Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 207–219.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 207–219.

УДК 519.46
MSC 22E15
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-207-219

О стратификации и топологической структуре классических компактных групп Ли

[1] **Берестовский В. Н.**, [2] **Никоноров Ю. Г.**

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4
vberestov@inbox.ru
[2] Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53
nikonorov2006@mail.ru

Аннотация. В статье осуществлена стратификация классических связных компактных групп Ли. Стратом наибольшей размерности каждой такой группы Ли является диффеоморфный образ ее алгебры Ли относительно преобразования Кэли, состоящий в точности из матриц, допускающих (обратное) преобразование Кэли. Дальнейшая стратификация производится на подмножестве исключительных матриц группы Ли, т. е. подмножестве всех матриц, не допускающих преобразования Кэли. Основное внимание уделяется группам Ли унитарных матриц. Как следствие, получено описание топологической структуры множеств исключительных унитарных операторов в двумерных и трехмерных комплексных векторных пространствах; первое из них реализовано физиками как конформная бесконечность пространства Минковского. Стратификация унитарных групп использует указанные в статье фундаментальные области действия их групп Вейля на максимальных торах и однородные пространства с геометрическими структурами – орбиты канонических унитарных матриц относительно действия унитарных групп сопряжениями.

Ключевые слова: гомотопическая группа, группа гомологий, исключительная матрица, неисключительная матрица, преобразование Кэли, страт, стратификация

Благодарности: Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF–2022–0006.

Для цитирования: Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. 2023. О стратификации и топологической структуре классических компактных групп Ли. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 207–219.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-207-219

Original Research

On the Stratification and Topological Structure of Classical Compact Lie Groups

[1] **Valeriĭ N. Berestovskiĭ**, [2] **Yuriĭ G. Nikonorov**

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

[1] Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS,
4 Acad. Koptyuga pr., Novosibirsk, 630090, Russia
vberestov@inbox.ru
[2] Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutina st., Vladikavkaz, 362025, Russia
nikonorov2006@mail.ru

Abstract. The authors realize the stratification of classical connected compact Lie groups. The stratum of the maximal dimension of any such Lie group is a diffeomorphic image of its Lie algebra with respect to the Cayley transform, consisting exactly of all matrices admitting the (inverse) Cayley transform. The further stratification is applied to the subset of exclusive matrices of the Lie group, i. e. the subset of all matrices that do not admit the Cayley transform. The main attention is paid to the Lie groups of unitary matrices. As a consequence, the authors obtained a description of topological structure for the sets of exclusive unitary operators in two-dimensional and three-dimensional complex vector spaces; the first of these sets is realized by physicists as the conformal infinity of the Minkowski space. The stratification of unitary groups uses actions of their Weyl groups on maximal tori and special homogeneous spaces with geometric structures, orbits of canonical unitary matrices with respect to the action of unitary groups by conjugations.

Keywords: Homotopy Group, Homology Group, Exclusive Matrix, Non-Exclusive Matrix, Cayley Transform, Stratum, Stratification

Acknowledgements: The work of the first author was carried out within the framework of the state task of the Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, project FWNF–2022–0006.

For citation: Berestovskiĭ V. N., Nikonorov Yu. G. 2023. On the Stratification and Topological Structure of Classical Compact Lie Groups. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 207–219. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-207-219

---

1. Введение. Классическими связными компактными группами Ли являются группы $SO(n)$, $n \geq 2$; $U(n)$, $n \geq 1$; $Sp(n)$, $n \geq 1$; состоящие из ортогональных унимодулярных, унитарных и симплектических матриц соответствующих размерностей.

Одним из мотивов написания этой статьи послужили вопросы из статьи [2].

Векторное пространство $\mathfrak{u}(n)$ всех косоэрмитовых $(n \times n)$-матриц есть алгебра Ли группы Ли $U(n)$ всех унитарных $(n \times n)$-матриц. Все матрицы из пространства $\mathfrak{u}(n)$ неисключительны, т. е. для них определено преобразование Кэли c [12]. Множество N неисключительных матриц из $U(n)$ открыто и всюду плотно в $U(n)$. Преобразования Кэли на $\mathfrak{u}(n)$ и N — взаимно обратные диффеоморфизмы $\mathfrak{u}(n)$ и N. Это известные результаты. Доказательства даны и в [2].

Пространство $\mathfrak{u}(2)$ с лоренцевой квадратичной формой det есть пространство-время Минковского M_0, соответствующая левоинвариантная лоренцева метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $U(2)$ биинвариантна, $c : \mathfrak{u}(2) \to U(2)$ — *причинное преобразование* и $M = U(2)$ — *причинная компактификация* пространства M_0 [27].

В [2] установлены топологическая, дифференциальная и геометрическая структуры множества исключительных матриц $U(2) \setminus N$ в $U(2)$; это множество физики называют *конформной бесконечностью пространства Минковского* [8]. На основе биинвариантности лоренцевой метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $U(2)$, в [2] доказано, что $U(2) \setminus N$ — объединение всех (замкнутых, диффеоморфных окружностям) изотропных геодезических в $(U(2), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ с началом $-I_2$. Те же результаты получены ранее другими методами в статьях А. Ядчика [22], [23].

В [2] был поставлен естественный вопрос:

Вопрос 1. *Какова структура множества $U(n) \setminus N$ всех исключительных матриц в $U(n)$ при $n \geq 3$, в частности при $n = 3$?*

Во втором разделе приводится некоторая информация о группах Ли $U(n)$ и $SU(n)$, в том числе из статьи [2].

В третьем разделе рассматриваются максимальные торы и группы Вейля компактных связных групп Ли. Указаны фундаментальные области действий групп Вейля на максимальных торах для групп Ли $U(n)$ и $SU(n)$.

В четвертом разделе рассматриваются каноническая форма унитарных матриц, однородные пространства — орбиты канонических унитарных матриц относительно действия унитарных групп Ли сопряжениями — и геометрические структуры на этих однородных пространствах.

Подмножества неисключительных и исключительных матриц в $U(n)$ инвариантны относительно действия группы Ли $SU(n) \subset U(n)$ сопряжениями.

В пятом разделе исследуются подмножества исключительных матриц в группах Ли $U(n)$, в том числе их стратификация, в примерах подробно рассматриваются случаи $n = 2$ и $n = 3$.

В шестом разделе приводятся сведения о гомотопических группах, группах гомологий и когомологий групп Ли $U(n)$ и $SU(n)$.

В седьмом разделе многие из результатов для групп Ли $U(n)$ и $SU(n)$ переносятся (как правило, без доказательств) на остальные классические связные компактные (матричные) группы Ли.

2. Группы Ли $U(n)$ и $SU(n)$. (Инволютивная) операция * применима ко всем комплексным матрицам и есть композиция транспонирования и комплексного сопряжения матриц. Комплексная $(n \times n)$-матрица A называется *эрмитовой* (соответств., *косоэрмитовой*), если $A^* = A$ $(A^* = -A)$. Комплексная $(n \times n)$-матрица B называется *унитарной*, если $B^* = B^{-1}$; они составляют *унитарную группу* $U(n)$.

Векторное пространство $\mathfrak{u}(n)$ всех косоэрмитовых $(n \times n)$-матриц со скобкой Ли $[\cdot,\cdot]$ — алгебра Ли группы Ли $U(n)$, а подалгебра $\mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{u}(n)$ бесследовых косоэрмитовых матриц — алгебра Ли группы Ли $SU(n) \subset U(n)$. Скалярное произведение $(X, Y) = \operatorname{tr}(X^*Y) = -\operatorname{tr}(XY)$ на $\mathfrak{u}(n)$ и $\mathfrak{su}(n)$ распространяется до биинвариантной римановой метрики $(\cdot,\cdot)$ на $U(n)$ и $SU(n)$.

Группа Ли $U(n)$ — связная, максимальная компактная подгруппа и вещественная форма связной комплексной группы Ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ невырожденных $(n \times n)$-матриц; $\dim(U(n)) = n^2$. Группа Ли $\mathrm{SU}(n) = U(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $n \geq 2$, – связная, максимальная компактная подгруппа и вещественная форма комплексной группы Ли $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ невырожденных $(n \times n)$-матриц с определителем 1, $\dim(\mathrm{SU}(n)) = n^2 - 1$. Алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ – комплексификации вещественных компактных алгебр Ли $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ простой группы Ли $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ – комплексная алгебра Ли типа A_{n-1}.

Отсюда и из теоремы 2 п. 5.2.1 в [6] вытекает, что $(\mathrm{GL}(n),\mathbb{C})$ диффеоморфна $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ диффеоморфна $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$ и гомотопические группы групп Ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ и $U(n)$ (соотв., групп Ли

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ и $\mathrm{SU}(n)$) совпадают. Группы Ли $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ и $\mathrm{SU}(n)$ связны и односвязны вследствие упражнений 3.2 и 3.6 главы 1 в [6]. Если I_n – единичная $(n\times n)$-матрица, то центры групп Ли равны

$$C(\mathrm{SU}(n)) = C(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})) = \left\{\exp\big(2\pi\mathbf{i}(k/n)\big)I_n \mid k=1,\dots,n\right\};$$

$$C(U(n)) = \left\{\exp(\mathbf{i}t)I_n \mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

изоморфен $U(1)$. Поэтому $U(n)$ редуктивна, а ее подгруппа $SU(n)$ проста.

