. рис. 2), задаваемую в координатах ξ, η условиями $\xi = d$, $-d < \eta < d$ (соотв. $\eta = d$, $-d < \xi < d$) и параметризированную параметром η (соотв. ξ). Из (10) и (12) следует, что положительная полутраектория поля X_ε, начинающаяся в точке B_1 дуги l^3_ε с параметром $v > 0$, задается в D^2_ε уравнением $\xi = \Xi(\eta, v, \varepsilon)$, $\eta \in [v, 2d)$, где Ξ – C^{r-1}-функция, $\Xi(\eta, v, \varepsilon) > 0$, $\Xi(\eta, +0, \varepsilon) = 0$, пересекает дугу l^4_ε в точке B_2 с параметром $\xi = \varphi_2(v, \varepsilon) = \Xi(d, v, \varepsilon)$, а для времени перехода по траекториям поля от точки B_1 до точки B_2

$$T_3(v, \varepsilon) = \int\limits_v^d \frac{d\eta}{(\lambda^0_{22} + q_2(\Xi(\eta, v, \varepsilon), \eta, \varepsilon))\eta}$$

имеем следующую оценку

$$-(\ln v - \ln d)/(1+\alpha)\lambda^0_{22} \leq T_3(v, \varepsilon) \leq -(\ln v - \ln d)/(1-\alpha)\lambda^0_{22}. \tag{13}$$

При достаточно малых $\sigma > 0$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ положительная полутраектория поля X_ε, $\varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2$, начинающаяся в точке дуги l_ε^1 с параметром $u \in [0, \sigma]$ первый раз пересечет дугу l_ε^3 в точке с параметром $v = \psi_1(u, \varepsilon)$ (см. рис. 2) через время $T_2(u, \varepsilon)$, где $\psi_1,\ T_2 \in C^1$, $\psi_1(0, \varepsilon) \equiv 0$, $(\psi_1)'_u(u, \varepsilon) > 0$. Тогда при некотором $K > 0$

$$u/K \leq \psi_1(u, \varepsilon) \leq Ku,\ \ 0 < T_2(u, \varepsilon) \leq K \text{ для всех } \varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2,\ \ u \in [0, \sigma]. \tag{14}$$

Мы можем также считать, что при выбранных σ, δ_2 и K положительная полутраектория поля X_ε, $\varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2$, начинающаяся в точке дуги l_ε^4 с параметром $\xi \in [0, \sigma]$, первый раз пересечет дугу l_ε^2 в точке с параметром $x = \psi_2(\xi, \varepsilon)$ (см. рис. 2), где $\psi_2 \in C^1$, $\psi'_{2\xi}(\xi, \varepsilon) > 0$, $\psi_2(0, \varepsilon) = \hat{x}(\varepsilon) = \varepsilon_2$, через время $T_4(\xi, \varepsilon)$,

$$0 < T_4(\xi, \varepsilon) \leq K. \tag{15}$$

Функция $\mathcal{P}(\cdot, \varepsilon) := \varphi_1^{-1}(\psi_2(\varphi_2(\psi_1(\cdot\ ,\ \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)$, где $\varphi_1^{-1}(\cdot\ ,\ \varepsilon)$– отображение, обратное к $\varphi_1(\cdot\ ,\ \varepsilon)$, является функцией последования по траекториям поля X_ε на части дуги l_ε^1 (см. рис. 2). Далее мы уточним ее область определения в зависимости от параметра ε.

4. Оценка характеристического показателя предельного цикла. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Существуют числа $\rho > 0$ и $\delta \in (0, \delta_2)$ такие, что замкнутая траектория поля X_ε, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, проходящая через точку дуги l_ε^1 с параметром $u \in (0, \rho)$, является грубым устойчивым предельным циклом.*

Доказательство леммы. Пусть указанная замкнутая траектория $L_\varepsilon(u)$ имеет период T и задается уравнениями $x_k = \hat{x}_k(t)$, $t \in [0, T]$, $k = 1, 2$, где $(\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0)) \in l_\varepsilon^1$. Если характеристический показатель [14, с. 126]

$$\chi(L_\varepsilon(u)) = \tfrac{1}{T} \int_0^T div\, X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\, dt \tag{16}$$

отрицателен, то $L_\varepsilon(u)$ является грубым устойчивым предельным циклом.

