Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 220–227.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 220–227.

УДК 514, 519.2
MSC 18F40
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-220-227

Стохастическая дифференциальная геометрия гладких поверхностей положительной кривизны

Климентов Д. С.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)
Южный федеральный университет,
Россия, 344000, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8А
dklimentov75@gmail.com

Аннотация. В предлагаемой работе выводится стохастический аналог уравнений Петерсона – Кодацци для двумерных поверхностей положительной кривизны класса C^k. Для исследования этих объектов используются методы стохастического анализа, точнее формула Ито и свойства броуновского движения, порождённого метрикой поверхности. Существенным отличием от результатов И. Я. Бакельмана [3] является применение формулы Ито и второй производной Ито, которая вводится в этой работе. Также используется техника симметричных интегралов (детерминированного аналога) стохастических интегралов Стратоновича.

Ключевые слова: основная теорема теории поверхностей, формула Ито, поверхность ограниченного искривления, симметричные интегралы

Для цитирования: Климентов Д. С. 2023. Стохастическая дифференциальная геометрия гладких поверхностей положительной кривизны. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 220–227.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-220-227

Original Research

Stochastic Differential Geometry of Smooth Surfaces of Positive Curvature

Dmitry S. Klimentov

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

South Federal University,
8A Milchakova st., Rostov-on-Don, 344000, Russia
dklimentov75@gmail.com

Abstract. In this note, we derive a stochastic analogue of the Peterson-Codazzi equations for two-dimensional surfaces of positive curvature of the class C^k. To study these objects, methods of stochastic analysis are used, more precisely, the Ito formula and the properties of Brownian motion generated by the surface metric. An essential difference from the results of Backelman I. Ya. [3] is an application of the Ito formula and the second Ito derivative introduced in this paper. The technique of symmetric integrals (a deterministic analogue of Stratonovich's stochastic integrals) is also used.

Keywords: Fundamental Theorem of Surface Theory, Ito's Formula, Surface of Bounded Curvature, Symmetric Integrals

For citation: Klimentov D. S. 2023. Stochastic Differential Geometry of Smooth Surfaces of Positive Curvature. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 220–227. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-220-227

---

1. Введение. Хорошо известна *основная теорема теории поверхностей* [8, с. 306]:

Уравнения Гаусса – Петерсона – Кодацци представляют собой необходимое и достаточное условие того, чтобы две аналитически заданные квадратичные формы, из которых одна является положительно определённой (первая форма поверхности), служили первой и второй формами для некоторой поверхности, которую они определяют с точностью до движения; ее глобальный вариант см. в [11, с. 76].

В 1956 году И. Я. Бакельман в работе [3] вывел уравнения Гаусса – Петерсона – Кодацци для поверхностей ограниченного искривления, то есть для поверхностей, задаваемых функциями с непрерывными первыми производными и суммируемыми с квадратом обобщёнными вторыми производными в смысле Соболева. В 1988 году Ю. Е. Боровский в работе [4] доказал, что уравнения, выведенные И. Я. Бакельманом, однозначно определяют поверхность ограниченного искривления.

Целью настоящей работы является получение стохастического аналога уравнений Петерсона – Кодацци для поверхностей класса C^k.

Структура статьи следующая: в первой части приводятся некоторые определения из теории случайных процессов; во второй части приводятся необходимые сведения из теории двумерных многообразий ограниченной кривизны (пространств Александрова); в третьей части формулируется и доказывается стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для гладких поверхностей положительной кривизны.

Сведения из теории случайных процессов. Предполагается, что читатель знаком с определениями случайного, марковского и строго марковского процессов, диффузионного процесса. Здесь принимаются обозначения из [6]. Более подробные сведения по излагаемым в этом пункте вопросам можно найти в [6], [5].

Будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Рассмотрим многообразие (фазовое пространство) $(E, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$— σ-поле борелевских множеств на E. Подробное определение случайного процесса на многообразии можно посмотреть в [5].