Определен гомоморфизм групп Ли $\det : U(n)\to U(1)$ с ядром $SU(n)$ и короткой точной последовательностью групп Ли

$$1\to SU(n)\to U(n)\to U(1)\to 1\,.$$

Можно рассматривать $U(1)$ как диагональную подгруппу группы $U(n)$, состоящую из матриц вида $\mathrm{diag}\big(\exp(\mathbf{i}t),1,1,\dots,1\big)$, $t\in\mathbb{R}$. Поэтому $U(n)$ изоморфна полупрямому произведению $U(1)\leftthreetimes SU(n)$. Как следствие, группа $U(n)$ диффеоморфна $S^1\times SU(n)$, хотя группы Ли $U(n)$ и $U(1)\times SU(n)$ не изоморфны,

$$\pi_1(U(n)) = (\mathbb{Z},+),\quad \pi_m(U(n)) = \pi_m(SU(n)),\quad m\geq 2.$$

Целочисленные гомологии группы Ли $SU(n)$ вычислены Л. С. Понтрягиным (см. [9, Теорема 4]): полином Пуанкаре для группы Ли $SU(n)$ имеет вид

$$P(t)(SU(n)) = \prod_{k=1}^{n-1}(1+t^{2k+1}) = P(t)\left(\prod_{k=1}^{n-1}S^{2k+1}\right). \tag{1}$$

Второе равенство – следствие теоремы Кюннета. Таким образом, гомологии группы $SU(n)$ совпадают с гомологиями указанного произведения сфер, но сама группа Ли $SU(n)$ при $n\geq 3$ не диффеоморфна такому произведению [10]. Вследствие (1), теоремы Кюннета и диффеоморфности $U(n)$ и $S^1\times SU(n)$,

$$P(t)(U(n)) = \prod_{k=0}^{n-1}(1+t^{2k+1}) = P(t)\left(\prod_{k=0}^{n-1}S^{2k+1}\right). \tag{2}$$

3. Максимальные торы и группы Вейля. Теорема 1 [1]. *Максимальная связная коммутативная подгруппа T связной компактной группы Ли G замкнута и является тором. T включает центр CG группы G и является максимальной коммутативной подгруппой в G.*

Определение 1. *Подгруппа $T\subset G$ называется максимальным тором группы G. Коммутативная подалгебра $\mathfrak{t}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, соответствующая подгруппе T, называется картановской подалгеброй.*

Теорема 2 [1, 18]. *Любые два максимальных тора T_1, T_2 связной компактной группы Ли G сопряжены: существует элемент $g\in G$ такой, что $T_2 = gT_1g^{-1} := I(g)(T_1)$. При этом для любого элемента $g_0\in G$ и любого максимального тора $T\subset G$ существует элемент $g\in G$ такой, что $I(g^{-1})(g_0)\in T$.*

Элемент $g\in G$ называется *регулярным*, если компонента связности единицы $C(g)_e$ его централизатора $C(g)$ коммутативна и *сингулярным* в противном случае. Другими словами, $g\in G$ регулярен, если $C(g)_e$ — максимальный тор в G; это эквивалентно тому, что $\dim C(g) = \dim T$.

Группа Вейля $W = W(G)$ группы G — группа автоморфизмов ее максимального тора T, являющихся ограничениями внутренних автоморфизмов группы G. Группа W конечна и $W\cong N(T)/T$, где $N(T)\subset G$ – нормализатор тора T.

Максимальный тор $T\subset U(n)$ — множество диагональных $(n\times n)$-матриц вида

$$DU(n) = \mathrm{diag}(\exp\mathbf{i}\lambda_1,\dots,\exp\mathbf{i}\lambda_n) := \exp(\mathbf{i}\Lambda),\quad \Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n; \tag{3}$$

соответствующая картановская подалгебра $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{u}(n)$ состоит из $(n\times n)$-матриц

$$\mathrm{diag}(\mathbf{i}\lambda_1,\dots,\mathbf{i}\lambda_n) := \mathbf{i}\Lambda,\quad \Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Максимальный тор $T_0\subset SU(n)$ — множество диагональных $(n\times n)$-матриц вида (3), где $\Sigma\lambda_k = 0$. Соответствующая картановская подалгебра $\mathfrak{t}_0\subset\mathfrak{su}(n)$ состоит из $(n\times n)$-матриц вида (4), где $\Sigma\lambda_k = 0$.

Группа Вейля $W = W(U(n)) = W(SU(n))$ — симметрическая группа (перестановок) на множестве $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$. Ее порядок $|W| = n!$

Рассмотрим многогранник

$$\overline{C} := \Big\{\Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\mid \pi\geq\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots\geq\lambda_n\geq-\pi\Big\}. \tag{5}$$

Многогранник $\overline{C}$ имеет $n+1$ гиперграней $\lambda_1=\pi$, $\lambda_n=-\pi$, $\lambda_k=\lambda_{k+1}$, $k=1,\dots,n-1$, является n-мерным симплексом, и включает $(n-1)$-мерный симплекс S, определяемый дополнительным условием $\Sigma\lambda_k = 0$.

Предложение 1. *Множество S — $(n-1)$-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$. При этом*

$$W(\exp(\mathbf{i}S)) = T_0, \quad I(SU(n))(\exp(\mathbf{i}S)) = SU(n); \tag{6}$$

$\exp(\mathbf{i}S)$ — фундаментальная область относительно действия группы Вейля W на максимальном торе $T_0 \subset SU(n)$ и действия группы $I(SU(n))$ на $SU(n)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что $\overline{C}$ — n-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$, и определения S. Первое равенство в (6) и утверждение о фундаментальной области для W следуют из вида S и элементов группы W. Отсюда и из теоремы 2 вытекают остальные утверждения предложения. □

Полезно сравнить симплекс S со стандартной камерой Вейля алгебры $\mathfrak{su}(n)$, [16, Глава VII, §6] и с клетками для аффинной группы Вейля [16, Глава VII,§7].

По определению, P — результат склейки гиперграней $\{\Lambda \in \overline{C} \mid \lambda_n = -\pi\}$ и $\{\Lambda \in \overline{C} \mid \lambda_1 = \pi\}$ симплекса $\overline{C}$. Более точно, P — фактор-пространство симплекса $\overline{C}$ по отношению эквивалентности $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \sim (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$, если $\lambda_n = -\pi$, $\tilde{\lambda}_1 = \pi$, $\lambda_i = \tilde{\lambda}_{i+1}$ для $i = 1, \dots, n-1$.

Предложение 2. *Справедливы равенства*

$$W(\exp(\mathbf{i}P)) = T, \quad I(U(n))(\exp(\mathbf{i}P)) = I(SU(n))(\exp(\mathbf{i}P)) = U(n)$$

и $\exp(\mathbf{i}P)$ — фундаментальная область для действия группы Вейля W на максимальном торе $T \subset U(n)$ и действия группы $I(U(n)) = I(SU(n))$ на $U(n)$.

4. О каноническом виде унитарных матриц. Любая матрица $B \in U(n)$ унитарно подобна единственной матрице вида

$$A = \operatorname{diag}\bigl(\exp(\lambda_1\mathbf{i}), \exp(\lambda_2\mathbf{i}), \dots, \exp(\lambda_n\mathbf{i})\bigr) \tag{7}$$

для некоторых действительных чисел λ_k, где $\pi \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > -\pi$, т. е. $A \in \exp(\mathbf{i}P)$. Матрицы вида (7) мы будем называть *каноническими*, а каноническую матрицу A, унитарно подобную заданной матрице $B \in U(n)$, будем называть *канонической формой* унитарной матрицы B.

Зафиксируем некоторую каноническую матрицу A. Будем говорить, что A имеет тип $t = t(A) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, где последний вектор состоит из неповторяющихся чисел λ_k, расположенных в порядке убывания. Степень $S = S(A)$ матрицы A есть (упорядоченный) набор $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ кратностей соответствующих α_i. Заметим, что $d_1 + \dots + d_m = n$, $\det(A) = \exp\bigl((d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \dots + d_m\alpha_m)\mathbf{i}\bigr)$.

Для фиксированной канонической матрицы $V \in \mathfrak{u}(n)$, отображение $\mathbb{R} \mapsto U(n)$, $s \mapsto \exp(sV)$ может быть периодическим (если все α_i соизмеримы) или инъективным (если α_i не соизмеримы).

Орбита $\operatorname{Orb}(A)$ матрицы A под действием $I(U(n))$ ($A \mapsto gAg^{-1}, g \in U(n)$) есть однородное пространство $U(n)/C(A)$, где $C(A)$ — централизатор матрицы A в $U(n)$. Этот централизатор имеет вид $\operatorname{diag}(C_1, C_2, \dots, C_m)$, $C_l \in U(d_l)$, $l = 1, \dots, m$. Будем его обозначать как $U(d_1) \times \dots \times U(d_m)$. Так что

$$\operatorname{Orb}(A) = U(n)/(U(d_1) \times \dots \times U(d_m)) \cong SU(n)/S(U(d_1) \times \dots \times U(d_m)). \tag{8}$$

Таким образом, вид орбиты $\operatorname{Orb}(A)$ канонической матрицы $A \in U(n)$ зависит только от набора кратностей $(d_1, d_2, \dots, d_m)$, соответствующих α_i.

Многообразие (8) допускает структуру однородного кэлерова алгебраического многообразия вследствие теоремы 2 в [19]: Пусть G — компактная полупростая группа Ли, U — централизатор некоторого тора в G. Тогда G/U — однородное кэлерово алгебраическое многообразие. Многообразие алгебраическое, если оно комплексно аналитически диффеоморфно комплексному подмногообразию некоторого комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}^N$.

С геометрической точки зрения (8) является многообразием флагов типа $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ в $\mathbb{C}^n$, т. е. наборов $(P_1, \dots, P_m)$ взаимно ортогональных относительно эрмитовой метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ подпространств пространства $\mathbb{C}^n$ размерностей $\dim P_k = d_k$, $k = 1, \dots, m$. Определенное так многообразие флагов изоморфно многообразию обобщенных флагов пространства $\mathbb{C}^n$ в обычном смысле [3].

Размерность центра группы $S(U(d_1) \times \dots \times U(d_m))$ равна $m-1$. Поэтому орбиты, для которых эта размерность равна единице, имеют вид

$$SU(n)/S(U(p) \times U(q)) \cong U(n)/(U(p) \times U(q)), \quad p + q = n,$$

и являются грассмановыми многообразиями комплексных p-подпространств пространства $\mathbb{C}^n$. Одно из них — комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^{n-1}$, снабженное при $p = 1$ канонической комплексной структурой, а при $h = n-1$ — сопряженной комплексной струкурой (они экивалентны). Известно, что нормальные метрики этих многообразий являются кэлеровыми относительно канонической комплексной структуры и симметрическими (см. п. 8.86 в [3]), в частности, метриками Кэлера — Эйнштейна.

Предложение 3. *Пусть $d := (d_1, \dots, d_m)$ — произвольный фиксированный набор натуральных чисел, являющийся разбиением числа n, т. е. $d_1 + \dots + d_m = n$. Тогда множество всех векторов $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P$, группирующихся в наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ убывающих чисел с указанными кратностями $(d_1, \dots, d_m)$, выпукло и* *является подмножеством единственной минимальной грани $f_d \subset P$. При этом внутренность $\mathrm{Int}(f_d)$ грани f_d есть множество всех указанных векторов Λ с дополнительным условием $\alpha_1 < \pi$; все оставшиеся векторы Λ составляют внутренность грани $f_d \cap P_\pi$, где $P_\pi = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P \mid \lambda_1 = \pi\}$.*

Теорема 3. *Множество орбит*

$$I(U(n))\Big(\exp\big(\mathbf{i}\,\mathrm{Int}(f_d)\big)\Big) \cong \Big(U(n)/(U(d_1) \times \cdots \times U(d_m))\Big) \times \mathrm{Int}(f_d). \tag{9}$$

Множество орбит

$$I(U(n))\Big(\exp\big(\mathbf{i}\,\mathrm{Int}(f_d \cap P_\pi)\big)\Big) \cong \Big(U(n)/(U(d_1) \times \cdots \times U(d_m))\Big) \times \mathrm{Int}(f_d \cap P_\pi). \tag{10}$$

Здесь орбиты снабжаются индуцированной дифференциальной структурой из $U(n)$, а символ $\cong$ обозначает диффеоморфность.

Следствие 1. *Указанные в теореме 3 орбиты первого и второго типа задают стратификацию множеств неисключительных и исключительных матриц соответственно из $U(n)$, а теорема указывает диффеоморфность соответствующих стратов.*

5. Множество $U(n) \setminus N$ исключительных матриц. Вещественная или комплексная $(n \times n)$-матрица A, $n \geq 2$, *неисключительная*, если $\det(I + A) \neq 0$. Тогда *преобразование Кэли* $c(A) := (I - A)(I + A)^{-1}$ [12].

Лемма 1 [12, 2]. *Если матрица A неисключительная, то и матрица $B = c(A)$ неисключительная. При этом $c(c(A)) = A$.*

Теорема 4 [2]. *Все матрицы из множества $\mathfrak{u}(n)$ косоэрмитовых $(n \times n)$-матриц неисключительны. Множество N неисключительных матриц из $U(n)$ открыто и всюду плотно в $U(n)$. Преобразования Кэли на $\mathfrak{u}(n)$ и N — взаимно обратные диффеоморфизмы $\mathfrak{u}(n)$ и N.*

Есть два простых описания множества $U(n) \setminus N$ исключительных матриц:

1. $U(n) \setminus N$ состоит из матриц $B \in U(n)$ с собственным числом -1.
2. $U(n) \setminus N$ состоит из матриц $B \in U(n)$ таких, что $\det(I_n + B) = 0$.

Но эти простые описания не дают полного ответа на вопрос 1 и ничего не говорят о топологической и дифференциальной структуре множества $U(n) \setminus N$.

Предложение 4. *Группа $U(n)$ является вещественной алгебраической группой. Множество $U(n) \setminus N$ — вещественное алгебраическое многообразие.*

Доказательство. Первое утверждение — следствие того, что условие $B \in U(n)$ задается конечным числом полиномиальных уравнений второго порядка от вещественных переменных: вещественных и мнимых частей элементов матрицы B. Второе утверждение вытекает из того, что матрица $B \in U(n) \setminus N$, если дополнительно $\det(I_n + B) = 0$, т. е. вещественные и мнимые части элементов матрицы B еще удовлетворяют двум полиномиальным уравнениям n-го порядка. □

Теорема 5. *Для всех $n \geq 2$,*

$$U(n) \setminus N = \Big\{-g \exp(s\sigma) g^{-1} \mid g \in SU(n),\ \sigma \in \mathfrak{t},\ \det \sigma = 0,\ s \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Доказательство. Пусть $g \in SU(n)$, $\sigma \in \mathfrak{t}$, $\det \sigma = 0$ и

$$B = -g \exp(s\sigma) g^{-1}.$$

Тогда $\sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1 \mathbf{i}, \dots, \lambda_n \mathbf{i})$, $\lambda_l = 0$ для некоторого l, $1 \leq l \leq n$, l-й элемент у матрицы $g^{-1}Bg = \mathrm{diag}(-\exp(s\lambda_1 \mathbf{i}), \dots, -\exp(s\lambda_n \mathbf{i}))$ равен -1 и

$$\det(I_n + B) = \det(g^{-1}(I_n + B)g) = \det(I_n + g^{-1}Bg) = 0.$$

Пусть теперь $B \in U(n) \setminus N$, т. е. $\det(I_n + B) = 0$, $B \in U(n)$. По теореме 2, существует элемент $g \in U(n)$ такой, что

$$g^{-1}Bg = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_k \in U(1), \quad k = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Так как $U(n) = U(1) I_n SU(n)$, то можно считать, что $g \in SU(n)$. Далее,

$$0 = \det(I_n + B) = \det(g^{-1}(I_n + B)g) = \det(I_n + g^{-1}Bg).$$

Тогда вследствие (11), существуют $l \in \{1, \dots, n\}$ с $\varepsilon_l = -1$ и $\lambda_l \in \mathbb{R}$, $\lambda_l = 0$:

$$-g^{-1}Bg = \exp(\sigma) = g^{-1}(-\exp(\sigma))g, \sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1 \mathbf{i}, \dots, \lambda_n \mathbf{i}) \Leftrightarrow$$

$$B = -g \exp(\sigma) g^{-1} = g(-\exp \sigma) g^{-1}, \quad g \in SU(n), \quad \sigma \in \mathfrak{t}, \quad \det \sigma = 0, \tag{12}$$

что и требовалось. □

Каждый элемент $\sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathbf{i}, \dots, \lambda_n\mathbf{i}) \in \mathfrak{t}$ с условием $\det\sigma = 0$ имеет вид

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_0, \sigma_1 = \Sigma_{k=1}^n(\lambda_k/n)\,\mathrm{diag}(\mathbf{i}, \dots, \mathbf{i}) \in \mathfrak{t}_1, \quad \sigma_0 = \sigma - \sigma_1 \in \mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{su}(n), \tag{13}$$

$\mathfrak{t}_1$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{t}_0$ — алгебра Ли максимального тора T_0 в $SU(n)$,

$$-g\exp(s\sigma)g^{-1} = -\exp(s\sigma_1)g(\exp(s\sigma_0))g^{-1},\ s \in \mathbb{R},\ g \in SU(n),\ \exp(s\sigma_0) \in T_0.$$

Для каждого ненулевого элемента $\sigma_0 \in \mathfrak{t}_0$ существует, и не единственный, элемент $\sigma_1 \in \mathfrak{t}_1$ такой, что $\det\sigma = 0$ для $\sigma = \sigma_1 + \sigma_0$.

Если $n = 2$ и $\sigma_0 = \mathrm{diag}(\mathbf{i}, -\mathbf{i})$, то можно взять $\sigma_1 = \mathrm{diag}(\mathbf{i}, \mathbf{i})$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_0 = \mathrm{diag}(2\mathbf{i}, 0)$. Для каждого элемента $g \in SU(2)$, $-g(\exp(s\sigma))g^{-1}$, $s \in \mathbb{R}$— замкнутая изотропная геодезическая с началом $-I_2$ и периодом π относительно лоренцевой метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из введения. Кроме того, максимальный тор $T_0 \subset SU(2)$ — окружность. Отсюда и из теоремы 5 вытекает утверждение из введения

Предложение 5 [2]. *$U(2) \setminus N$ — объединение всех (замкнутых, диффеоморфных окружностям) изотропных геодезических в $(U(2), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ с началом $-I_2$.*

Существенные отличия для групп Ли $U(n)$, $n \geq 3$, от случая $n = 2$ состоят в том, что 1-параметрические подгруппы $\exp(s\sigma) \subset T$, $s \in \mathbb{R}$, $\det\sigma = 0$, из теоремы 5 могут быть незамкнутыми или быть подгруппами тора T_0. Отсюда следует, что *при $n \geq 3$ нет никакого аналога предложения 5.*

Существует единственная матрица $\exp(\tilde\sigma)$ в орбите матрицы $-\exp\sigma$, где $\det\sigma = 0$, относительно действия группы $W(U(n))$ следующего вида:

$$\exp(\tilde\sigma) := \mathrm{diag}\big(\exp(\lambda_1\mathbf{i}), \dots, \exp(\lambda_n\mathbf{i})\big),\ \tilde\sigma \in \mathfrak{t},\ \lambda_1 = \pi \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > -\pi. \tag{14}$$

Определение 2. *Стратификация St гладкого компактного многообразия M определяется следующим образом: Задается убывающая последовательность замкнутых в M подмножеств $X_0 = M, X_1, \dots, X_m$ такая, что*

1) $\dim(X_k) = l_k > \dim(X_{k+1}) = l_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$;

2) $S_k = X_k \setminus X_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$; $S_m = X_m$— конечное дизъюнктное семейство связных открытых в X_k, $k = 0, 1, \dots, m$, гладких подмногообразий многообразия M размерности l_k, называемых стратами стратификации St;

3) Если страт $\sigma \subset X_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, то $\overline{\sigma} \setminus \sigma \subset X_{k+1}$.

Замечание 1. Стратификация St многообразия M дает специальное клеточное разбиение, если для каждого ее страта $\sigma \subset X_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, существует непрерывное отображение $f_\sigma : B^{l_k}(0,1) \to X_k$, где $B^{l_k}(0,1)$ — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^{l_k}$ с центром в нуле, такое, что f_σ отображает внутренность шара гомеоморфно на σ, а $f_\sigma(S^{l_k-1}) = \overline{\sigma} \setminus \sigma$. Тогда страты являются клетками получаемого клеточного разбиения.

Вопрос 2. *Является ли стратификация St компактного гладкого многообразия M его клеточным разбиением, если каждый ее страт $\sigma \in X_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, диффеоморфен открытому шару $U^{l_k}(0,1) \subset \mathbb{R}^{l_k}$?*

Множество $U(n) \setminus N$ есть множество всех матриц вида (12). Оно имеет некоторые сингулярности. Поэтому желательно осуществить его стратификацию. Для канонической матрицы $A \in U(n)$ включение $A \in U(n) \setminus N$ эквивалентно равенству $\alpha_1 = \pi$, см. (14); $A \in N$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 < \pi$. Объединение всех орбит $\mathrm{Orb}(A)$ для канонических матриц A с условием $\alpha_1 = \pi$ ($\alpha_1 < \pi$) есть множество всех исключительных (неисключительных) унитарных матриц.

Стратификация двух множеств матриц дается в теореме 3 и следствии 1. Другую, более удобную, их стратификацию дают результаты далее.

Предложение 6. *Множество неисключительных матриц $N \subset U(n)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$ и является при этом дизъюнктным объединением орбит относительно присоединенного действия $U(n)$ на себе точек из множества $\exp(\mathbf{i}P_0)$,*

$$P_0 := \big\{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pi > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > -\pi\big\} \subset P. \tag{15}$$

Доказательство. Поскольку N является диффеоморфным образом пространства косоэрмитовых матриц при преобразовании Кэли, а упомянутое пространство очевидно диффеоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$, то мы получаем первое утверждение. Второе утверждение немедленно следует из описания спектра унитарных матриц. □

Для каждого $i = 0, 1, 2, \dots, n$ рассмотрим следующее подмножество в $U(n)$:

$$V_i = \{A \in U(n) \mid A \text{ имеет собственное число } -1 \text{ кратности } i\}. \tag{16}$$

Другими словами, V_i — это множество матриц $A \in U(n)$ таких, что ранг матрицы $A + I_n$ равен $n - i$. Очевидно, что $V_0 = N$, $V_n = \{-I_n\}$.

Теорема 6. *Каждое множество V_i диффеоморфно*

$$\Big(U(n)/U(i) \times U(n-i)\Big) \times \mathbb{R}^{(n-i)^2},\ \ i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{17}$$

В частности, V_1 *диффеоморфно* $\mathbb{C}P^{n-1}\times\mathbb{R}^{(n-1)^2}$ *и* $\dim(V_1)=n^2-1$.

Доказательство. Случай $i=0$ рассмотрен в предложении 6. Для каждого фиксированного $i=1,2,\dots,n$ имеем следующее описание: V_i — это множество матриц из $U(n)$, унитарно подобных матрицам

$$D_\lambda := \exp\Big(\mathrm{diag}\big(\exp(\lambda_1\mathbf{i}),\exp(\lambda_2\mathbf{i}),\dots,\exp(\lambda_n\mathbf{i})\big)\Big)\in U(n), \tag{18}$$

для $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ из множества

$$P_i := \{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n \mid \lambda_1=\dots=\lambda_i=\pi>\lambda_{i+1}\geq\dots\geq\lambda_n>-\pi\}\subset P. \tag{19}$$

Централизатор такой матрицы в $U(n)$ относительно действия сопряжениями содержится в группе $U(i)\times U(n-i)\subset U(n)$. Согласно предложению 6, образ P_i при сопряжениях матрицами из $U(i)\times U(n-i)$ диффеоморфен $\mathbb{R}^{(n-i)^2}$. Если же мы рассмотрим P_i при сопряжениях матрицами из $U(n)$, то очевидно получим локально тривиальное расслоение над $\mathbb{R}^{(n-i)^2}$ со слоем $U(n)/(U(i)\times U(n-i))$. Поскольку база расслоения стягиваема в точку, это расслоение тривиально, т. е. сводится к прямому произведению $U(n)/(U(i)\times U(n-i))$ и $\mathbb{R}^{(n-i)^2}$ (см., например, [13, теорема 14.1]). □

Теорема 7. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Каждая точка множества V_j *является предельной точкой для каждого множества* V_i *при* $n\geq j>i\geq 1$, *а также для множества* N.
2) $W_i:=\bigcup_{k=i}^n V_k$ *— замкнутое множество в* $U(n)$ *для всех* $i=1,2,\dots,n$;
3) Каждое множество V_i *является связным и открытым подмножеством в множестве* W_i, $i=1,2,\dots,n$;
4) Каждое множество V_i *является гладким подмногообразием в* $U(n)$ *при* $i=1,2,\dots,n-1$;
5) Размерность V_i *равна* $n^2-i^2\leq n^2-1=\dim(U(n)\setminus N)$, $i=1,2,\dots,n$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) сразу следуют из описания спектра соответствующих матриц.

Ясно, что V_i — множество матриц из $U(n)$, унитарно подобных матрицам вида

$$A=\mathrm{diag}\big(\exp(\lambda_1\mathbf{i}),\exp(\lambda_2\mathbf{i}),\dots,\exp(\lambda_n\mathbf{i})\big)$$

для некоторых действительных чисел λ_i, где $\pi=\lambda_1=\dots=\lambda_i>\lambda_{i+1}\geq\dots\geq\lambda_n>-\pi$. Поскольку множество векторов $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ с этим свойством образует связное множество в $\mathbb{R}^n$, а $U(n)$ — связная группа Ли, то V_i является связным. Кроме того, при небольшом шевелении матрицы $A\in V_i$ в $U(n)$, ранг матрицы $A+I_n$ не меняется. Это рассуждение завершает доказательство утверждения 3).

Утверждения 4) и 5) являются простыми следствиями теоремы 6. □

Предложение 7. *Для всех натуральных* $i<n^2-1$ *справедливо равенство* $\pi_i(U(n)\setminus N)=\pi_i(U(n))$ *для гомотопических групп.*

Доказательство. Первые сомножители в правой части формулы (8) при $i=1,\dots,n$ являются грассмановыми многообразиями комплексных i-мерных подпространств пространства $\mathbb{C}^n$, клетки Шуберта которых задают их клеточные разбиения. Страты (8) вместе с этими клеточными разбиениями превращают замкнутое подмножество $U(n)\setminus N\subset U(n)$ в клеточный комплекс размерности n^2-1. Открытое подмногообразие $N\subset U(n)$, диффеоморфное $\mathbb{R}^{n^2}$, можно считать клеткой размерности n^2, подклеиваемой по ее границе к $U(n)\setminus N$ согласно структуре стратов (8), что дает клеточное разбиение группы Ли $U(n)$.

Согласно известному результату о гомотопиях вложенных остовов (см., например, Теорему 6.11 в [14]), мы получаем требуемое утверждение. □

Пример 1. Рассмотрим случай $n=2$. Каноническая матрица имеет следующий вид: $A=\mathrm{diag}\big(\exp(\lambda_1\mathbf{i}),\exp(\lambda_2\mathbf{i})\big)$, $\pi\geq\lambda_1\geq\lambda_2>-\pi$. При этом A исключительна, если либо $\lambda_1=\lambda_2=\pi$, либо $\lambda_1=\pi>\lambda_2>-\pi$. В первом случае получаем матрицу $A=-I_2$, а во втором матрицы вида $A_t=\mathrm{diag}(-1,\exp(t\mathbf{i}))$ при $t\in(-\pi,\pi)$. Централизатор матрицы $A=-I_2$ совпадает с $U(2)$. А централизатор матрицы A_t равен $U(1)\times U(1)=\mathrm{diag}(U(1),U(1))\subset U(2)$. Понятно, что $U(2)/(U(1)\times U(1))$ диффеоморфно S^2 (см., например, [16, Глава X, § 6, п. 10]). При $t\to\pm\pi$ матрицы A_t стремятся к $A=-I_2$. Поэтому пространство исключительных матриц при $n=2$ имеет простое описание. Зададим на $S^1\times S^2$, где $S^1=U(1)$, отношение эквивалентности следующим образом: $(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2)$ равносильно тому, что $a_1=a_2=-1$, а $b_1,b_2\in S^2$ произвольны. Интересующее нас пространство исключительных матриц гомеоморфно фактор-пространству $S^1\times S^2$ по указанному отношению эквивалентности.

Пример 2. Рассмотрим теперь случай $n=3$. Каноническая матрица имеет следующий вид: $A=\mathrm{diag}\big(\exp(\lambda_1\mathbf{i}),\exp(\lambda_2\mathbf{i}),\exp(\lambda_3\mathbf{i})\big)$, $\pi\geq\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3>-\pi$. При этом A исключительна в четырех взаимно исключающих случаях: 1) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\pi$, 2) $\lambda_1=\lambda_2=\pi>\lambda_3>-\pi$, 3) $\lambda_1>\lambda_2=\lambda_3>-\pi$, 4) $\lambda_1=\pi>\lambda_2>\lambda_3>-\pi$.

В первом случае получаем матрицу $A=-I_3$. Во втором и третьем случаях получаем соответственно матрицы вида $A_t=\mathrm{diag}\big(-1,\exp(t\mathbf{i}),\exp(t\mathbf{i})\big)$ при $t\in(-\pi,\pi)$ и $A_s=\mathrm{diag}\big(-1,-1,\exp(s\mathbf{i})\big)$ при $s\in(-\pi,\pi)$. Наконец, в четвертом случае мы получаем двухпараметрическое семейство матриц $A_{t,s}=\mathrm{diag}(-1,\exp(t\mathbf{i}),\exp(s\mathbf{i}))$ при $t,s\in(-\pi,\pi)$, $t>s$.

Централизатор матрицы $A = -I_3$ совпадает с $U(3)$. Централизаторы матриц A_t и A_s равны соответственно $U(1)\times U(2) = \mathrm{diag}(U(1), U(2)) \subset U(3)$ и $U(2)\times U(1) = \mathrm{diag}(U(2), U(1)) \subset U(3)$. Тогда пространства $U(3)/(U(2)\times U(1))$ и $U(3)/(U(1)\times U(2))$ диффеоморфны двумерному комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^2$ (см., например, [16, Глава X, § 2, п. 3]). При $t \to \pm\pi$ $(s \to \pm\pi)$ матрицы A_t (A_s) стремятся к $A = -I_3$. Орбита любой матрицы $A_{t,s}$ имеет вид $U(3)/(U(1)\times U(1)\times U(1))$ и является шестимерным пространством Уоллаха W_6, см., например, [17, 29].

Полезно рассмотреть треугольник $\Delta = \{(t,s)\,|\,\pi \ge t \ge s \ge -\pi\}$ на плоскости (t,s) с вершинами $A = (-\pi,-\pi)$, $B = (\pi,\pi)$ и $C = (\pi,-\pi)$. Три вершины этого треугольника соответствуют случаю 1) (матрице $-I_3$). Внутренние точки сторон AC и CB соответствуют случаю 2), поскольку точки вида $(\mu,-\pi)$ и (π,μ) естественно отождествляются для любого $\mu \in (-\pi,\pi)$. Внутренние точки стороны AB соответствуют случаю 3), а внутренние точки треугольника Δ соответствуют случаю 4).

Таким образом $U(n)\setminus N$ при $n = 3$ строится следующим образом: К множеству $\mathrm{int}(\Delta)\times W_6$ = подклеиваются два экземпляра множества $(-1,1)\times\mathbb{C}P^2$, при этом интервал $(-1,1)$ в первом случае подклеивается к внутренности стороны AB, а во втором — к отождествленным друг с другом внутренностям двух других сторон треугольника; наконец на последнем этапе подклеивается одна точка (соответствует отождествленным трем вершинам треугольника Δ). Заметим, что W_6 естественно представляется как локально тривиальное расслоение над $\mathbb{C}P^2 = U(3)/(U(2)\times U(1))$ со слоем $S^2 = U(2)/(U(1)\times U(1))$.

Можно доказать, что в результате склеивания $\mathrm{int}(\Delta)\times W_6$ и первого экземпляра $(-1,1)\times\mathbb{C}P^2$ получается $(-1,1)^4\times\mathbb{C}P^2$, см. теорему 6 выше.

Пример 3. Пусть $A \in \mathfrak{u}(n)$, $r(A)$ — максимум из модулей собственных значений матрицы A. Тогда существует $s \in U(n)$ такой, что $\mathrm{Ad}(s)(A) = sAs^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathbf{i},\dots,\lambda_k\mathbf{i},...,\lambda_n\mathbf{i})$, где все λ_i вещественны и упорядочены по убыванию. При этом $r(A) = \max\{|\lambda_1|,|\lambda_n|\}$.

Понятно, что

$$\mathrm{Ad}(s)(I_n \pm A) = I_n \pm \mathrm{Ad}(s)(A) = \mathrm{diag}(1\pm\lambda_1\mathbf{i},\dots,1\pm\lambda_k\mathbf{i},...,1\pm\lambda_n\mathbf{i})$$

и

$$\mathrm{Ad}(s)\big(I_n + (I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big) = s\big(I_n + (I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big)s^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{2}{1+\lambda_1\mathbf{i}},\dots,\frac{2}{1+\lambda_k\mathbf{i}},\dots,\frac{2}{1+\lambda_n\mathbf{i}}\right).$$

Заметим, что $\prod_{k=1}^n\big(1+\lambda_k\mathbf{i}\big) \to \infty$ равносильно тому, что $\prod_{k=1}^n\sqrt{1+|\lambda_k|^2} \to \infty$ или же тому, что $r(A) = \max\{|\lambda_1|,|\lambda_n|\} = \max\{|\lambda_k|\,|\,k = 1,\dots,n\} \to \infty$. Теперь очевидно, что

$$\det\big(I_n + (I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big) = 2^n\left(\prod_{k=1}^n\big(1+\lambda_k\mathbf{i}\big)\right)^{-1} \to 0$$

тогда и только тогда, когда $r(A) = \max\{|\lambda_1|,|\lambda_n|\} \to \infty$. Отметим, что вместо $r(A)$ можно рассматривать значение любой матричной нормы на матрице $A \in \mathfrak{u}(n)$.

Поскольку $\lambda_k = 0$ равносильно $\frac{2}{1+\lambda_k\mathbf{i}} = 2$, то кратность нулевого собственного значения матрицы A совпадает с кратностью собственного значения 2 матрицы $I_n + (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

6. О топологии групп Ли $U(n)$ и $SU(n)$. Подробное описание топологических свойств групп $U(n)$ и $SU(n)$ можно найти в [26] (равно как и во многих других источниках).

Естественная проекция $U(n+1) \to U(n+1)/U(n) \cong S^{2n+1}$ при вложении $U(n) \ni A \mapsto \mathrm{diag}(A,1) \in U(n+1)$ является расслоением Серра, что влечет точность гомотопической последовательности

$$\dots \to \pi_{l+1}(S^{2n+1}) \to \pi_l(U(n)) \to \pi_l(U(n+1)) \to \pi_l(S^{2n+1}) \to \cdots. \tag{20}$$

Поскольку $\pi_l(S^{2n+1}) = 0$ при $l \le 2n$, то $\pi_l(U(n+1)) = \pi_l(U(n))$ для всех $l < 2n$. Если при этом l нечетно, то $\pi_l(U(n)) = \mathbb{Z}$ и $\pi_l(U(n)) = 0$, если l четно [20], [28]. Р. Ботт вычислил также $\pi_{2n}(U(n)) = \mathbb{Z}_{n!} = \mathbb{Z}/n!\mathbb{Z}$, см. [28] и ссылку в [20] (теорема Бореля – Хирцебруха в терминологии статьи [28]). Известно, что $\pi_2(G) = 0$ для любой группы Ли G. В [28] и [24] доказано, что

$$\pi_{2n+1}(U(n)) = \mathbb{Z}_2,\ n = 2k \ge 2; \quad \pi_{2n+1}(U(n)) = 0,\ n = 2k+1 \ge 3;$$

$$\pi_{2n+2}(U(n)) = \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_{(n+1)!},\ n = 2k \ge 4; \quad \pi_{2n+2}(U(n)) = \mathbb{Z}_{(n+1)!/2},\ n = 2k+1 \ge 3.$$

В [25] вычислены p-примарные компоненты групп $\pi_{2n+k}(U(n))$, $k = 3,4,5$ для простых чисел p; $\pi_{2n+5}(SU(n)) = \pi_{2(n+1)+3}(SU(n+1))$, $n \ge 3$, вследствие точности гомотопической последовательности (20) и равенств $\pi_{m+4}(S^m) = 0, m \ge 6$; $\pi_{m+5}(S^m) = 0, m \ge 7$ [15]. Заметим, что также $\pi_{m+12}(S^m) = 0$, $m \ge 14$ [15].

Поскольку $SU(2)$ диффеоморфна S^3, то $\pi_k(SU(2)) = \pi_k(S^3)$. По теореме В. Гуревича, $\pi_3(S^3) = H_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Л. С. Понтрягин доказал, что $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \ge 3$; $\pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \ge 2$ [11]. В. А. Рохлин вычислил гомотопические группы $\pi_{n+3}(S^n)$, в частности $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}$, см. его статьи в книге [7]. Далее гомотопические группы сфер вычислялись методами теории гомотопий в работах Серра, Ху Сы-Цзяна, Тода и др. В таблицах из [15] даны $\pi_{n+k}(S^n)$ для $1 \le k \le 22$. Представим здесь некоторые из этих групп:

$$\pi_7(S^3) = \pi_8(S^3) = \pi_{11}(S^3) = \mathbb{Z}_2,\ \pi_9(S^3) = \mathbb{Z}_3,\ \pi_{10}(S^3) = \mathbb{Z}_{15},\ \pi_{25}(S^3) = \mathbb{Z}_{210}.$$

Простые способы вычисления гомологий специальных унитарных групп можно найти в разных источниках, см., например, [21] и список литературы в этой работе. Вычисление гомологий и когомологий групп $SU(n)$ с помощью специальных клеточных разбиений можно найти в работе [30]. Кроме того, справедлива следующая формула (см. [4]):

$$H_i(U(n)) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} H_{i-k^2}(G_k(\mathbb{C}^n)),$$

$G_k(\mathbb{C}^n)$ — грассманово многообразие k-мерных комплексных плоскостей в $\mathbb{C}^n$. Эту формулу принято называть *разложением Васильева — Маховальда* [5].

Она просто вытекает из теории Морса в [5], примененной к функции

$$f_A(X) = \operatorname{tr} AX,\ X \in G = SO(n), U(n), Sp(n);\ A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n),\ 0 < a_1 \cdots < a_n.$$

Эта функция f_A определяет специальное клеточное разбиение группы G; его описание дает следующая замечательная теорема 2.2 из [5].

Теорема 8 [5]. *Клетки на группе G находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством клеток Шуберта грассманианов $G_m(\mathbf{k}^n)$, $m = 0, 1, \cdots, n$, где $\mathbf{k}$ равно соответственно $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$. Внутренность клетки, соответствующей клетке Шуберта σ, состоит из операторов, собственное подпространство которых с собственным значением -1 является ортогональным дополнением к некоторому элементу из σ.*

7. Другие классические связные компактные группы Ли. Вещественная $(n \times n)$-матрица B, $n \ge 2$, ортогональна, если $B^*B = B^TB = I_n$. Множество всех ортогональных $(n \times n)$-матриц составляет компактную ортогональную группу $O(n) \subset U(n)$, компонента связности единицы которой есть подгруппа $SO(n) \subset O(n)$ индекса 2, состоящая из ортогональных матриц с определителем 1. При этом $\dim SO(n) = \dim O(n) = n(n-1)/2$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ групп Ли $O(n)$ и $SO(n)$ состоит из кососимметрических $(n \times n)$-матриц. Максимальные торы групп Ли $SO(2n)$ и $SO(2n+1)$ имеют соответственно вид

$$T_{ev} = \left\{\operatorname{diag}(D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_n})\right\}, \quad D_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_k & -\sin\lambda_k \\ \sin\lambda_k & \cos\lambda_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{21}$$

$$T_{od} = \left\{\operatorname{diag}(D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_n}, 1)\right\}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{22}$$

Для кватернионной $(n\times n)$-матрицы C, C^* есть результат транспонирования матрицы C с последующим сопряжением элементов-кватернионов. Матрица C называется *симплектической*, если $C^*C = I_n$; группа Ли $Sp(n)$, $n \ge 1$, всех симплектических $(n \times n)$-матриц называется *симплектической группой*. Ее алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n)$ состоит из кватернионных $(n \times n)$-матриц A таких, что $A^* = -A$. Группа Ли $Sp(n)$ изоморфна группе Ли $U(2n) \cap Sp(n, \mathbb{C})$, где $Sp(n, \mathbb{C})$ состоит из J-унитарных $(2n \times 2n)$-матриц F, т.е. комплексных матриц таких, что $J^{-1}F^*JF = I_{2n}$ для блочной (2×2)-матрицы J, элементами-блоками которой являются $(n\times n)$-матрицы $j_{11} = 0$, $j_{12} = -I_n$, $j_{21} = I_n$, $j_{22} = 0$. В частности, $Sp(1)$ изоморфна $SU(2)$; $\dim Sp(n) = n(2n+1)$. Максимальный тор группы Ли $Sp(n)$ совпадает с максимальным тором T группы Ли $U(n)$ (3).

Группы Вейля $W = W(SO(2n+1))$ и $W = W(Sp(n))$ совпадают и порождаются элементами группы подстановок S_n чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и перемножениями соответствующих чисел последовательностей $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ и $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\varepsilon_k = \pm 1$. $|W| = n!2^n$. Для группы $W(SO(2n))$, еще $\prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k = 1$. $|W(SO(2n))| = n!2^{n-1}$.

Утверждения выше о максимальных торах и группах Вейля взяты из [1].

Аналогично предложению 4, устанавливается

Предложение 8. *Группы $SO(n)$, $n \ge 2$, и $Sp(n)$, $n \ge 1$, — вещественные алгебраические группы, а подмножества исключительных матриц $SO(n) \setminus N$, $Sp(n) \setminus N$ — вещественные алгебраические многообразия.*

Предложение 9. *Справедливы включения $SO(n) \subset SU(n) \subset U(n)$, $Sp(n) \subset U(2n)$ и соответствующие включения алгебр Ли $\mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{u}(2n)$. Поэтому вследствие теоремы 4, все матрицы из $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$ неисключительны; преобразования Кэли на $\mathfrak{so}(n)$ и $N \subset SO(n)$ — взаимно обратные диффеоморфизмы $\mathfrak{so}(n)$ и $N \subset SO(n)$; преобразования Кэли на $\mathfrak{sp}(n)$ и $N \subset Sp(n)$ — взаимно обратные диффеоморфизмы $\mathfrak{sp}(n)$ и $N \subset Sp(n)$.*

Положим $Q = \{(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \pi \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0\}$. Из описания группы Вейля W групп Ли $SO(2n+1)$, $Sp(n)$ и $SO(2n)$ вытекают

Предложение 10. *$W(Sp(n))(\exp(\mathbf{i}Q)) = T$, $I(Sp(n))(\exp(\mathbf{i}Q)) = Sp(n)$ и $\exp(\mathbf{i}Q)$ — фундаментальная область для действия группы Вейля $W(Sp(n))$ на максимальном торе $T \subset Sp(n)$ и действия группы $I(Sp(n))$ на $Sp(n)$. Элементы максимального тора $T_{od} \subset SO(2n+1)$, (22) с дополнительным условием $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q$*

составляют фундаментальную область для действий группы $W(SO(2n+1))$ на T_{od} и группы $I(SO(2n+1))$ на $SO(2n+1)$.

Предложение 11. *Множество всех элементов тора $T_{ev} \subset SO(2n)$, (21):*

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q_{pm} = Q \bigcup \{\pi \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > 0 > \lambda_n \geq -\lambda_{n-1}\}, \tag{23}$$

есть фундаментальная область для $W(SO(2n))$ на T_{ev} и $I(SO(2n))$ на $SO(2n)$.

Доказательство. Ясно, что каждая матрица из T_{ev}, (21) однозначно определяется последовательностью чисел $\lambda_k \in (-\pi, \pi]$, $k = 1, \dots, n$. Если при этом число отрицательных чисел четно или одно из них равно нулю, то преобразование из $W(SO(2n))$, умножающее эти отрицательные (соответственно, четное число неположительных чисел) на $\varepsilon = -1$, дает новый набор из n чисел в $[0, \pi]$. После этого надлежащая подстановка из $S_n \subset W(SO(2n))$ набора этих чисел дает единственный вектор $\Lambda \in Q$. Иначе, применяя, если это необходимо, умножение одного положительного и одного отрицательного числа из $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на $\varepsilon = -1$, можно считать, что одно из отрицательных чисел этого набора имеет наименьший среди всех $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ модуль. Умножая все остальные отрицательные числа (их четное число) на $\varepsilon = -1$, получим n-мерный вектор Λ_1, все компоненты которого, кроме одной, принадлежат интервалу $(0, \pi]$. После этого надлежащая подстановка из $S_n \subset W(SO(2n))$ превращает Λ_1 в единственный вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, удовлетворяющий последним условиям из (23). □

Предложение 12. *Пусть $d := (d_1, \dots, d_m)$ — произвольный фиксированный набор натуральных чисел, являющийся разбиением числа n, т. е. $d_1 + \dots + d_m = n$. Тогда множество всех векторов $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q$, группирующихся в наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ убывающих чисел с указанными кратностями $(d_1, \dots, d_m)$, выпукло и является подмножеством единственной минимальной грани $f_d \subset Q$. При этом внутренность $\mathrm{Int}(f_d)$ грани f_d есть множество всех указанных векторов Λ с дополнительными условиями $\alpha_1 < \pi$ и $\alpha_m > 0$; все оставшиеся векторы Λ составляют объединение внутренностей граней $f_d \cap Q_0$, $f_d \cap Q_\pi$ и $f_d \cap Q_\pi \cap Q_0$, где $Q_\pi = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q \mid \lambda_1 = \pi\}$, $Q_0 = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q \mid \lambda_n = 0\}$.*

Теорема 9. *Для каждого из множеств $M_1 = \mathrm{Int}(f_d)$, $M_2 = \mathrm{Int}(f_d \cap Q_0)$, $M_3 = \mathrm{Int}(f_d \cap Q_\pi)$ и $M_4 = \mathrm{Int}(f_d \cap Q_0 \cap Q_\pi)$,*

$$I(Sp(n))\Big(\exp(\mathbf{i}M_k)\Big) \cong \Big(Sp(n)/(Sp(d_1) \times \dots \times Sp(d_m))\Big) \times M_k, \quad k = 1, \dots 4. \tag{24}$$

Здесь орбиты снабжаются индуцированной дифференциальной структурой из $Sp(n)$, а символ $\cong$ обозначает диффеоморфность.

Теорема 10. *Для каждого из множеств M_1, M_2, M_3 и M_4 из теоремы 9,*

$$I(SO(2n+1))\Big(\big\{\mathrm{diag}(D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_n}, 1), (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_k\big\}\Big) \cong$$

$$\Big(SO(2n+1)/S(O(2d_1) \times \dots \times O(2d_m))\Big) \times M_k, \quad k = 1, \dots 4.$$

Здесь орбиты снабжаются индуцированной дифференциальной структурой из $SO(2n+1)$, а символ $\cong$ обозначает диффеоморфность.

Следствие 2. *Орбиты первого и второго типа дают стратификации множеств неисключительных матриц, а третьего и четвертого типа из теорем 9, 10 — стратификации множеств исключительных матриц из $Sp(n)$, $SO(2n+1)$; указана диффеоморфность соответствующих стратов.*

Предложение 13. *Множество неисключительных матриц $N \subset Sp(n)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{n(2n+1)}$ и является дизъюнктным объединением орбит относительно действия сопряжениями $Sp(n)$ на себе точек из множества $\exp(\mathbf{i}Q_{non})$,*

$$Q_{non} := \Big\{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pi > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\Big\} \subset Q. \tag{25}$$

Предложение 14. *Множество неисключительных матриц $N \subset SO(2n+1)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{n(2n+1)}$ и является дизъюнктным объединением орбит относительно действия сопряжениями $SO(2n+1)$ на себе точек из множества T_{od}, (22), (21), $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q_{non}$.*

Определим множества $V_i \subset Sp(n)$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$ так же, как для $U(n)$.

Теорема 11. *Каждое множество V_i диффеоморфно*

$$\Big(Sp(n)/Sp(i) \times Sp(n-i)\Big) \times \mathbb{R}^{(n-i)(2(n-i)+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{26}$$

В частности, $\dim(V_i) = n(2n+1) - i(2i+1)$, *$V_1$ диффеоморфно $\mathbb{HP}^{n-1} \times \mathbb{R}^{(n-1)(2(n-1)+1)}$ и* $\dim(V_1) = \dim(Sp(n)) - 3 = 2n^2 + n - 3$.

Для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ определим следующие подмножества в $SO(2n+1)$:

$$V_i = \{A \in SO(2n+1) \mid A \text{ имеет собственное число } -1 \text{ кратности } 2i\} \tag{27}$$

и $V_{n+1} = \{-I_{2n+1}\}$. Ясно, что V_i — множество матриц $A \in SO(2n+1)$ таких, что ранг матрицы $A + I_n$ равен $2n + 1 - 2i$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $V_0 = N \subset SO(2n+1)$.

Теорема 12. *Каждое множество V_i, $i = 1, \ldots, n$ диффеоморфно*

$$\Big(SO(2n+1)/S(O(2i) \times O(2n-2i+1))\Big) \times \mathbb{R}^{(n-i)(2(n-i)+1)}, \tag{28}$$

$\dim(V_i) = (n+i)(2(n-i)+1)$, *$V_1$ диффеоморфно $G_2(\mathbb{R}^{2n+1}) \times \mathbb{R}^{2n^2-3n+1}$ и* $\dim(V_1) = \dim(SO(2n+1)) - 1$.

Определение V_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, для $SO(2n)$ и утверждения об этих множествах — те же самые, что перед теоремой 12, с заменой $2n+1$ на $2n$.

Теорема 13. *Каждое множество V_i, $i = 1, \ldots, n$ диффеоморфно*

$$\Big(SO(2n)/S(O(2i) \times O(2(n-i)))\Big) \times \mathbb{R}^{(n-i)(2(n-i)-1)}, \tag{29}$$

$\dim(V_i) = n(2n-1) - i(2i-1)$, *$V_1$ диффеоморфно $G_2(\mathbb{R}^{2n}) \times \mathbb{R}^{(n-1)(2(n-1)-1)}$ и* $\dim(V_1) = \dim(SO(2n)) - 1$.

Аналоги теоремы 7 для групп Ли $Sp(n)$, $SO(2n+1)$ и $SO(2n)$ формулируются так же, за исключением последнего утверждения. Там нужно заменить группу $U(n)$ и размерности пространств V_i и V_1 для $U(n)$ на одну из трех упомянутых групп и размерности пространств V_i и V_1 для каждой из трех групп, вычисленные в теоремах 11, 12, 13.

Предложение 15. *Вследствие аналогов теоремы 7 для групп Ли $Sp(n)$, $SO(2n)$ и $SO(2n+1)$ и размерностей пространств V_i и V_1 для этих групп, вычисленных в теоремах 11, 13, 12, множества неисключительных матриц $N \subset Sp(n)$, $N \subset SO(2n)$ и $N \subset SO(2n+1)$ открыты и всюду плотны соответственно в $Sp(n)$, $SO(2n)$ и $SO(2n+1)$. Вместе с предложением 9 это значит, что для групп Ли $Sp(n)$, $SO(2n)$ и $SO(2n+1)$ справедливы аналоги теоремы 4.*

Список литературы

1. Адамс Дж. 1979. Лекции по группам Ли. М., Наука, 144.
2. Берестовский В. Н. 2023. Введение к хронометрической теории Сигала. Математические труды (принято к печати). 19.
3. Бессе А. 1990. Многообразия Эйнштейна. Том I. М., Мир, 320.
4. Васильев В. А. 1991. Геометрическая реализация гомологий классических групп Ли и комплексы, S-двойственные к флаговым многообразиям. Алгебра и анализ, 3(4): 113–120.
5. Веселов А. П., Дынников И. А. 1996. Интегрируемые градиентные потоки и теория Морса. Алгебра и анализ, 8(3): 78–103.
6. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. 1988. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., Наука, 344.
7. Гийу Л., Марен А. 1989. В поисках утраченной топологии. М., Мир, 293.
8. Пенроуз Р., Риндлер В. 1988. Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени. М., Мир, Т. 2, 573.
9. Понтрягин Л. С. 1988. Гомологии в компактных группах Ли. В книге: Л. С. Понтрягин. Избранные научные труды. Том 1. Топология. Топологическая алгебра. М., Наука, 170–208 (перевод с английского оригинала).
10. Понтрягин Л. С. 1988. О топологической структуре групп Ли. В книге: Л. С. Понтрягин. Избранные научные труды. Том 1. Топология. Топологическая алгебра. М., Наука, 209–214 (перевод с немецкого оригинала).
11. Понтрягин Л. С. 1988. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. В книге: Л. С. Понтрягин. Избранные научные труды. Том 1. Топология. Топологическая алгебра. М., Наука, 548–677.
12. Постников М. М. 1982. Группы и алгебры Ли (Лекции по геометрии, Семестр V). М., Наука, 480.
13. Прасолов В. В. 2004. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М., МЦНМО, 352.
14. Свитцер Р. М. 1985. Алгебраическая топология, Гомотопии и гомологии. М., Наука, 600.
15. Тода Х. 1982. Композиционные методы в теории гомотопических групп сфер. М., Наука, 224.
16. Хелгасон С. 2005. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. М., Факториал, 608.
17. Abiev N. A., Nikonorov Yu. G. 2016. The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow. Ann. Glob. Anal. Geom., 50(1): 65–84. DOI: 10.1007/s10455-016-9502-8
18. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. 2020. Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics. Springer Monographs in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG. Cham, 482. DOI: 10.1007/978-3-030-56658-6
19. Borel A. 1954. Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups. Proc. of Natl. Academy of Scinces, 44: 1147–1151. DOI: 10.1073/pnas.40.12.1147
20. Bott R. 1959. The stable homotopy of the classical groups. Ann. of Math. 70: 313–337. DOI: 10.2307/1970106

21. Coleman A. J. 1958. The Betti numbers of the simple Lie groups. Can. J. Math. 10: 349–356.
22. Jadczyk A. 2011. On Conformal Infinity and Compactifications of Minkowski Space. Adv. Appl. Clifford Algebras. 21: 721–756. DOI: 10.1007/s00006-011-0285-5
23. Jadczyk A. 2012. Conformally Compactified Minkowski Space: Myths and Facts. Prespacetime Journal. 3(2): 131–140.
24. Kervaire M. A. 1960. Some non-stable homotopy groups of Lie groups. Illinois Jour. of Math. 4: 161–169.
25. Matsunaga H. 1961. The homotopy groups $\pi_{2n+i}(U(n))$ for $i = 3, 4$ and 5. Mem. of Fac. of Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 15(1): 72–81. DOI: 10.2206/kyushumfs.15.72
26. Mimura M., Toda H. 1991. Topology of Lie groups, I and II. Translations of Mathematical Monographs. 91. Providence, RI: American Mathematical Society, 451.
27. Paneitz S. M., Segal I. E. 1982. Analysis in Space-Time Bundles I. General Considerations and the Scalar Bundle. J. Funct. Anal. 47: 78–142. DOI: 10.1016/0022-1236(82)90101-X
28. Toda H. 1959. A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups. Mem. of Coll. Univ. Kyoto. 32: 103–119. DOI: 10.1215/kjm/1250776701
29. Wallach N. R. 1972. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. Ann. Math. Second Ser. 96: 277–295. DOI: 10.2307/1970789
30. Yokota I. 1956. On the cellular decompositions of unitary groups. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A. 7(1-2): 39–49.

References

1. Adams J. F. 1969. Lectures on Lie groups. W.A. Benjamin, Inc. New York-Amsterdam, 188.
2. Berestovskii V. N. 2023. Vvedenie k khronometricheskoy teorii Segala [Introduction to Seagal's chronometric theory]. Mathematicheskie trudy, to appear 19.
3. Besse A. L. 1987. Einstein Manifolds. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 510.
4. Vassiliev V. A. 1992. A geometric realization of the homology of classical Lie groups, and complexes, S-dual to the flag manifolds. St.-Petersburg Math. J., 3(4): 809–815.
5. Veselov A. P., Dynnikov I. A. 1997. Integrable gradient flows and Morse theory. St. Petersburg Math. J., 8(3): 429–446.
6. Onishchik A. L., Vinberg E. B. 1990 Lie groups and algebraic groups. Translated from the Russian by D. A. Leites. Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin etc.: Springer-Verlag, 328.
7. Guillow L., Marin A. 1986. A la Recherche de la Topologie Perdue. Progress in Mathematics Vol. 62. Birkhäuser. Boston, Basel, Stuttgart, 244.
8. Penrose R., Rindler W. 1986. Spinors and Space-Time. Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. V. 2, 501.
9. Pontrjagin L. 1939. Homologies in compact Lie groups. Recueil Mathématique. Nouvelle Série. 6(3): 389–422.
10. Pontryagin L. 1940/1941. Über die topologische Struktur der Lieschen Gruppen. Math. Helv., 13(4): 277–283. DOI: 10.1007/BF01378066
11. Pontryagin L. S. 1986. Smooth manifolds and their applications in homotopy theory. In: Selected works. Vol. 3. Algebraic and differential topology. Classics of Soviet Mathematics. New York, NY: Gordon and Breach.
12. Postnikov M. M. 1986. Lie groups and Lie algebras (Lectures in geometry, Semester V). Mir Publisher, Moscow, 448.
13. Prasolov V. V. 2006. Elements of combinatorial and differential topology. Graduate Studies in Mathematics 74. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 331.
14. Switzer R. M. 1975. Algebraic Topology - Homotopy and Homology, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 526.
15. Toda H. 1962. Composition methods in the homotopy groups of spheres. Ann. Math. Studies 49. Princeton, 193. DOI: 10.1515/9781400882625
16. Helgason S. 2001. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Graduate Studies in Mathematics. 34. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 641.
17. Abiev N. A., Nikonorov Yu. G. 2016. The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow. Ann. Glob. Anal. Geom., 50(1): 65–84. DOI: 10.1007/s10455-016-9502-8
18. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. 2020. Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics. Springer Monographs in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG. Cham, 482. DOI: 10.1007/978-3-030-56658-6
19. Borel A. 1954. Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups. Proc. of Natl. Academy of Scinces, 44: 1147–1151. DOI: 10.1073/pnas.40.12.1147
20. Bott R. 1959. The stable homotopy of the classical groups. Ann. of Math. 70: 313–337. DOI: 10.2307/1970106
21. Coleman A. J. 1958. The Betti numbers of the simple Lie groups. Can. J. Math. 10: 349–356.
22. Jadczyk A. 2011. On Conformal Infinity and Compactifications of Minkowski Space. Adv. Appl. Clifford Algebras. 21: 721–756. DOI: 10.1007/s00006-011-0285-5

23. Jadczyk A. 2012. Conformally Compactified Minkowski Space: Myths and Facts. Prespacetime Journal. 3(2): 131–140.
24. Kervaire M. A. 1960. Some non-stable homotopy groups of Lie groups. Illinois Jour. of Math. 4: 161–169.
25. Matsunaga H. 1961. The homotopy groups $\pi_{2n+i}(U(n))$ for $i = 3, 4$ and 5. Mem. of Fac. of Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 15(1): 72–81. DOI: 10.2206/kyushumfs.15.72
26. Mimura M., Toda H. 1991. Topology of Lie groups, I and II. Translations of Mathematical Monographs. 91. Providence, RI: American Mathematical Society, 451.
27. Paneitz S. M., Segal I. E. 1982. Analysis in Space-Time Bundles I. General Considerations and the Scalar Bundle. J. Funct. Anal. 47: 78–142. DOI: 10.1016/0022-1236(82)90101-X
28. Toda H. 1959. A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups. Mem. of Coll. Univ. Kyoto. 32: 103–119. DOI: 10.1215/kjm/1250776701
29. Wallach N. R. 1972. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. Ann. Math. Second Ser. 96: 277–295. DOI: 10.2307/1970789
30. Yokota I. 1956. On the cellular decompositions of unitary groups. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A. 7(1-2): 39–49.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.05.2023
Поступила после рецензирования 24.06.2023
Принята к публикации 26.06.2023

Received May 12, 2023
Revised June 24, 2023
Accepted June 26, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Берестовский Валерий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии Наук, г. Новосибирск, Россия

Никоноров Юрий Геннадьевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской Академии Наук, г. Владикавказ, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Valeriĭ N. Berestovskiĭ – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Principal Investigator, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

Yuriĭ G. Nikonorov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Principal Investigator, Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Science, Vladikavkaz, Russia