При достаточно малых ρ и δ траектория $L_\varepsilon(u)$ последовательно пересекает дуги l_ε^3, l_ε^4, l_ε^2 и l_ε^1 соответственно в моменты $t_1 = T_2(u, \varepsilon)$, $t_2 = T_2(u, \varepsilon) + T_3(v_1, \varepsilon)$, $t_3 = T_2(u, \varepsilon) + T_3(v_1, \varepsilon) + T_4(v_2, \varepsilon)$ и $T = T_2(u, \varepsilon) + T_3(v_1, \varepsilon) + T_4(v_2, \varepsilon) + T_1(u, \varepsilon)$, где обозначено $v_1 = \psi_1(u, \varepsilon)$, $v_2 = \varphi_2(v_1, \varepsilon)$. Теперь из (5), (9), (11) и (13)–(15) получаем

$$\int_0^{t_1} div\, X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\, dt \leq NT_2(u, \varepsilon) \leq NK, \quad \int_{t_2}^{t_3} div\, X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\, dt \leq NT_4(v_2, \varepsilon) \leq NK,$$

где $N = \max\limits_{\varepsilon \in [-\delta', \delta']^2} \max\limits_{z \in D} |div\, X_\varepsilon(z)|$,

$$\int_{t_3}^{T} div\, X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\, dt \leq (1 - \alpha)\lambda_{12}^0 T_1(u, \varepsilon) \leq \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}(\ln u - \ln d),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} div\, X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\, dt \leq (1 + \alpha)(\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0) T_3(\psi_1(u, \varepsilon), \varepsilon) \leq -\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\frac{\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0}{\lambda_{22}^0}(\ln u - \ln K - \ln d),$$

если $\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0 \geq 0$, и

$$\int_{t_1}^{t_2} div\, X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\, dt \leq (1 - \alpha)(\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0) T_3(\psi_1(u, \varepsilon), \varepsilon) \leq -\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\frac{\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0}{\lambda_{22}^0}(\ln u + \ln K - \ln d),$$

если $\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0 < 0$, и, окончательно,

$$\int_0^T div\, X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\, dt \leq C_1 \ln u + C_2, \tag{17}$$

где C_2 не зависит от u и ε, а $C_1 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0}{\lambda_{22}^0} > 0$ при $\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0 \leq 0$, и

$$C_1 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\frac{\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0}{\lambda_{22}^0} = \frac{-4\alpha}{1 - \alpha^2} + \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\left(-\frac{\lambda_{21}^0}{\lambda_{22}^0}\right) \text{ при } \lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0 > 0. \tag{18}$$

Из (18) и (4) получаем $C_1 > 10\alpha - 4\alpha/0,99 > 0$. Утверждение леммы теперь следует из (16), (17) и положительности C_1.

5. Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов. Покажем, что все траектории поля X_0, проходящие через точки дуги l_0^1 с параметром $u \in (0,\rho]$, где ρ выбрано согласно лемме, ω-предельны к контуру Γ_+^0, что равносильно неравенству $\mathcal{P}(u,0) < u$. Пусть это не так. Мы можем считать, что отображение $\mathcal{P}(\cdot,0)$ определено на $(0,\rho]$, при этом $\mathcal{P}(+0,0)=0$. При сделанном предположении либо $\mathcal{P}(u_0,0) > u_0$ для всех $u_0 \in (0,\rho)$, либо $\mathcal{P}(u_*,0) = u_*$ при некотором $u_* \in (0,\rho)$. Из леммы следует, что $0 < \mathcal{P}'_u(u_*,0) < 1$ и потому $\mathcal{P}(u_0,0) > u_0$ при некотором $u_0 \in (0,u_*)$. В обоих случаях фиксируем число u_0. Тогда при всех ε, достаточно близких к нулю,

