Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 2. С. 132–142.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 2. P. 132–142.

УДК 517.956.3
MSC 58J45
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-132-142

Локальные классические решения общего неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости

Ф. Е. Ломовцев

(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым*)

Белорусский государственный университет,
Минск, 220030, Республика Беларусь

E-mail: lomovcev@bsu.by

Аннотация. Построено множество новых локальных классических решений одномерного неоднородного волнового уравнения с необходимой (минимальной достаточной) гладкостью его правой части в криволинейной первой четверти плоскости. Они выведены предложенным ранее автором методом корректировки пробных обобщенных решений. В криволинейной первой четверти плоскости вычислены общие интегралы (общие решения) неоднородного волнового уравнения во множестве классических решений. С помощью каждого из построенных локальных решений уравнения вычисление общего интеграла неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости сводится к общему интегралу однородного волнового уравнения.

Ключевые слова: криволинейная четверть плоскости, метод корректировки пробных решений, локальное классическое решение, общий интеграл уравнения

Благодарности: Работа выполнена в рамках программы ГПНИ № 11, «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР 1.2.02.3

Для цитирования: Ломовцев Ф. Е. 2023. Локальные классические решения общего неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскостии. Прикладная математика & Физика, 55(2): 132–142. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-132-142

Original Research

Local Classical Solutions to the General Inhomogeneous Wave Equation in a Curvilinear First Quarter of the Plane

Fedor Lomovtsev

(*Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)*

Belarusian State University,
Minsk, 220030, Republic of Belarus

E-mail: lomovcev@bsu.by

Abstract. Many new local classical solutions have been constructed to one-dimensional inhomogeneous wave equation with the necessary (minimum sufficient) smoothness of its right-hand side in the curvilinear first quarter of the plane. They are derived by the correction method of test generalized solutions proposed earlier by the author. In the curvilinear first quarter of the plane, the general integrals (general solutions) to the inhomogeneous wave equation are calculated in the set of classical solutions. Using each of the constructed local equation solutions, the calculation of the general integral to the inhomogeneous wave equation in the curvilinear first quarter of the plane reduces to the general integral of the homogeneous wave equation.

Keywords: Curvilinear Quarter of the Plane, Method for Adjusting Trial Solutions, Local Classical Solution, General Integral of the Equation

Acknowledgements: The work was carried out within the framework of the SPNI program No. 11, "Convergence-2025 subprogram "Mathematical Models and Methods", R&D 1.2.02.3

For citation: Lomovtsev Fedor. 2023. Local classical solutions to the general inhomogeneous wave equation in a curvilinear first quarter of the plane. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 132–142. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-132-142

Введение. Для одномерного неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости известны его локальные классические решения только двух видов из [3], [7]. Эти решения выведены обобщением метода корректировки, предложенного автором для прямолинейной первой четверти плоскости в [6], на криволинейную первую четверть плоскости в [3] (см. замечание 1). В настоящей работе этим обобщением метода корректировки получены новые множество локальных классических решений и множество общих интегралов классических решений неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости (см. замечание 3). Более того, так же, как в [3], для этих классических решений найдены необходимые (минимальные достаточные) требования гладкости на правую часть волнового уравнения. Благодаря этим классическим решениям легко записываются общие интегралы (множества всех классических решений) неоднородного волнового уравнения в криволинейной четверти плоскости. В будущем метод вспомогательных смешанных задач для волнового уравнения на полупрямой [5] позволит из [8, 16] выводить классические решения и критерии однозначной и устойчивой везде разрешимости смешанных задач для волновых уравнений не только в прямолинейных, так же, как в [15, 9], но и в криволинейных областях. В мире нет других работ с явными формулами решений смешанных задач в криволинейных областях.

Методами спектрального анализа изучена и решена смешанная задача для уравнения колебаний балки, один конец которой свободен, а другой заделан, т. е. для консольной балки в статье [10]. В ней собственные значения – корни трансцендентного уравнения и собственные функции – ортогональная и полная система функций в пространстве Лебега. Её решением служит ряд Фурье в классе регулярных решений уравнения колебаний балки. В работе [2] секвенциальным из [12] и аксиоматическим из [13] методами А. П. Хромова получено обобщенное решение в виде быстро сходящегося ряда Фурье смешанной задачи для телеграфного уравнения с потенциалом $q(x,t)$ при нелокальном граничном условии со значением решения во внутренней точке отрезка. Эти два метода обобщают метод разделения переменных (метод Фурье) путем использования резольвентного метода, идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и идеи Л. Эйлера о расходящихся рядах. В первом методе обобщенным решением смешанной задачи является предел классических решений последовательности смешанных задач, а в другом методе вместо классических решений используется дополнительная система аксиом. Статья [14] посвящена построению методом характеристик классического решения смешанной задачи для однородного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка, представляющего четырехкратную композицию одного и того же оператора первого порядка с постоянными коэффициентами и четырехкратной характеристикой. Её особенность ещё состоит в том, что граничные условия задаются не на всей боковой границе. Доказана теорема существования единственного классического решения при достаточных требованиях гладкости и условиях согласования граничных условий с начальными условиями и уравнением. Известно: метод характеристик (общих интегралов) применим и к смешанным задачам с неразделяющимися переменными.

1. Постановка задачи корректировки. Предварительные понятия. В криволинейной первой четверти плоскости $\widetilde{G}_\infty = \{]\sigma(t), +\infty[\times]\kappa(x), +\infty[: t > 0,\ x > 0\}$ ищутся локальные классические решения уравнения
$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{tx}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \widetilde{G}_\infty, \tag{1}$$
где нижними индексами функции u обозначены вторые частные производные, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и $t = \kappa(x)$, $x = \sigma(t)$ – заданные функции криволинейных осей координат первой четверти плоскости. Заменой независимых переменных x и t всегда можно добиться того, чтобы $\kappa(0) = \sigma(0) = 0$, т. е. эти оси пересекались в начале координат. Криволинейная четверть $\widetilde{G}_\infty$ может содержать точки со значениями $x < 0$ или $t < 0$.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Определение 1. *Функция* $u = u(x,t)$ *называется классическим решением уравнения* (1) *на множестве* $\Omega \subset \widetilde{G}_\infty = \{]\sigma(t), +\infty[\times]\kappa(x), +\infty[: t > 0,\ x > 0\}$, *если она* $u \in C^2(\Omega)$ *и удовлетворяет этому уравнению для всех* $(x,t) \in \Omega$.