Введём некоторые необходимые в дальнейшем обозначения.

Определение. [6, с. 74] *Функция $P(t, x, \Gamma)$ $(t > 0, x \in E, \Gamma \in \mathfrak{B})$ называется переходной функцией, если выполнены следующие условия:*

1. *При фиксированных t и x функция $P(t, x, \Gamma)$ является мерой на σ-алгебре $\mathfrak{B}$.*
2. *При фиксированных t и Γ $P(t, x, \Gamma)$ есть $\mathfrak{B}$-измеримая функция точки x.*
3. *$P(t, x, \Gamma) \le 1$.*
4. *$P(0, x, E \setminus x) = 0$.*
5. *$P(s + t, x, \Gamma) = \int_E P(s, x, dy)P(t, y, \Gamma)$*

Пусть μ — некоторая мера в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$.

Определение. [6, с. 75] *Функция $p(t, x, y)$ $(t > 0, x, y \in E)$ называется переходной плотностью, если выполнены условия:*

1. *$p(t, x, y) \ge 0$.*
2. *При фиксированном t $p(t, x, y)$ является $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$- измеримой функцией от (x, y).*
3. *$\int_E p(t, x, y)\mu(dy) \le 1$.*
4. *$p(s + t, x, z) = \int_E p(s, x, y)p(t, y, z)\mu(dy)$.*

Легко проверить [6, с. 75], что если $p(t, x, y)$ — переходная плотность, то формула

$$P(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)dy, t > 0, P(t, x, \Gamma) = \chi_\Gamma, t = 0$$

определяет переходную функцию.

Со всякой переходной функцией связана сжимающая полугруппа T_t следующим образом [6, с. 80]

$$T_t f(x) = \int_E P(t, x, dy)f(y),$$

где $f \in B$, B – совокупность всех ограниченных измеримых функций с естественными линейными операциями и нормой $||f|| = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Определение.[6, с. 214] *Инфинитезимальным оператором полугруппы T_t (переходной функции $P(t, x, \Gamma)$) будем называть оператор A, действующий по правилу*

$$Af(x) = \lim_{t \to +0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t},$$

причем область определения оператора A состоит из тех функций f, для которых предел в правой части существует. Если на фазовом пространстве введена структура гладкого многообразия, то инфинитезимальный оператор, суженный на дважды непрерывно дифференцируемые функции, называется генератором (случайного процесса) и в локальных координатах (x^i) имеет вид:

$$Af(x) = a^{ij}\partial_i\partial_j f(x) + b^i\partial_i f(x) - Cf(x),$$

где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, a^{ij} — положительно определённая матрица.

Переходная плотность связана с генератором случайного процесса обратным уравнением Колмогорова [6, с. 238]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Ap,$$

где оператор A — генератор случайного процесса, введённый выше.

В книге [6] в главах 1 и 2 показано, что со всяким марковским процессом однозначно связаны сжимающая полугруппа, переходная функция и инфинитезимальный оператор.

Приведём здесь определение симметричного интеграла [7].

Определение.[7]. *Симметричным интегралом называется*

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \Sigma_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{\Delta t_k^{(n)}} f(s, X_n(s)) ds \Delta X_k^{(n)},$$

где $X(s)$ – непрерывная функция (траектория броуновского движения в нашем случае) $X_k^{(n)}$ – ломанная, построенная по разбиению t_n[1].

Сведения из дифференциальной геометрии. Подробное изложение теории двумерных многообразий ограниченной кривизны можно найти в книге [1], общепринятых обозначений из которой мы будем придерживаться в этом параграфе.

Определение.[3, с. 74] *Двумерную поверхность F в трёхмерном евклидовом пространстве будем называть гладкой поверхностью ограниченного искривления, если она в некоторой окрестности любой своей точки допускает параметризацию*

$$\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2),$$

где $\vec{r}(x^1, x^2)$ — непрерывно дифференцируемая вектор–функция своих переменных, меняющихся в некоторой области D на плоскости (x^1, x^2), имеющая все вторые обобщённые производные, локально суммируемые с квадратом в D, причём всюду в D $|\vec{r}_{x^1} \times \vec{r}_{x^2}| \neq 0$. Иными словами, функция $\vec{r}(x^1, x^2) \in C^1 \cap W_2^2$ внутри указанной области.