$$\mathcal{P}(u_0,\varepsilon) > u_0. \tag{19}$$

Пусть $\varepsilon = (0,\varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 < 0$ достаточно близко к нулю. Так как $\psi_2(0,\varepsilon) = \hat{x}(\varepsilon) = \varepsilon_2 < 0$, то $\mathcal{P}(\cdot,\varepsilon)$ определено на интервале $(x_*(\varepsilon),\rho)$, где $x_*(\varepsilon) > 0$ при рассматриваемом ε, а

$$P(x_*(\varepsilon)+0,\varepsilon) = 0 < x_*(\varepsilon). \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что существует $\bar{u} \in (x_*(\varepsilon),\rho)$ такое, что $\mathcal{P}(\bar{u},\varepsilon) = \bar{u}$. Из леммы получаем $0 < \mathcal{P}'_u(\bar{u},\varepsilon) < 1$. Вместе с (19) и (20) это влечет существование у $\mathcal{P}(\cdot,0)$ еще двух неподвижных точек, в противоречие с утверждением леммы. Таким образом, сделанное предположение неверно и все траектории поля X_0, проходящие через точки дуги l_0^1 с параметром $u \in (0,\rho)$, ω-предельны к контуру Γ_+^0.

Так как $\mathcal{P}(\rho,0) < \rho$, то δ можно считать выбранным так, что $\mathcal{P}(\rho,\varepsilon)$ определено для всех $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$ и

$$\mathcal{P}(\rho,\varepsilon) < \rho \;\text{ для всех }\; \varepsilon \in (-\delta,\delta)^2. \tag{21}$$

Обозначим $l_{\varepsilon,\rho}^1$ часть дуги l_ε^1, состоящую из точек с параметром $u \in (0,\rho]$.

Из неравенства (21) при $\varepsilon = 0$ и [15, с. 100] следует, что через точку l_0^1 с параметром $x = \mathcal{P}(\rho,0)$ можно провести замкнутую трансверсаль $\Gamma_+^{\text{int}} \subset D_+$ к траекториям поля X_0. Возьмем гладкую замкнутую кривую Γ^{ext}, $R(\Gamma^{ext}) = \Gamma^{ext}$, ограничивающую вместе с $L_+^0 \cup L_-^0 \cup \{S_1^0, S_2^0\}$ замкнутое кольцо, не пересекающееся с дугой $(S_1^0 S_2^0)$ и не содержащее особых точек поля X_0, отличных от S_1^0 и S_1^0. Пусть U – окрестность полицикла Γ^0, границей которой является $\Gamma_+^{\text{int}} \cup R(\Gamma_+^{\text{int}}) \cup \Gamma^{ext}$. Если δ выбрано достаточно малым, то для любого поля X_ε, $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$, $S(\varepsilon)$, $S_\pm(\varepsilon)$ и $S_2(\varepsilon)$ – единственные особые точки, лежащие в U, любая замкнутая траектория, лежащая в U, либо пересекает $l_{\varepsilon,\rho}^1$, либо ей симметрична.

Выходящая сепаратриса седла $S_2(\varepsilon)$ идет в седло $S_R(\varepsilon)$, образуя вместе с дугой линии F между этими седлами, контур $\Gamma_+(\varepsilon)$, если $\varepsilon_1 < 0$ и

$$\psi_2(0,\varepsilon) = \varepsilon_2 = x_R\left(\sqrt{|\varepsilon_1|},\varepsilon_2\right). \tag{22}$$