Для уравнения (1) в каждой точке $(x,t) \in \widetilde{G}_\infty$ требуется найти локальные классические решения $F = F(x,t)$ с минимальной гладкостью правой части $f = f(x,t)$. Если существует некоторое классическое решение $u \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$ неоднородного уравнения (1), то его правая часть непрерывна $f \in C(\widetilde{G}_\infty)$. Если же функции $F(x,t)$ не дважды непрерывно дифференцируемы, то проводим их корректировку обобщёнными решениями $F_0 \notin C^2(\widetilde{G}_\infty)$ однородного уравнения (1) так, чтобы функции $F_1(x,t) = F(x,t) - F_0(x,t)$ стали дважды непрерывно дифференцируемыми на $\widetilde{G}_\infty$. Корректировка проводится с помощью корректирующей задачи Гурса, в которой используются функции $\chi_i(x) = x + (-1)^i a_i \kappa(x)$, $\sigma_i(t) = a_i t + (-1)^i \sigma(t)$, $i = 1, 2$, где $\chi_i(0) = \sigma_i(0) = 0$, $i = 1,\ 2$. Если криволинейные оси и их производные
$$\kappa(x),\ \sigma(t) \in C^2[0, +\infty[,\ -\frac{1}{a_2} < \kappa'(x) < \frac{1}{a_1}, x \geq 0,\ -a_2 < \sigma'(t) < a_1, t \geq 0, i = 1, 2, \tag{2}$$
то существуют их дважды непрерывно дифференцируемые обратные функции χ_i^{-1}, σ_i^{-1}, $i = 1,\ 2$. Действительно, из неравенств в (2) вытекает их строгое возрастание $\chi_i'(x) = 1 + (-1)^i a_i \kappa'(x) > 0$, $x \geq 0$, $\sigma_i'(t) = a_i + (-1)^i \sigma'(t) > 0$, $t \geq 0$, $i = 1,\ 2$, а из гладкости осей в (2) – дважды непрерывная дифференцируемость их обратных.

Если оси $\kappa(x) < x/a_1,\ x > 0,\ \sigma(x) < a_1 t,\ t > 0$, то криволинейная первая четверть плоскости $\widetilde{G}_\infty$ делится характеристикой $x = a_1 t$ на два непустые множества $\widetilde{G}_- = \{(x,t) \in \widetilde{G}_\infty : x > a_1 t > a_1\kappa(x),\ x > 0\}$ и $\widetilde{G}_+ = \{(x,t) \in \widetilde{G}_\infty : \sigma(t) \le x \le a_1 t,\ t \ge 0\}$.

2. Корректирующая задача Гурса. Роль пробных локальных обобщенных решений уравнения (1) играют функции

$$F^{(0)}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(\sigma(\tau) + |s - \sigma(\tau)|,\ \tau) ds d\tau \tag{3}$$

из [3]. Интервалы изменения параметра t_0 будут указаны в теоремах 1 и 3. Можно показать, что если $f \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$, то функции $F^{(0)} \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$ и удовлетворяют уравнению (1) с правой частью $f(\sigma(t)+|x-\sigma(t)|, t)$ на $\widetilde{G}_\infty$.

Замечание 1. В прямолинейной первой четверти плоскости $\widetilde{G}_\infty$ осями координат являются прямые $t = \kappa(x) \equiv 0, x = \sigma(t) \equiv 0$. Согласно учебнику Тихонова А. Н., Самарского А. А. [11] (Раздел 9. Интегральные уравнения колебаний, параграф 2, глава II) на стр. 83 последнее слагаемое решения (31) первой смешанной задачи при $at > x$ в прямолинейной первой четверти плоскости имеет вид нашего интеграла (3) при $a_1 = a_2 = a,\ t_0 = 0$ и $\sigma(\tau) \equiv 0$ от $f(s,\tau)$, но с модулем нижнего предела интегрирования $|x - a(t-\tau)|$ вместо модуля $|s|$ под интегралом в $f(|s|,\tau)$. Это последнее слагаемое является лишь непрерывным кусочно-дифференцируемым (обобщённым) решением простейшего уравнения колебаний струны, так как даже для более гладких правых частей, чем $f \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$, оно имеет разрывные вторые частные производные на характеристике $x = at$. Поэтому в методе корректировки [6] автор перенес модуль с нижнего предела интегрирования под интеграл на координаты s точек струны правой части $f(|s|,\tau)$ уравнения. Важно отметить, что в статьях [3], [6] доказано, что функция (3) при $a_1 \ne a_2$ не является классическим решением уравнения (1) с зависящей от x и t правой частью f на первой четверти $\widetilde{G}_\infty$ и, следовательно, требует корректировки соответствующими обобщенными решениями до указанных классических решений. Более того, в этих статьях выводится минимальная (необходимая) гладкость правой части f уравнения (1) на $\widetilde{G}_\infty$.

Только для упрощения изложения мы продолжаем правую часть $f \in C(\widetilde{G}_\infty)$ четно по x относительно оси $x = \sigma(t)$ с первой криволинейной четверти $\widetilde{G}^{(1)}_\infty = \widetilde{G}_\infty$ на вторую криволинейную четверть плоскости $\widetilde{G}^{(2)}_\infty$. В результате имеем непрерывную в криволинейной снизу верхней полуплоскости $\widetilde{Q}_\infty = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > \kappa(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ функцию $\bar{f}(x,t) = f(\sigma(t)+|x-\sigma(t)|, t)$, т. е. $\bar{f}(x,t) = f(x,t)$ на $\widetilde{G}^{(1)}_\infty$ и $\bar{f}(x,t) = f(2\,\sigma(t) - x, t)$ на $\widetilde{G}^{(2)}_\infty$. Для внутренних точек $M(x,t) \in \widetilde{G}_+$ строим локальные классические решения уравнения (1) с минимальной гладкостью на f, дополнительной к $f \in C(\widetilde{G}_\infty)$.