Пусть R – метрическое пространство с метрикой ρ. Если дано непрерывное отображение сегмента $0 \le t \le 1$ ($a \le t \le b$) в пространство R, то мы говорим, что задана кривая в параметризации $X(t)$. Различным значениям t могут отвечать одинаковые точки $X(t)$. Сегмент $0 \le t \le 1$ распадается на связные компоненты k_t, каждой из которых отвечает одна и та же точка $X(t)$. Параметризации $X(t)$ и $Y(s)$ называются эквивалентными, если существует строго монотонное взаимно однозначное отображение ϕ, при котором $X(k_t) = Y(\phi(k_t))$.

Определение. [1, с. 6] *Кривая есть класс эквивалентных параметризаций.*

Длина кривой $X(t)$, $0 \le t \le 1$ в R может быть определена как

$$\sup \Sigma_{i=1}^n \rho\left(X(t_{i-1}), X(t_i)\right),$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ — произвольное разбиение промежутка $[0, 1]$.

Определение.[1, с. 7] *Метрика ρ называется внутренней, если для любых двух точек $X, Y \in R$ расстояние $\rho(X, Y)$ равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих точки X, Y.*

Определение.[1, с. 7] *Кратчайшей, соединяющей точки $X, Y \in R$, называется кривая, имеющая наименьшую длину среди всех кривых с теми же концами. Геодезической называется кривая, кратчайшая на каждом достаточно малом участке.*

Определение.[1, с. 8] *Треугольником $T = ABC$ в пространстве R назовем фигуру, состоящую из трех заданных различных точек A, B, C (вершин треугольника) и трех попарно соединяющих их кратчайших (сторон треугольника).*

Допустим, что в пространстве R выделена открытая в R область G, которая оказалась гомеоморфной открытому кругу на плоскости. Пусть треугольник T лежит в этой области и его стороны образуют простой замкнутый контур (то есть они ограничивают в G область). Мы будем причислять ее к T и говорить, что T есть треугольник, гомеоморфный кругу.

Определение.[1, с. 8] *Будем говорить, что треугольник T — гранично выпуклый, если никакие две точки его контура нельзя соединить идущей вне T кривой, более короткой, чем соединяющий эти точки участок контура.*

Определение.[1, с. 9] *Простым треугольником (в области G) будем называть гомеоморфный кругу гранично выпуклый треугольник. Два простых треугольника называются неналегающими, если они не имеют общих внутренних точек.*

Пусть L и M — две кривые в R, исходящие из одной точки O. Пусть X и Y — переменные точки соответственно на L и на M. Построим на плоскости треугольник T_0 со сторонами $\rho(O, X)$, $\rho(O, Y)$ и $\rho(X, Y)$. Такой треугольник существует, поскольку указанные расстояния удовлетворяют неравенству треугольника. Пусть $\gamma(X, Y)$ — угол, лежащий против стороны $\rho(X, Y)$.

Определение.[1, с.8] *Верхним углом (углом) между кривыми L и M в точке O называется*

$$\overline{\lim_{X,Y\to O}} \gamma(X, Y) \left(\lim_{X,Y\to O} \gamma(X, Y)\right).$$

[1]Полное определение симметричного интеграла довольно громоздко, поэтому здесь мы его целиком не приводим.

Верхним углом треугольника $T = ABC$ в вершине A будем считать верхний угол между кратчайшими AB и AC.

Определение.[1, с. 9] *Верхним избытком (избытком) треугольника называется величина*

$$\bar{\nu}(T) = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \pi \; (\nu(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} (\alpha, \beta, \gamma)$ *— верхние углы (углы) треугольника* T.

Определение. [1, с.8]

Метрическое пространство R называется двумерным многообразием ограниченной кривизны, если выполнены следующие аксиомы:

1. *R есть метрическое пространство с внутренней метрикой;*

2. *Каждая точка в R имеет окрестность, гомеоморфную кругу на плоскости;*

3. *Для всякой области $G \subset R$ с компактным замыканием существует такое число $\nu(G)$, что для всякой конечной совокупности попарно неналегающих простых треугольников $T_i \subset G$*

$$\Sigma_i \left|\bar{\nu}(T_i)\right| \leq \nu(G) < +\infty.$$

Имеет место следующая

Теорема[9, с. 91] *Двумерное многообразие с внутренней метрикой имеет ограниченную кривизну тогда и только тогда, когда во всякой области G с компактным замыканием индуцированная в ней метрика ρ_G допускает равномерное приближение римановыми метриками, в которых абсолютные кривизны ограничены в совокупности.*

В работе [3, с. 83] была доказана

Теорема *Всякая гладкая поверхность ограниченного искривления в смысле своей внутренней метрики есть многообразие ограниченной кривизны.*

Приведем теперь некоторые определения и результаты из работы [3].

Определение.[3, с. 71] *Средней поверхностью F_h для поверхности ограниченного искривления F с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$ называют поверхность с параметризацией*

$$\vec{r}_h(x^1, x^2) = \iint_{D-D_\delta} \vec{r}(\xi, \eta)\omega_h(\xi, \eta, x^1, x^2)d\xi d\eta,$$

где

$$\omega_h(\xi, \eta, x^1, x^2)d\xi d\eta = \begin{cases} \frac{1}{H_h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}, r < h \\ 0, r \geq h \end{cases},$$

$H_h = \iint_{r\leq h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} d\xi d\eta,\ r = \sqrt{(x^1-\xi)^2 + (x^2-\eta)^2}.$

Введём следующие обозначения [3, с. 102]:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} g_{12} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - g_{22}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1});$$

$\psi(x^1, x^2) = \frac{\Gamma_1}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}} \cdot g_{22_h}$, где индекс h внизу означает принадлежность к средней поверхности.

Пусть теперь $U_{1,\delta}$ — множество точек отрезка $[a+\delta, b-\delta]$, обладающих следующими свойствами: для $u \in U_{1,\delta}$ можно выбрать подпоследовательность F_{h_k} так, что

1. при любых $c + \delta \leq \lambda < \mu \leq d - \delta$

$$\lim_{h_k \to 0} \int_\lambda^\mu \psi_{h_k}(u, v)dv = \int_\lambda^\mu \psi(u, v)dv;$$

2. кривая ${L_u}^2$ имеет конечный поворот в пространстве, который как функция множеств кривой L_u абсолютно непрерывен;

3. кривые L_{u,h_k} сходятся к L_u равномерно вместе со своими касательными и имеют ограниченные в совокупности повороты, которые равностепенно абсолютно непрерывны.

[2] Определение поворота координатной линии L_u [3, с. 99] достаточно громоздко, поэтому здесь оно не приводится.

Теорема[3, с. 110] *На всякой гладкой поверхности ограниченного искривления в прямоугольнике* $K_{x_1^1x_2^1}^{x_1^2x_2^2}$ *для почти всех* $x_1^1, x_2^1 \in U_{1,\delta}$ *и для почти всех* $x_1^2, x_2^2 \in V_{1,\delta}$ *имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \oint_L b_{11}dx^1 + b_{12}dx^2 &= \iint_{K_{x_1^1x_2^1}^{x_1^2x_2^2}} \Gamma_{12}^1 b_{11} + \Gamma_{12}^2 b_{12} - \Gamma_{11}^1 b_{12} - \Gamma_{11}^2 b_{22} dx^1 dx^2 \\ \oint_L b_{12}dx^1 + b_{22}dx^2 &= \iint_{K_{x_1^1x_2^1}^{x_1^2x_2^2}} \Gamma_{22}^1 b_{11} + \Gamma_{22}^2 b_{12} - \Gamma_{21}^1 b_{12} - \Gamma_{21}^2 b_{22} dx^1 dx^2 \end{aligned}, \qquad (1)$$

где L *— граница прямоугольника* $K_{x_1^1x_2^1}^{x_1^2x_2^2}$, Γ_{ij}^k *– обобщенные символы Христоффеля второго рода [3, с.85]*

В дальнейшем мы будем рассматривать гладкую поверхность положительной кривизны. Определение этого понятия для двумерного многообразия ограниченной кривизны достаточно громоздко и потому здесь не приводится. Подробную конструкцию понятия кривизны можно посмотреть в [1], глава 5. В гладком случае аналогом кривизны является гауссова кривизна и ее положительность эквивалентна положительной определённости второй основной формы поверхности.

Из положительности кривизны поверхности ограниченного искривления следует положительная определенность второй основной формы почти всюду [3, §§ 11, 12.].

Случайный процесс Y_t, порождённый второй формой поверхности, может быть построен с помощью соответствующей формы Дирихле[3] [10, с. 19]. Эквивалентность задания процесса с помощью формы Дирихле или генератора показана там же.

Основной результат. Пусть S — гладкая поверхность положительной гауссовой кривизны с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$. Первую и вторую формы поверхности будем обозначать $I = g_{ij}dx^i dx^j$ и $II = b_{ij}dx^i dx^j$ соответственно. Случайный процесс, порождённый первой формой, будем обозначать X_t, второй — Y_t. Не ограничивая общности будем считать, что вторая форма приведена к изотермическому виду, то есть $b_{12} = 0$.

Хорошо известны формулы для вычисления коэффициентов b_{ij} [8]:

$$b_{ij} = (\vec{r}_{ij}, \vec{n}) = \frac{(\vec{r}_{ij}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|},$$

где $|I| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

На поверхности S имеет место формула Ито [5, с. 73]:

$$df(Z_t) = \partial_i f(Z_t)dZ_t^i + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j f(Z_t)dZ_t^i dZ_t^j,$$

где d — стохастический дифференциал[4], f – дважды дифференцируемая функция, Z_t — диффузионный процесс на S. Необходимо отметить, что мы рассматриваем диффузионный процесс с нулевыми сносом и вероятностью обрыва.

Выберем вместо случайного процесса Z_t каноническое броуновское движение $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ [2] на S и подставим в формулу Ито, воспользовавшись свойствами броуновского движения [2, с. 21]:

$$df(B_t) = \partial_i f(B_t)dB_t^i + \frac{1}{2}\left[\partial_{11} f(B_t)dt + \partial_{22} f(B_t)dt\right].$$

Рассмотрим последнюю формулу для двух частных случаев:

1. $Z_1 = (B_t^1, 0)$;

2. $Z_2 = (0, B_t^2)$.

После подстановки получим:

$$df(Z_1) = \partial_1 f(Z_1)dB_t^1 + \frac{1}{2}\partial_{11} f(Z_1)dt,$$

$$df(Z_2) = \partial_1 f(Z_2)dB_t^2 + \frac{1}{2}\partial_{22} f(Z_2)dt.$$

Выразим отсюда вторые производные:

$$\partial_{11} f(Z_1)dt = 2\left(df(Z_1) - \partial_1 f(Z_1)dB_t^1\right),$$

[3]Построение случайного процесса с помощью формы Дирихле весьма громоздко [10], глава 1 и здесь не приводится.

[4]Определения и свойства стохастического дифференциала можно посмотреть, например, в книге [5].

$$\partial_{22} f(Z_2)dt = 2\left(df(Z_2) - \partial_1 f(Z_2)dB_t^2\right).$$

Определение. *Второй производной Ито вдоль траектории броуновского движения B^1 (B^2) назовём*

$$\partial_{11} f(Z_1)dt = 2\left(df(Z_1) - \partial_1 f(Z_1)dB_t^1\right),$$
$$\partial_{22} f(Z_2)dt = 2\left(df(Z_2) - \partial_1 f(Z_2)dB_t^2\right).$$

Вернёмся теперь к нашей поверхности S. На ней имеют место уравнения Петерсона – Кодацци:

$$b_{i[j,k]} = 0,$$

где «[]» – альтернирование, «,» – ковариантная производная.

Лемма. *На поверхности S имеют место формулы:*

$$b_{11}(B_t^1)dt = \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|},$$

$$b_{22}(B_t^2)dt = \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}.$$

Доказательство. Домножим выражения для вычисления коэффициентов b_{ij} на dt, заменим координаты x^i на соответствующее броуновское движение и получим выражение коэффициентов через вторую производную Ито:

$$b_{11}(B_t^1)dt = \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|},$$

$$b_{22}(B_t^2)dt = \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}.$$

Отметим, что коэффициент $b_{12} = 0$ в силу выбора системы координат.

Выведем теперь аналог уравнений Петерсона – Кодацци на поверхности S. Перепишем уравнения Петерсона – Кодацци в более удобной для нас интегральной форме [3]:

$$\oint_L b_{11}dx^1 = \iint_Q \left(\Gamma_{12}^1 b_{11} - \Gamma_{11}^2 b_{22}\right) dx^1 dx^2,$$

$$\oint_L b_{22}dx^2 = \iint_Q \left(\Gamma_{22}^1 b_{11} - \Gamma_{21}^2 b_{22}\right) dx^1 dx^2.$$

Здесь Γ_{ij}^k – символ Христоффеля второго рода, Ω – прямоугольник, L – его граница. Домножим оба уравнения на dt:

$$\oint_L b_{11}dtdx^1 = \iint_Q \left(\Gamma_{12}^1 b_{11} - \Gamma_{11}^2 b_{22}\right) dx^1 dx^2 dt,$$

$$\oint_L b_{22}dtdx^2 = \iint_Q \left(\Gamma_{22}^1 b_{11} - \Gamma_{21}^2 b_{22}\right) dx^1 dx^2 dt.$$

Заменим теперь в последнем равенстве коэффициенты b_{ij} на их выражения из предыдущей леммы и перейдём к симметричным интегралам:

$$\oint_L \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} * dB^1 =$$

$$= \iint_Q \left(\Gamma_{12}^1 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} - \Gamma_{11}^2 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}\right) * dB^1 dB^2 \cdot dt,$$

$$\oint_L \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} * dB^2 =$$

$$= \iint_Q \left(\Gamma_{22}^1 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} - \Gamma_{21}^2 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}\right) * dB^1 dB^2 \cdot dt.$$

Итак, на гладкой пооверхности мы получили аналог уравнений Петерсона – Кодацци, который не содержит вторых производных.

Резюмируя все вышесказанное, сформулируем следующую теорему:

Теорема. *Пусть S – двумерная гладкая поверхность положительной кривизны, задаваемая вектор–функцией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$. Тогда на S имеет место стохастический аналог уравнений Петерсона – Кодацци:*

$$\oint_L \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} * dB^1 =$$

$$= \iint_Q \left(\Gamma_{12}^1 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} - \Gamma_{11}^2 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}\right) * dB^1 dB^2,$$

$$\oint_L \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} * dB^2 =$$

$$= \iint_Q \left(\Gamma_{22}^1 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} - \Gamma_{21}^2 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}\right) * dB^1 dB^2,$$

где Γ_{ij}^k – обобщённые символы Христоффеля второго рода, $B = (B^1, B^2)$ – броуновское движение, порождённое метрикой поверхности, Ω – произвольный координатный прямоугольник, L – его граница.

Список литературы

1. Александров А. Д., Залгаллер В. А. 1962. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Труды математического института имени В. А. Стеклова. Изд. Академии наук СССР. М.–Л.: 3–262.
2. Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. 1989. Стохастическон исчисление. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ. 49: 5–260.
3. Бакельман И. Я. 1956. Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей. УМН. 11(2)68: 67–124.
4. Боровский Ю. Е. 1988. Системы Пфаффа с коэффициентами из L_n и их геометрические приложения. Сибирский математический. журнал. 24(2): 10–16.
5. Ватанабе С, Икеда Н. 1986. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., Наука, 448.
6. Дынкин Е. Б. 1963. Марковские процессы. М., Физматлит, 860.
7. Насыров Ф. С. 2006. Симметричные интегралы и стохастический анализ. Теория вероятностей и её применения. 51(3): 496–517.
8. Рашевский П. К. 1939. Курс дифференциальной геометрии. ГОНТИ, 360.
9. Решетняк Ю. Г. 1989. Двумерные многообразия ограниченной кривизны, Геометрия – 4. Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ. М. 70: 7-–189.
10. Fukushima M., Oshima Y., Takeda M. 1994. Dirishlet Forms and Symmetric Markov Processes. Walter de Gruyter. Berlin. New York, 390.
11. Sasaki S. 1958. A global formulation of the foundamental theorem of the theory of surfaces in three dimensional Euclidean space. Nagoya Math J. 13: 69–82.

References

1. Aleksandrov A. D., Zalgaller V. A. 1962. Dvumernye mnogoobrazija ogranichennoj krivizny [Two-dimensional manifolds of bounded curvature]. Trudy matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova. Izd. Akademii nauk SSSR. M.–L.: 3–262.
2. Anulova S. V., Veretennikov A. Ju., Krylov N. V., Lipcer R. Sh., Shirjaev A. N. 1989. Stohasticheskon ischislenie [Stochastic calculus]. Itogi nauki i tehniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravlenija. VINITI. 49: 5 –260.
3. Bakel'man I. Ja. 1956. Differencial'naja geometrija gladkih nereguljarnyh poverhnostej [Differential geometry of smooth irregular surfaces]. UMN. 11(2)68: 67–124.
4. Borovskij Ju. E. 1988. Sistemy Pfaffa s kojefficientami iz L_n i ih geometricheskie prilozhenija [Pfaffian systems with coefficients from L_n and their geometric applications]. Sibirskij matematicheskij. zhurnal. 24(2): 10–16.
5. Vatanabe S, Ikeda N. 1986. Stohasticheskie differencial'nye uravnenija i diffuzionnye processy [Stochastic differential equations and diffusion processes]. M., Nauka, 448.
6. Dynkin E. B. 1963. Markovskie processy [Markov processes]. M., Fizmatlit, 860.
7. Nasyrov F. S. 2006. Simmetrichnye integraly i stohasticheskij analiz [Symmetric integrals and stochastic analysis]. Teorija verojatnostej i ejo primenenija. 51(3): 496–517.
8. Rashevskij P. K. 1939. Kurs differencial'noj geometrii [Differential geometry course]. GONTI, 360.
9. Reshetnjak Ju. G. 1989. Dvumernye mnogoobrazija ogranichennoj krivizny, Geometrija – 4 [Two-dimensional manifolds of bounded curvature, Geometry – 4]. Itogi nauki i tehniki. Seriya. Sovremennyye problemy matematiki. Fundamental'nyye napravleniya. VINITI. M. 70:7—189.

10. Fukushima M., Oshima Y., Takeda M. 1994. Dirishlet Forms and Symmetric Markov Processes. Walter de Gruyter. Berlin. New York, 390.
11. Sasaki S. 1958. A global formulation of the foundamental theorem of the theory of surfaces in three dimensional Euclidean space. Nagoya Math J. 13: 69–82.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.05.2023
Поступила после рецензирования 30.06.2023
Принята к публикации 03.07.2023

Received May 18, 2023
Revised June 30, 2023
Accepted July 3, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Климентов Дмитрий Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Dmitry S. Klimentov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, South Federal University, Rostov-on-Don, Russia