Из (7) по теореме о неявной функции следует, что δ_2 можно считать выбранным так, что для любого $\varepsilon_2 \in (-\delta_2,\delta_2)$ существует число $m(\varepsilon_2) \in (-\delta_1,\delta_1)$, такое, что $m(\cdot) \in C^1$, $m(0) = 0$, $m'(0) = \sqrt{b} > 0$, и $\operatorname{sgn}(x_R(\mu,\varepsilon_2) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(\mu - m(\varepsilon_2))$ для всех $\mu \in (-\delta_1,\delta_1)$, $\varepsilon_2 \in (-\delta_2,\delta_2)$. Уменьшив при необходимости δ_2, мы можем считать, что $m(\varepsilon_2) > 0$ при всех $\varepsilon_2 \in (0,\delta_2)$. Но тогда $\varepsilon_1 = \beta(\varepsilon_2)$, где $\beta(\varepsilon_2) := -m^2(\varepsilon_2)$ – решение уравнения (22) и, более того,

$$\operatorname{sgn}\left(\varepsilon_2 - x_R\left(\sqrt{|\varepsilon_1|},\varepsilon_2\right)\right) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 - \beta(\varepsilon_2)) \;\text{ для всех }\; \varepsilon \in (-\delta_2,0)\times(0,\delta_2). \tag{23}$$

Так как $\beta(0) = 0$, $\beta'(0) = -2m(0)m'(0) = 0$, то число δ можно считать выбранным столь малым, что $\beta(\cdot)$ отображает интервал $(0,\delta)$ в интервал $(-\delta,0)$.

Определим множества B_i $(i = 0,1,...,5)$ и E_j $(j = 1,2,...,5)$ так, как сформулировано в теореме.

Аналогично случаю $\varepsilon = 0$ доказывается, что все траектории поля X_ε, $\varepsilon \in \text{B}_2$, проходящие через точки дуги l_ε^1 с параметром $0 < u < \rho$, ω-предельны к контуру $\Gamma_+(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in \text{E}_1 \cup \text{B}_1 \cup \text{E}_2$ ввиду равенства (23) получаем, что $\mathcal{P}(\cdot,\varepsilon)$ определена на $(0,\rho)$ и $\mathcal{P}(+0,\ \varepsilon) = \varphi_1^{-1}(\varepsilon_2,\varepsilon) > 0$. Отсюда и из (21) следует, что $\mathcal{P}(\cdot,\varepsilon)$ имеет на интервале $(0,\rho)$ неподвижную точку. Вследствие леммы дугу $l_{\varepsilon,\rho}^1$ пересекает единственная замкнутая траектория – грубый устойчивый предельный цикл.

При $\varepsilon \in \text{E}_3 \cup \text{B}_3$, считая δ достаточно малым, получаем, что $\mathcal{P}(\cdot,\varepsilon)$ определена на интервале $(x_*(\varepsilon),\rho)$, где $x_*(\varepsilon) = \psi_1^{-1}(\varphi_2^{-1}(\psi_2^{-1}(x_R\left(\sqrt{|\varepsilon_1|},\varepsilon_2\right),\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon) > 0$, а $\mathcal{P}(x_*(\varepsilon)+0,\ \varepsilon) = 0 < x_*(\varepsilon)$. Отсюда, из (21) и леммы следует, что предположение о существовании замкнутой траектории, проходящей через точки дуги $l_{\varepsilon,\rho}^1$ с параметром $u \in (x_*(\varepsilon),\rho)$, приводит к противоречию. Траектории, проходящие через эти точки, ω-предельны к узлу $S_L(\varepsilon)$ (седло-узлу $S(\varepsilon)$). Траектории, проходящие через точки с параметром $u \in (0,x_*(\varepsilon)]$, также ω-предельны к узлу $S_L(\varepsilon)$ (седло-узлу $S(\varepsilon)$).

Все утверждения теоремы доказаны.