Теорема 1. *Пусть* $\kappa(x) < x/a_1,\ x > 0,\ \sigma(t) < a_1 t,\ t > 0$, *верны свойства* (2),

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \ \kappa(x) = 0\ \ \forall\ x \in [0,\varepsilon_0],\ \ \sigma(t) = 0\ \ \forall\ t \in [0,\varepsilon_0]. \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) *на множестве* $\widetilde{G}_+$ *имеет локальные классические решения:*

$$\begin{aligned} F^{(0)}_{(q)}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[&\int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{q(a_1 t - x) - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau + \\ + &\int\limits_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t} \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{q(a_1 t - x) - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0} f(s,\tau) ds d\tau \Bigg],\ \ (x,t) \in \widetilde{G}_+, \end{aligned} \tag{5}$$

где $t_{(q)}(x) = (q+1)(a_1 t - x)/(a_1+a_2)$ *и* $q > -1$, *в которых* t_0 *принимает значения*

$$t_0 \in [\max_{x_2 \le s \le x_3} \kappa(s), t^*[\ \forall\ x > 0,\ \ \ t_0 \in]\kappa(x_3), t^*]\ \forall\ x \le 0, \tag{6}$$

параметры $x_2 = \chi_2^{-1}\big(\sigma_2\big(\sigma_1^{-1}(a_1 t - x)\big)\big),\ x_3 = \chi_2^{-1}(x + a_2 t)$ *и* $t^* = (x + a_2 t)/(a_1 + a_2)$.

Доказательство. Можем предполагать существование некоторого классического решения $u^{(0)} \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$ уравнения (1) на $\widetilde{G}_\infty$ также, как в [3, 6, 7]. Например, выше сказано, что для $f \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$ функции $F^{(0)}(x,t) \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$ удовлетворяют уравнению (1) на $\widetilde{G}_\infty$. Любая внутренняя точка $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in \widetilde{G}_+$ находится строго внутри различных параллелограммов $\widetilde{G}_0 \subset \widetilde{G}_+$, сторонами которых служат отрезки характеристик

$$x - a_1 t = C_1,\ x + a_2 t = C_2,\ \forall\, C_1,\ C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[. \tag{7}$$

В этих параллелограммах $\widetilde{G}_0$ уравнение (1) линейной невырожденной заменой

$$\xi = x + a_2 t, \quad\ \eta = x - a_1 t \tag{8}$$

с невырожденным якобианом $J_1 = -(a_1 + a_2) \neq 0$ приводится к каноническому виду

$$-(a_1 + a_2)^2\, \tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \tilde{f}(\xi,\eta) = f\Big(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1 + a_2}, \frac{\xi - \eta}{a_1 + a_2}\Big),\ (\xi,\eta) \in \widehat{G}_0, \tag{9}$$

в различных прямоугольниках $\widehat{G}_0 = \{(\xi,\eta):\ \xi_0 \le \xi \le \xi_1,\ \eta_0 \le \eta \le \eta_1\}$. Ввиду невырожденности линейной замены (8) из непрерывности функции $f \in C(\widetilde{G}_\infty)$ следует непрерывность функции $\tilde{f} \in C(\widehat{G}_\infty)$ на образе $\widehat{G}_\infty = \{(\xi,\eta):\ \xi > \chi_2\big((a_1\xi + a_2\eta)/(a_1+a_2)\big),\ \eta > -\sigma_1\big((\xi-\eta)/(a_1+a_2)\big),\ -(a_1/a_2)\xi < \eta < \xi\}$ четверти плоскости $\widetilde{G}_\infty$. Отсюда заключаем, что уравнение (9) на $\widehat{G}_+$ имеет классическое решение

$$\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta) = u^{(0)}\Big(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1 + a_2},\ \frac{\xi - \eta}{a_1 + a_2}\Big) \in C^2(\widehat{G}_+). \tag{10}$$

Для любой функции $\tilde{f} \in C(\widehat{G}_\infty)$ существует последовательность функций $\tilde{f}_n \in C^1(\widehat{G}_\infty)$, равномерно сходящаяся к $\tilde{f}$ на каждом компакте $\widehat{G}_0$ при $n \to \infty$. В различных прямоугольниках $\widehat{G}_0$ методом характеристик решаем задачу Гурса

$$-(a_1 + a_2)^2(\tilde{u}_n)_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \tilde{f}_n(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \widehat{G}_0, \tag{11}$$

$$\tilde{u}_n(\xi_0,\eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta),\ \eta \in [\eta_0,\eta_1],\ \tilde{u}_n(\xi,\eta_0) = \tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0),\ \xi \in [\xi_0,\xi_1],\ n = 1,\ 2, \ldots \tag{12}$$

Общие интегралы уравнений (11) – это непрерывно дифференцируемые функции

$$\tilde{u}_n(\xi,\eta) = g(\xi) + h(\eta) + \widetilde{F}_n^{(0)}(\xi,\eta),\ n = 1,\ 2, \ldots, \tag{13}$$

где $g,\ h$ – любые непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов $\xi,\ \eta$ и функции $\widetilde{F}_n^{(0)}$ получаются из функции $F_n^{(0)}$ вида (3) с подынтегральными функциями $f_n(\sigma(\tau) + |s - \sigma(\tau)|, \tau)$ вместо $f(\sigma(\tau) + |s - \sigma(\tau)|, \tau)$ в результате замены (8). Выше говорилось, что для $f_n \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$ решения $F_n^{(0)} \in C^2(\widetilde{G}_+)$ являются классическими и, следовательно, такие же решения $\widetilde{F}_n^{(0)} \in C^2(\widehat{G}_+)$ уравнения (11).

Подставив общие интегралы (13) в согласованные условия Гурса (12), в силу $u^{(0)} \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$, равенства (10), линейности и невырожденности замены (8) находим её единственные классические решения из $C^2(\widehat{G}_0)$:

$$\begin{gathered}\tilde{u}_n(\xi,\eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0) + \tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta) - \tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta_0) - \\ -\widetilde{F}_n^{(0)}(\xi,\eta_0) + \widetilde{F}_n^{(0)}(\xi_0,\eta_0) + \widetilde{F}_n^{(0)}(\xi,\eta) - \widetilde{F}_n^{(0)}(\xi_0,\eta),\ n = 1,\ 2, \ldots\end{gathered} \tag{14}$$

Определение 2. *Задача Гурса* (11), (12) *называется корректирующей краевой задачей обобщенных решений уравнения* (1) *для минимальной гладкости его правой части f, а функции $F^{(0)}$ вида* (3) *– пробными.*

Тогда функции $\tilde{v}_n(\xi,\eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta) - \tilde{u}_n(\xi,\eta)$, как разность классических решений, являются классическими решениями задачи Гурса:

$$-(a_1 + a_2)^2(\tilde{v}_n)_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \tilde{f}(\xi,\eta) - \tilde{f}_n(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \widehat{G}_0, \tag{15}$$

$$\tilde{v}_n(\xi_0,\eta) = 0,\ \eta \in [\eta_0,\eta_1],\ \tilde{v}_n(\xi,\eta_0) = 0,\ \xi \in [\xi_0,\xi_1],\ n = 1,\ 2, \ldots \tag{16}$$

Умножаем уравнение (15) на сумму первых частных производных $(\tilde{v}_n)_\xi + (\tilde{v}_n)_\eta$, интегрируем результат по области $]\xi_0,\tau_1[\times]\eta_0,\tau_2[$ с помощью однородных условий Гурса (16), применяем элементарные оценки, берем супремум по $(\tau_1,\tau_2) \in [\xi_0,\xi_1] \times [\eta_0,\eta_1]$ и также, как в [1, неравенство (2.5), стр.1020], выводим априорную оценку

$$\begin{gathered}\sup_{\eta_0<\eta<\eta_1} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Big(\big|(\tilde{v}_n)_\xi(\xi,\eta)\big|^2 + |\tilde{v}_n(\xi,\eta)|^2\Big)\, d\xi + \\ + \sup_{\xi_0<\xi<\xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \Big(\big|(\tilde{v}_n)_\eta(\xi,\eta)\big|^2 + |\tilde{v}_n(\xi,\eta)|^2\Big)\, d\eta \le c_0 \iint_{\widehat{G}_0} \big|\tilde{f}_n(\xi,\eta) - \tilde{f}(\xi,\eta)\big|^2\, d\xi d\eta,\end{gathered} \tag{17}$$

где постоянная $c_0 > 0$ не зависит от $\tilde{v}_n,\ \xi,\ \eta$ и $n = 1,\ 2, \ldots$

Поскольку в (17) правая часть сходится к нулю при $n \to \infty$, то левая часть тоже сходится к нулю при $n \to \infty$ и, следовательно, в силу известных непрерывных вложений пространств Соболева: $W_2^1(\xi_0,\xi_1) \subset C[\xi_0,\xi_1]$, $W_2^1(\eta_0,\eta_1) \subset C[\eta_0,\eta_1]$ последовательность $\tilde{v}_n$ равномерно сходится к нулю на $\widehat{G}_0$ при $n \to \infty$.

Последнее означает равномерную сходимость $\tilde{u}_n$ к $\tilde{u}$ на прямоугольниках $\widehat{G}_0$ при $n \to \infty$. Поэтому из решений (14) предельным переходом при $n \to \infty$ получаем тождество

$$\begin{gathered}\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0) + \tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta) - \tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta_0) - \\ -\widetilde{F}^{(0)}(\xi,\eta_0) + \widetilde{F}^{(0)}(\xi_0,\eta_0) + \widetilde{F}^{(0)}(\xi,\eta) - \widetilde{F}^{(0)}(\xi_0,\eta), \ \ (\xi,\eta) \in \widehat{G}_0,\end{gathered} \tag{18}$$

где функции $\widetilde{F}^{(0)}(\xi,\eta) = F^{(0)}((a_1\xi + a_2\eta)/(a_1+a_2),\ (\xi-\eta)/(a_1+a_2))$ получены из функций (3) заменой (8). Слагаемые $\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0)$ и $\tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta)$ дважды непрерывно дифференцируемы соответственно по ξ и η, так как $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(\widehat{G}_0)$.

1. Пусть у точки $M(x,t) \in \widetilde{G}_+$ координата $x > 0$ (рис. 1).

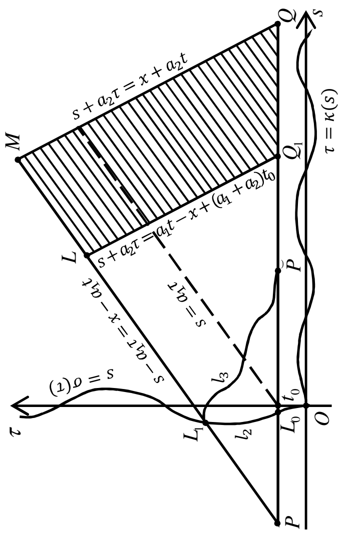

Рис. 1. Область интегрирования в $F_1^{(0)}$ на $\widetilde{G}_+$ при $x > 0$

Fig. 1. Domain of integration in $F_1^{(0)}$ on $\widetilde{G}_+$ for $x > 0$

Для корректировки пробных решений (3) в тождестве (18) полагаем $\eta_0 = \xi - (a_1+a_2)t_0$, $\xi_0 = -q\eta + (a_1 + a_2)t_0$, $q \in]-\infty, +\infty[$, и получаем для уравнения (9) скорректированные классические решения

$$\widetilde{F}_1^{(0)}(\xi,\eta) = \widetilde{F}^{(0)}(\xi,\eta) - \widetilde{F}^{(0)}(\xi_0,\eta) = \frac{-1}{(a_1+a_2)^2} \iint\limits_{\widetilde{M}\widetilde{L}\widetilde{Q}_1\widetilde{Q}} \widetilde{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta \in C^2(\widehat{G}_0) \tag{19}$$

в трапеции $\widetilde{M}\widetilde{L}\widetilde{Q}_1\widetilde{Q}$ с вершинами $\widetilde{M}(\xi,\eta)$, $\widetilde{L}\big(-q\eta+(a_1+a_2)t_0,\eta\big)$, $\widetilde{Q}_1\big(-q\eta+(a_1+a_2)t_0,-q\eta\big)$, $\widetilde{Q}(\xi,\xi-(a_1+a_2)t_0)$ (рис. 2).

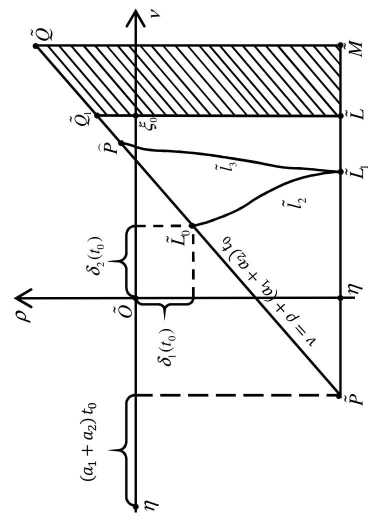

Рис. 2. Область интегрирования в $\widetilde{F}_1^{(0)}$ на $\widetilde{G}_+$ при $x > 0$

Fig. 2. Domain of integration in $\widetilde{F}_1^{(0)}$ on $\widetilde{G}_+$ for $x > 0$

Здесь значения q выбираем такими, чтобы для каждого ρ кривая $\tilde{l}_2$ уравнения $\nu = \rho - (a_1 + a_2)\sigma_1^{-1}(\rho)$ находилась слева от прямой $\widetilde{L}\widetilde{Q}_1$ уравнения $\nu = -q\eta + (a_1 + a_2)t_0$, т. е. как решения неравенства

$$\rho - (a_1 + a_2)\sigma_1^{-1}(\rho) \leq -q\eta + (a_1 + a_2)t_0,\ \rho \in [\eta, -\sigma_1(t_0)], \tag{20}$$

где $\eta = x - a_1 t \leq 0$ в $\widetilde{G}_+$. Если $\eta \neq 0$, то отсюда находим решения этого неравенства

$$q \geq \frac{\rho - (a_1 + a_2)\sigma_1^{-1}(\rho) - (a_1 + a_2)t_0}{-\eta} \geq \frac{\eta + (a_1 + a_2)t_0 - (a_1 + a_2)t_0}{-\eta} = -1,$$

потому что функция σ_1^{-1} строго возрастает по предположениям теоремы 1. Если $\eta = 0$, то неравенство (20) справедливо для всех указанных в нем $\rho \in [0, -\sigma_1(t_0)]$.

Рисунки 1 и 2 нами взяты из статьи [3], в которой указаны координаты вспомогательной точки $\widehat{P}$ из рисунка 2. В двойном интеграле (19) делаем обратную замену переменных к (8), полученный двойной интеграл от $f(x,t)$ по трапеции MLQ_1Q с вершинами $M(x,t)$, $L\big((qa_1 - a_2)(a_1 t - x)/(a_1 + a_2) + a_1 t_0,\ (q + 1)(a_1 t - x)/(a_1 + a_2) + t_0\big)$, $Q_1\big(q(a_1 t - x) + a_1 t_0,\ t_0\big)$, $Q(x + a_2(t - t_0), t_0)$ сводим к повторным интегралам и, благодаря равенству (10), приходим к классическим решениям (5) уравнения (1) в $\widetilde{G}_+$ для $x > 0$. Через точки L и Q_1 проходит прямая $s + a_2\tau = q(a_1 t - x) + (a_1 + a_2)t_0$. Функции (5) при $q = -1$ равны функциям (3) на характеристике $x = a_1 t$ и являются классическими решениями уравнения (1) на этой характеристике (см. замечание 2).

2. Пусть точка $M(x,t) \in \widetilde{G}_+$ имеет координату $x \leq 0$ (рис. 3).

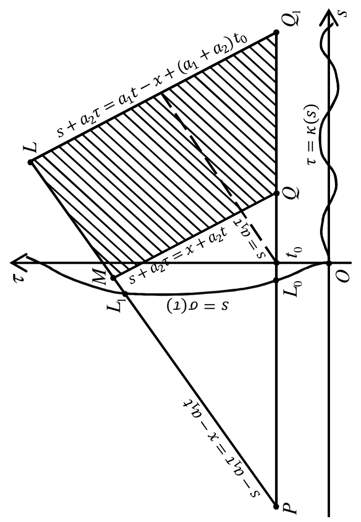

Рис. 3. Область интегрирования в $F_1^{(0)}$ на $\widetilde{G}_+$ при $x \leq 0$

Fig. 3. Domain of integration in $F_1^{(0)}$ on $\widetilde{G}_+$ for $x \leq 0$

Тогда прямая $\widetilde{L}\widetilde{Q}_1$ лежит справа от прямой $\widetilde{M}\widetilde{Q}$, т. е. справа от кривой $\tilde{l}_2$ (рис. 4).

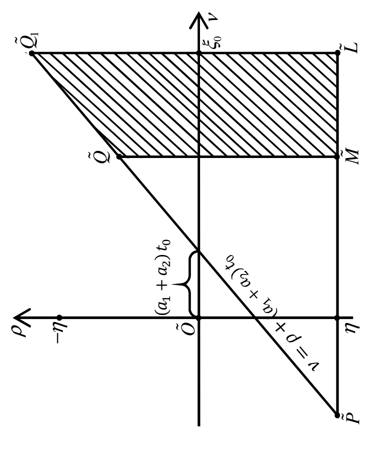

Рис. 4. Область интегрирования в $\widetilde{F}_1^{(0)}$ на $\widetilde{G}_+$ при $x \leq 0$

Fig. 4. Domain of integration in $\widetilde{F}_1^{(0)}$ on $\widetilde{G}_+$ for $x \leq 0$

Поэтому реализованной выше процедурой корректировки тоже приходим к локальным классическим решениям (5) уравнения (1) во внутренних точках множества $\widetilde{G}_+$ для $x \leq 0$. Напоминаем, что требования (4) обеспечивают возможность лишь однократного пересечения осей $t = \kappa(x)$, $x = \sigma(t)$ с характеристиками (7), которые проходят через точки $M(x,t) \in \widetilde{G}_+$, близкие к началу координат, так же, как неравенства из (2) через все остальные точки $M(x,t) \in \widetilde{G}_+$. Интервалы (6) изменения t_0 очевидно те же самые, что и в работе [3]. Теорема 1 доказана. □

3. Необходимая гладкость правой части. Продолжим выводить локальные классические решения уравнения (1) и необходимую гладкость на f в $\widetilde{G}_\infty$ методом корректировки из пробных решений (3).

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1. Для классических решений* (5) *при* $q > -1$ *уравнения* (1) *в* $\widetilde{G}_+$ *необходима гладкость:*

$$f \in C(\widetilde{G}_\infty), \quad \int_{t_0}^{t} f(x + a_2(t-\tau), \tau)d\tau \in C^1(\widetilde{G}_+), \tag{21}$$

$$q \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t_0} f\big(q(a_1t - x) - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0, \tau\big)d\tau + \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t} f(x - a_1(t-\tau), \tau)d\tau \in C^1(\widetilde{G}_+). \tag{22}$$

Доказательство. Необходимость непрерывности $f \in C(\widetilde{G}_\infty)$ показана выше. Ясно, что решения (5) из $C^2(\widetilde{G}_+)$ имеют непрерывно дифференцируемые производные:

$$\frac{\partial F^{(0)}_{(q)}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[a_2\int_{t_0}^{t} f(x + a_2(t-\tau), \tau)d\tau +$$

$$+qa_1 \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t_0} f\big(q(a_1t - x) - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0, \tau\big)d\tau + a_1\int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t} f(x - a_1(t-\tau), \tau)d\tau\Bigg],$$

$$\frac{\partial F^{(0)}_{(q)}(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[\int_{t_0}^{t} f(x + a_2(t-\tau), \tau)d\tau -$$

$$-q \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t_0} f\big(q(a_1t - x) - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0, \tau\big)d\tau - \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t} f(x - a_1(t-\tau), \tau)d\tau\Bigg].$$

Такой же гладкости должны быть их производные вдоль характеристик (7):

$$\begin{gathered}\frac{\partial F^{(0)}_{(q)}}{\partial t} + a_1\frac{\partial F^{(0)}_{(q)}}{\partial x} = \int_{t_0}^{t} f(x + a_2(t-\tau), \tau)d\tau, \\ \frac{\partial F^{(0)}_{(q)}}{\partial t} - a_2\frac{\partial F^{(0)}_{(q)}}{\partial x} = q\int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t_0} f\big(q(a_1t - x) - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0, \tau\big)d\tau + \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t} f(x - a_1(t-\tau), \tau)d\tau.\end{gathered} \tag{23}$$

Из (23) следует необходимость гладкости (21), (22) для решений (5) теоремы 1. □

Известны локальные классические решения и необходимая гладкость f на $\widetilde{G}_-$ из [3].

Теорема 3. *Пусть верны предположения теоремы 1. В каждой точке* $M(x,t) \in \widetilde{G}_-$ *волновое уравнение* (1) *имеет локальные классические решения:*

$$F^{(0)}_k(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[\int_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0}\int_{k(x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)ds d\tau + \int_{t^{(k)}(x)+t_0}^{t}\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\Bigg], \ k \geq 1, \tag{24}$$

где $t^{(k)}(x) = (k-1)(x - a_1t)/(a_1+a_2)$, *в которых параметр* t_0 *принимает значения* $t_0 \in \max\limits_{x_0 \leq s \leq x_3} \kappa(s), t^*_k[$, $k > 1$, *и*

$$x_0 = \chi_2^{-1}\big(k(x - a_1t)\big), \quad x_3 = \chi_2^{-1}(x + a_2t), t^*_k(x) = [(ka_1 + a_2)t - (k-1)x]/(a_1+a_2).$$

Для этих классических решений (24) *необходима гладкость*

$$f \in C(\widetilde{G}_-), \quad \int\limits_{t_0}^{t} f(x + a_2(t-\tau), \tau)d\tau \in C^1(\widetilde{G}_-), \tag{25}$$

$$k \int\limits_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0} f\big(k(x - a_1 t) - a_2\tau + (a_1 + a_2)t_0, \tau\big)d\tau + \int\limits_{t^{(k)}(x)+t_0}^{t} f(x - a_1(t-\tau), \tau)d\tau \in C^1(\widetilde{G}_-). \tag{26}$$

Из решений (24) и (5) соответственно с необходимой гладкостью (25), (26) и (21), (22) можно строить локальные классические решения уравнения (1) в четверти $\widetilde{G}_\infty$.

Следствие 1. В предположениях теоремы 1 функции $f \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$ из классических решений (24) с $k \geq 1$ на $\widetilde{G}_-$ и (5) с $q > -1$ на $\widetilde{G}_+$ удовлетворяют включению

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(x + a_2(t-\tau), \tau)d\tau \in C^1(\widetilde{G}_\infty). \tag{27}$$

Интеграл (27) равен производной от функций (24) и (5) вдоль характеристик $x - a_1 t = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, которые не пересекают характеристику $x = a_1 t$ (см. доказательство теоремы 2 и [3]). Для прямолинейной первой четверти и простейшего волнового уравнения (1) при $a_1 = a_2 = a$ доказательство следствия 1 заменой переменной интегрирования $s_2 = x + a(t-\tau)$ имеется в диссертации [9, формула (2.19), стр. 29].

На основании следствия 1 в криволинейной первой четверти плоскости $\widetilde{G}_\infty$ нам помогут написать новые множества общих интегралов уравнения (1) на $\widetilde{G}_\infty$ следующие

Следствие 2. В предположениях теоремы 1 для всех $f \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$ классические решения (24) при $k = q + 2$ на $\widetilde{G}_-$ и (5) при $q > -1$ на $\widetilde{G}_+$ уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируемы на характеристике $x = a_1 t$, т. е.

$$\begin{gathered}\big[1 - (-1)^i(q+1)\big] \int\limits_{t_0}^{\hat{t}_i(x)+t_0} f\big(\big[1 - (-1)^i(q+1)\big](x - a_1 t) - a_2\tau + (a_1 + a_2)t_0, \tau\big)d\tau + \\ + \int\limits_{\hat{t}_i(x)+t_0}^{t} f(x - a_1(t-\tau), \tau)d\tau \in C^1(\widetilde{G}_\infty), i = 1,\ 2,\ \hat{t}_i(x) = (-1)^i \frac{(q+1)(a_1 t - x)}{a_1 + a_2}.\end{gathered} \tag{28}$$

Замечание 2. Решения (24) при $k = 1$ и (5) при $q = -1$ совпадают с классическими решениями уравнения (1) в замыкании $\overline{\widetilde{G}}_-$ множества $\widetilde{G}_-$.

Следствие 3. Пусть верны предположения теоремы 1 и интегральные требования гладкости (25), (26) при $k = q+2$ на $\widetilde{G}_-$ и (21), (22) при $q > -1$ на $\widetilde{G}_+$. Тогда общими интегралами уравнения (1) на криволинейной первой четверти $\widetilde{G}_\infty$ во множестве классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений являются функции

$$u(x,t) = \tilde{f}_1(x + a_2 t) + \tilde{f}_2(x - a_1 t)) + \widehat{F}^{(0)}(x,t),\ (x,t) \in \widetilde{G}_\infty,\ q > -1, \tag{29}$$

где $\widehat{F}^{(0)}(x,t) = F_k^{(0)}(x,t)$ из (24) с $k = q+2$ на $\widetilde{G}_-$, $\widehat{F}^{(0)}(x,t) = F_{(q)}^{(0)}(x,t)$ из (5) с $q > -1$ на $\widetilde{G}_+$, $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции от ξ, η вида:

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(0),\ \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(0). \tag{30}$$

В следствии 3 дважды непрерывную дифференцируемость функций $\widehat{F}^{(0)}$ на $\widetilde{G}_\infty$ дают теорема 3 на $\widetilde{G}_-$, теорема 1 на $\widetilde{G}_+$ и следствие 2 на характеристике $x = a_1 t$. Функции (30) выводятся "методом погружения в решения с фиксированными значениями" из [4]. В общих интегралах (29) постоянная $f_2(0)$ сокращается, но очевидное значение $\tilde{f}_2(0) = 0$ из (30) существенно упрощает решение систем дифференциальных уравнений, например, при решении методом характеристик смешанной задачи для (1) в [4].

Замечание 3. В статье [3] установлены два общих интеграла классических решений одномерного неоднородного волнового уравнения (1) на $\widetilde{G}_\infty$ вида (29) только при $q = 1$ и $q = a_2/a_1$. Существование на $\widetilde{G}_\infty$ разрывных функций f, для которых интегралы (24) при $k = q+2$ и (5) при $q > -1$ не дважды непрерывно дифференцируемы на $\widetilde{G}_\infty$ не противоречит следствию 3 в силу обоснованной выше необходимости (обязательности) непрерывности функций f на $\widetilde{G}_\infty$ для всех классических решений уравнения (1) [3].

Следствие 4. Если функция f в уравнении (1) не зависит от x или t, то в предположениях теоремы 1 для дважды непрерывной дифференцируемости на $\widetilde{G}_\infty$ функций (24) с $k = q+2$ и (5) с $q > -1$ необходимо и достаточно непрерывности f по t или x.

Для функций f, зависящих только от t или x и непрерывных, гладкость (25), (26) при $k = q + 2$ и (21), (22) при $q > -1$ всегда выполняется [6, стр. 46–47], [9, стр. 27].

Замечание 4. Требования гладкости (27), (28) для классических решений (5) и (24) при $k = q + 2$, $q > -1$ уравнения (1) распространяются предельным переходом по f с более гладких $f \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$ на f с необходимой гладкостью (21), (22) и (25), (26), которая для $f \in C(\widetilde{G}_\infty)$ эквивалентна гладкости (22), (26) при $k = q + 2$, $q > -1$, (27). Здесь требования гладкости (22), (26) при $k = q + 2$ очевидно равносильны требованиям (28).

Заключение. В настоящей работе выведено более широкое множество локальных классических решений (24) в $\widetilde{G}_-$ и (5) в $\widetilde{G}_+$ при $q > -1$ одномерного неоднородного волнового уравнения (1) соответственно с необходимой гладкостью (25), (26) и (21), (22) его правой части f в криволинейной первой четверти плоскости $\widetilde{G}_\infty$. Они получены автором с помощью реализованного ранее обобщения метода корректировки пробных обобщенных решений с прямолинейной на криволинейную первую четверть плоскости.

В криволинейной первой четверти плоскости вычислены новые общие интегралы (29) неоднородного волнового уравнения (1) во множестве классических решений. С помощью каждого из полученных локальных решений вычисление общего интеграла неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости сводится к известному общему интегралу однородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости.

Множества локальных классических решений и общих интегралов, построенных в настоящей работе при всех $q > -1$ для одномерного неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости, обобщают случаи двух множеств из них при $q = 1$ и $q = a_2/a_1$ статьи [3]. Если правая часть f уравнения (1) зависит только от t или x, то для дважды непрерывной дифференцируемости функций (24) и (5) при $q > -1$ на $\widetilde{G}_\infty$ необходимо и достаточно лишь непрерывности f по t и x соответственно.

Список литературы

1. Бриш Н. И., Юрчук Н. И. 1971. Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференциальные уравнения, 7(6): 1017–1030.
2. Владимиров В. С. 1976. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука. 280.
3. Ломов И. С. 2022. Построение обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы. Дифференциальные уравнения, 58(11): 1471–1483.
4. Ломовцев Ф. Е. 2021. В криволинейной первой четверти плоскости метод корректировки пробных решений для минимальной гладкости правой части волнового уравнения с постоянными коэффициентами. Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта, 4(113): 5–22.
5. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. В. 2019. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта, 3(104): 5–17.
6. Ломовцев Ф. Е. 2015. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. Материалы Международной научной конференции "Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям". Ч. 2. (7-10 декабря 2015г.), 2: 74–75.
7. Ломовцев Ф. Е. 2023. Метод компенсации граничного режима правой частью телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в решении второй смешанной задачи на полупрямой. Веснік Гродзенскага дзяржаунага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне, 13(1): 39–63.
8. Ломовцев Ф. Е. 2017. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика, 3: 38–52.
9. Ломовцев Ф. Е. 2020. О методе корректировки пробных решений одномерного волнового уравнения в криволинейной четверти плоскости. Материалы Международной конференции "XXXII ВВМШ <Понтрягинские чтения-XXXI>"(3–9 мая 2020 г.) Воронеж : АНО <Наука-Юнипресс>: 126–129.
10. Ломовцев Ф. Е. 2021. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика, 1: 18–38.
11. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. 2018. Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии. Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта, 4(101): 18–28.
12. Новиков Е. Н. 2017. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и вторыми косыми производными. Автореф. дис. : кан-та физ.-мат. наук (01.01.02). ИМ НАН Беларуси.
13. Сабитов К. Б., Фадеева О.В. 2021. Колебания консольной балки. Прикладная математика & Физика, 53(1): 5–12. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-5-12.

14. Соболев С. Л. 1938. Об одной теореме функционального анализа. Математический сборник, 4 (46): 471–498.
15. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 2004. Уравнения математической физики. М., Наука. 798.
16. Хромов А. П. 2019. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала. Дифференциальные уравнения, 55(5): 717–731.
17. Хромов А. П. 2022. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения. Современные проблемы теории функций и их приложения, 21: 319–324.
18. Чеб Е. С., Селинская Е. С. 2020. О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвёртого порядка с одной кратной характеристикой. Прикладная математика & Физика, 52(1): 11–17. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-11-17.
19. Lomovtsev F. E. 2016. Solution of a Mixed Problem with Oblique Derivatives in the Boundary Conditions for the Inhomogeneous String Vibration Equation without Continuing the Data. Differential Equations, 52(8): 1093–1097.
20. Lomovtsev F. E., Spesivtseva K. A. 2021. Mixed Problem for a General 1D Wave Equation with Characteristic Second Derivatives in a Non-Stationary Boundary Mode. Mathematical Notes, 110(3): 329—338. © Pleiades Publishing, Ltd., 2021. Russian Text © The Author(s), 2021, published in Matematicheskie Zametki, 110(3): 345–357. ISSN 0001-4346, DOI: 10.1134/S0001434621090030.

References

1. Brish N. I., Yurchuk N. I. 1971. The Goursat problem for abstract linear differential equations of the second order. Differential Equations, 7(6): 1017–1030. (in Russian)
2. Vladimirov V. S. 1976. Generalized functions in mathematical physics. M., Science. 1976. 280. (in Russian)
3. Lomov I. S. 2022. Construction of a generalized solution of a mixed problem for telegraph equation: sequential and axiomatic approaches. Differential Equations, 58(11): 1471–1483. (in Russian)
4. Lomovtsev F. E. 2021. In the curvilinear first quarter of the plane, a correction method to trial solutions for the minimum smoothness of the right-hand side of the wave equation with constant coefficients. Vesnik Vitsebskaga jarjaunaga university, 4(113): 5–22. (in Russian)
5. Lomovtsev F. E., Lysenko V. V. 2019. Non-characteristic mixed problem for one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives. Vesnik Vitsebskaga jarjaunaga university, 3(104): 5–17. (in Russian)
6. Lomovtsev F. E. 2015. Method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string. Materials Int. scientific conf. "Sixth Bogdanovsky readings on ordinary differential equations". Part 2. (December 7-10, 2015), 2: 74–75. (in Russian)
7. Lomovtsev F. E. 2023. Boundary mode compensation method by the right-hand side of the telegraph equation with variable coefficients in solving the second mixed problem on the half-line. Bulletin of Grodzensk dzyarzhaunaga university named after Yanka Kupala. Series 2. Mathematics. Physics. Information, special equipment and kiravanne, 13(1): 39–63. (in Russian)
8. Lomovtsev F. E. 2017. Correction method for terst solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side. Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Computer science, 3: 38–52. (in Russian)
9. Lomovtsev F. E. 2020. On a correction method to trial solutions of a one-dimensional wave equation in a curvilinear quarter of a plane. Proceedings of Int. conf. "XXXII VVMSH <Pontryagin Readings-XXXI>"(May 3–9, 2020) Voronezh: ANO <Nauka-Unipress> : 126–129. (in Russian)
10. Lomovtsev F. E. 2021. The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line. Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Computer science, 1: 18–38. (in Russian)
11. Lomovtsev F. E., Ustilko E. V. 2018. Correctness criterion to the mixed problem for the general oscillation equation of semi-bounded string with non-stationary characteristic first oblique derivatives in the boundary condition. Vesnik Vitsebsk jarjaunaga university, 4(101): 18–28. (in Russian)
12. Novikov E. N. 2017. Mixed Problems for the Forced Vibration Equation of a Bounded String under Non-stationary Boundary Conditions with First and Second Oblique Derivatives. Abstract dis. : Candidate of Physics and Mathematics. Sciences (01.01.02). IM NAS of Belarus. (in Russian)
13. Sabitov K. B., Fadeeva O. V. 2021. Oscillations of a cantilever beam. Applied Mathematics & Physics, 53(1): 5–12. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-5-12. (in Russian)
14. Sobolev S. L. 1938. On a theorem of functional analysis. Mathematical collection, 4 (46): 471–498. (in Russian)
15. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. 2004. Equations of mathematical physics. M., Science. 798. (in Russian)
16. Khromov A. P. 2019. Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation in the case of an integrable potential. Differential Equations, 55(5): 717–731. (in Russian)
17. Khromov A.P. 2022. Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation. Modern problems of function theory and their applications, 21: 319–324. (in Russian)

18. Cheb E. S., Seminskaya E. S. 2020. On the classical solution of a mixed problem for a linear nonstrictly hyperbolic equation of the fourth order with one multiple characteristic. Applied Mathematics & Physics, 52(1): 11–17. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-11-17. (in Russian)
19. Lomovtsev F. E. 2016. Solution of a Mixed Problem with Oblique Derivatives in the Boundary Conditions for the Inhomogeneous String Vibration Equation without Continuing the Data. Differential Equations, 52(8): 1093–1097.
20. Lomovtsev F. E., Spesivtseva K. A. 2021. Mixed Problem for a General 1D Wave Equation with Characteristic Second Derivatives in a Non-Stationary Boundary Mode. Mathematical Notes, 110(3): 329-–338. © Pleiades Publishing, Ltd., 2021. Russian Text © The Author(s), 2021, published in Matematicheskie Zametki, 110(3): 345—357. ISSN 0001-4346, DOI: 10.1134/S0001434621090030.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.03.2023
Поступила после рецензирования 08.05.2023
Принята к публикации 10.05.2023

Received 27.03.2023
Revised 08.05.2023
Accepted 10.05.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ломовцев Фёдор Егорович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета, Белорусский государственный университет
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Республика Беларусь

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Fedor Lomovtsev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Cybernetics Mechanics and Mathematics Faculty, Belarusian State University, Minsk, Belarus.