Список литературы

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука; 1978. 304 с.
2. Жолондек X. О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости. *Математический сборник* 1983;120(4):473–499.
3. Лерман Л.М., Тураев Д.В. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах. *Нелинейная динамика.* 2012;8(2):323–343.
4. Николаев Е.В. Бифуркации предельных циклов дифференциальных уравнений, допускающих инволютивную симметрию. *Математический сборник.* 1995;186(4):143–160.
5. Ройтенберг В.Ш. Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика, Механика Физика».* 2021;13(3):39–46.
6. Шноль Э.Э. Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений. *Математический сборник.* 2000;191(8): 141–157.
7. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Springer-Verlag. 1988.
8. Roitenberg V.Sh. Bifurcations of a polycycle formed by separatrices of saddles of a dynamical system with central symmetry. Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: сборник материалов международной конференции, Белгород, 25–29 октября 2021 г. под ред. В.Б. Васильева, И.С. Ломова. Белгород, ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ» 2021.:311–312.
9. Takens F. Singularities of vector fields. *Publ. Math. IHES.* 1974; 43:47-100.
10. Ройтенберг В.Ш. Нелокальные двухпараметрические бифуркации векторных полей на поверхностях. Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. 01.01.02. Ярославль. 2000. 187 с.
11. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва–Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2009. 416 с.
12. Палис Ж., Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. Пер. с англ. М., Мир. 1986. 301 с.
13. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. Москва–Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2004. 547 с.
14. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука; 1967. 488 с.
15. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука; 1966. 568 с.

References

1. Arnold VI. Additional chapters in the theory of ordinary differential equations. Moscow, Nauka Publ. 1978. 304 p. (in Russian).
2. Zholondek H. On the versality of a family of symmetric vector fields on the plane. *Sbornik: Mathematics.* 1983;120(4):473–499. (in Russian).
3. Lerman LM., Turaev DV. On symmetry breaking bifurcations in reversible systems. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2012;8(2):323–343. (in Russian).
4. Nikolaev EV. Bifurcations of limit cycles of differential equations admitting involutive symmetry. *Sbornik: Mathematics.* 1995;186(4):143–160. (in Russian)
5. Roitenberg VSh. Bifurcations of a polycycle formed by two separatrix loops of a non-rough saddle of a dynamical system with central symmetry. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”.* 2021;13(3):39–46. (in Russian).
6. Shnol EE. Regular polyhedra and bifurcations of symmetric equilibria of ordinary differential equations. *Sbornik: Mathematics.* 2000;191(8):141–157. (in Russian)
7. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Springer-Verlag. 1988.
8. Roitenberg VSh. Bifurcations of a polycycle formed by separatrices of saddles of a dynamical system with central symmetry. Differential equations, mathematical modeling and computational algorithms. Collection of materials of the Internatinal Conference. Belgorod, October 25-29. BSTU Publ. 2021:311-312.
9. Takens F. Singularities of vector fields. *Publ. Math. IHES.* 1974;43:47–100.
10. Roitenberg VSh. Nonlocal two-parameter bifurcations of vector fields on surfaces. PhD thesis. Yaroslavl. 2000. 187 p. (in Russian).
11. Shilnikov LP., Shilnikov AL., Turaev DV., Chua LO. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: Part 2. River Edge, N.-J. World Scientific. 2001.
12. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New-York; Heidelberg; Berlin. Springer-Verlag. 1982. 198 p.

13. Shilnikov LP., Shilnikov AL., Turaev DV., Chua LO. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: Part 1. River Edge, N.-J. World Scientific; 1998. 412 p.
14. Andronov AA., Leontovich EA., Gordon II., Maier AG. Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane. Moscow, Nauka Publ; 1967. 488 p. (in Russian).
15. Andronov AA., Leontovich EA., Gordon II., Maier AG. The qualitative theory of dynamical systems of second order. Moscow, Nauka Publ; 1966. 568 p. (in Russian).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.12.2023
Поступила после рецензирования 29.01.2024
Принята к публикации 03.02.2024

Received December 15, 2023
Revised January 29, 2024
Accepted February 03, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir Sh. Roitenberg – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associete Professor, Associete Professor of the Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia