Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 236–247.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 236–247.

УДК 517.95 DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-236-247
MSC 35B06; 35R11; 35Q91; 70G65
Оригинальное исследование

Линейно-автономные симметрии одной дробной модели Геана – Пу

[1] **Ядрихинский Х. В.**, [1,2,] **Федоров В. Е.**
(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком*)

[1] Якутское отделение Дальневосточного центра математических исследований,
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Россия, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58
ghdsfdf@yandex.ru
[2] Челябинский государственный университет,
Россия, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129
kar@csu.ru

Аннотация. Исследована групповая структура уравнения Геана – Пу дробного порядка по переменной цены базового актива, представляющего собой одну из моделей динамики ценообразования опционов с учетом транзакционных издержек. Осуществлен поиск непрерывных групп линейно-автономных преобразований эквивалентности. Найденные преобразования эквивалентности использованы при построении групповой классификации (в рамках линейно-автономных преобразований) рассматриваемого уравнения с нелинейной функцией в правой части уравнения в качестве свободного элемента. В случае ненулевой безрисковой ставки показано, что возможны два случая допускаемых групп линейно-автономных преобразований изучаемого уравнения: двумерная в случае специального вида свободного элемента и одномерная в остальных случаях. Если же безрисковая ставка равна нулю, имеется четыре варианта допускаемой группы, которая может быть двумерной, трехмерной или четырехмерной. В дальнейшем предполагается использование полученной групповой классификации при вычислении инвариантных решений и законов сохранения исследуемой модели.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, групповой анализ, линейно-автономное преобразование, преобразование эквивалентности, симметрия, алгебра Ли, ценообразование опционов

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-02-2023-947 от 16.02.2023.

Для цитирования: Ядрихинский Х. В., Федоров В. Е. 2023. Линейно-автономные симметрии одной дробной модели Геана – Пу. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 236–247. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-236-247

Original Research

Linear-Autonomous Symmetries of a Fractional Guéant – Pu Model

[1] **Khristofor V. Yadrikhinskiy**, [1,2] **Vladimir E. Fedorov**
(*Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak*)

[1] Yakut Branch of the Far Eastern Far Eastern Center for Mathematical Research, North East Federal University named after M. K. Ammosov,
58 Belinsky st., Yakutsk, 677000, Russia
ghdsfdf@yandex.ru
[2] Chelyabinsk State University,
129 Brothers Kashirin st., Chelyabinsk, 454001, Russia
kar@csu.ru

Abstract. We study the group structure of the Guéant – Pu equation of the fractional-order with respect to the price of the underlying asset variable. It is one of the models of the dynamics of options pricing, taking into account transaction costs. The search for continuous groups of linear-autonomous equivalence transformations is carried out. The equivalence transformations found are used in constructing a group classification (within the framework of linear-autonomous transformations) of the equation under consideration with a nonlinear function in the right side of the equation as a free element. In the case of a nonzero risk-free rate, it is shown that two cases of Lie algebras of the equation under study are possible: two-dimensional in the case of a special type of free element and one-dimensional in the remaining cases. If the risk-free rate is zero, there are four variants of the Lie algebra, which can be two-dimensional, three-dimensional or four-dimensional. In the future, we assume to use the obtained group classification in calculating invariant solutions and conservation laws of the model under study.

Keywords: Partial Differential Equation, Group Analysis, Linear-Autonomous Transformation, Equivalence Transformation, Symmetry, Lie Algebra, Option Pricing

Acknowledgements: The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2023-947, 16 February 2023.

For citation: Yadrikhinskiy Khr. V., Fedorov V. E. 2023. Linear-Autonomous Symmetries of a Fractional Guéant – Pu Model. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 236–247. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-236-247

1. Введение. Уравнение Геана – Пу

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q) \tag{1}$$

моделирует динамику ценообразования опционов с учетом транзакционных издержек и влияния операций на рынок [5, 6]. Здесь $r \in \mathbb{R}$ – безрисковая ставка, $\gamma \in \mathbb{R}$ — абсолютный параметр неприятия риска, $\sigma > 0$ — волатильность, $\mu \in \mathbb{R}$ – прогноз тренда, ожидаемая доходность базового актива. Цена безразличия колл-опциона $\theta = \theta(t, S, q)$ зависит от времени t, цены базового актива S, доли количества акций в хеджируемом портфеле q. В работах авторов ранее исследованы групповые свойства уравнения (1) с функцией $F = F(\theta_q)$ [2, 12], а также в случае $F = F(t, \theta_q)$ [9, 11]. Для уравнений с конкретными функциями F из полученных в этих работах групповых классификаций методами группового анализа получены точные решения. Для модели Геана – Пу (1) с функцией $F = a(t)\theta_q$ найдены семейства операторов рекурсии [10].

В теорию финансовых рынков дробные производные введены для описания эредитарных свойств моделируемых процессов [3, 7, 8]. В настоящей работе рассмотрено уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F(t, \theta_q) \tag{2}$$

дробного порядка по переменной S. С помощью методов, развитых в работах Р. К. Газизова, С. Ю. Лукащука и А. А. Касаткина [1, 4] в данной работе изучаются линейно-автономные симметрии уравнения (2) при $\alpha \in (0, 1)$. В §2 приведены предварительные сведения. Третий параграф содержит получение алгебр Ли генераторов непрерывных групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения (2). В четвертом параграфе начато получение групповой классификации (в смысле только линейно-автономных преобразований) уравнения (2) в общем случае, в пятом – эта классификация получена для случая нелинейных по θ_q функций $F = F(t, \theta_q)$. При этом групповые классификации уравнения (2) существенно различаются для случаев $r = 0$ и $r \neq 0$.

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $c, T \in \mathbb{R}$, $c < T$, определим дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка $\beta > 0$ для функции $f : (c, T) \to \mathcal{Z}$

$$J_S^\beta f(S) := \int_c^S \frac{(S-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s)ds, \quad S \in (c, T),$$

и дробную производную Римана – Лиувилля порядка $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $D_S^\alpha f(S) := D_S^n J_S^{n-\alpha} f(S)$, где D_S^n – производная целого порядка n.

Обобщенная формула Лейбница имеет вид

$$D_S^\alpha(f(S)g(S)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}g(S)D_S^k f(S), \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Будем использовать функцию Миттаг – Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$.

Решение уравнения $D_S^\alpha y(S) - \lambda y(S) = f(S)$ имеет вид

$$y = \sum_{k=1}^{n} b_k (S-c)^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda(S-c)^\alpha) + \int_c^S (S-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(S-s)^\alpha)f(s)ds, \ n-1 < \alpha \le n. \tag{3}$$

В статье [1] получена формула продолжения по дробной производной Римана – Лиувилля и для оператора $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta$ она принимает вид

$$\eta^\alpha = D_S^\alpha(\eta - \tau\theta_t - \xi\theta_S - \beta\theta_q) + \tau D_t D_S^\alpha\theta + \xi D_S D_S^\alpha\theta + \beta D_q D_S^\alpha\theta.$$

Перегруппируем слагаемые с учетом равенств $D_S D_S^\alpha = D_S^{\alpha+1}$ и $(\tau\theta)_t = \tau_t\theta + \tau\theta_t$:

$$\eta^\alpha = D_S^\alpha\eta + \tau D_S^\alpha\theta_t - D_S^\alpha(\tau\theta_t) + \xi D_S^{\alpha+1}\theta - D_S^\alpha D_S(\xi\theta) + D_S^\alpha(\xi_S\theta) + \beta D_S^\alpha\theta_q - D_S^\alpha(\beta\theta_q).$$

Далее используем равенство $D_S^\alpha D_S f(S) = D_S^{\alpha+1} f(S) - \dfrac{(S-c)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(c)$. Тогда с учетом условия $\xi(c) = 0$ получаем

$$\begin{aligned}
\eta^\alpha &= D_S^\alpha \eta + \tau D_S^\alpha \theta_t - D_S^\alpha(\tau\theta_t) + \xi D_S^{\alpha+1}\theta - D_S^{\alpha+1}(\xi\theta) + (\xi\theta)|_{S=c}\frac{(S-c)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} + \\
&+ D_S^\alpha(\xi_S\theta) + \beta D_S^\alpha \theta_q - D_S^\alpha(\beta\theta_q) = \\
&= D_S^\alpha \eta - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k \tau + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\binom{\alpha}{k} - \binom{\alpha+1}{k+1}\right) D_S^{\alpha-k}\theta D_S^{k+1}\xi - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k \beta.
\end{aligned}$$

Для оператора X в линейно-автономной форме [1, 4], т. е. при $\eta = p(t,S,q)\theta + g(t,S,q)$, $\tau_\theta = 0$, $\xi_\theta = 0$, $\beta_\theta = 0$, формула продолжения в силу обобщенной формулы Лейбница и равенства $\dbinom{\alpha+1}{k+1} = \dfrac{\alpha+1}{k+1}\dbinom{\alpha}{k}$ принимает вид

$$\eta^\alpha = D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1} D_S^{k+1}\xi\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta.$$

Для $\eta^{\alpha+1}$ формула продолжения имеет вид

$$\begin{aligned}
\eta^{\alpha+1} &= D_S^{\alpha+1} g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1} D_S^{k+1}\xi\right) - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_t D_S^k\tau - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta.
\end{aligned}$$

3. Генераторы непрерывных групп преобразований эквивалентности. Рассмотрим уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2} D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F(t,\theta_q), \tag{4}$$

где $\theta = \theta(t,S,q)$, $\gamma\sigma \neq 0$, $0 < \alpha < 1$. Путем рассмотрения функции F и ее производных как дополнительных переменных производится поиск генераторов непрерывных групп преобразований эквивалентности. Для учета того, от каких переменных зависит F, вводятся дополнительные уравнения

$$F_S = 0, \quad F_q = 0, \quad F_\theta = 0, \quad F_{\theta_t} = 0, \quad F_{\theta_S} = 0, \quad F_{D_S^\alpha\theta} = 0. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) задают многообразие $\mathcal{M}$. Порождающий группу оператор ищется в виде $Y = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F$, где τ, ξ, β, η зависят от t, S, q, θ, а ζ зависит от t, S, q, θ, θ_t, θ_S, θ_q, $D_S^\alpha\theta$. Продолженный оператор имеет вид

$$\begin{aligned}
Y^{\alpha+1} &= Y + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^\alpha\partial_{D_S^\alpha\theta} + \eta^{\alpha+1}\partial_{D_S^{\alpha+1}\theta} + \eta^q\partial_{\theta_q} + \zeta^t\partial_{F_t} + \zeta^S\partial_{F_S} + \zeta^q\partial_{F_q} + \zeta^\theta\partial_{F_\theta} + \\
&+ \zeta^{\theta_t}\partial_{F_{\theta_t}} + \zeta^{\theta_S}\partial_{F_{\theta_S}} + \zeta^{\theta_q}\partial_{F_{\theta_q}} + \zeta^{D_S^\alpha\theta}\partial_{F_{D_S^\alpha\theta}} + \zeta^{D_S^{\alpha+1}\theta}\partial_{F_{D_S^{\alpha+1}\theta}}.
\end{aligned}$$

Его действие на (4), (5) дает уравнения

$$\begin{aligned}
&\eta^t - r\eta - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \mu\eta^\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\eta^{\alpha+1} - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \\
&+ \gamma\sigma e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)(\eta^\alpha - \beta) - \zeta|_{\mathcal{M}} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\zeta^S|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^q|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^\theta|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^{\theta_t}|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^{\theta_S}|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^{D_S^\alpha\theta}|_{\mathcal{M}} = 0. \tag{7}$$

Операторы полной производной определяются как

$$\begin{aligned}
&D_t = \partial_t + \theta_t\partial_\theta + \ldots, \quad D_S = \partial_S + \theta_S\partial_\theta + \theta_{SS}\partial_{\theta_S} + \ldots, \quad D_q = \partial_q + \theta_q\partial_\theta + \ldots, \\
&\tilde{D}_t = \partial_t + F_t\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_S = \partial_S + F_S\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_q = \partial_q + F_q\partial_F + \ldots, \\
&\tilde{D}_\theta = \partial_\theta + F_\theta\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_t} = \partial_{\theta_t} + F_{\theta_t}\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_q} = \partial_{\theta_q} + F_{\theta_q}\partial_F + \ldots, \\
&\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta} = \partial_{D_S^\alpha\theta} + F_{D_S^\alpha\theta}\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_S} = \partial_{\theta_S} + F_{\theta_S}\partial_F + \ldots
\end{aligned}$$

Формулы продолжения для ζ имеют вид

$$\zeta^S = \tilde{D}_S\zeta - F_t\tilde{D}_S\tau - F_S\tilde{D}_S\xi - F_q\tilde{D}_S\beta - F_\theta\tilde{D}_S\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_S\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_S\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_S\eta^q - F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_S\eta^\alpha,$$
$$\zeta^q = \tilde{D}_q\zeta - F_t\tilde{D}_q\tau - F_S\tilde{D}_q\xi - F_q\tilde{D}_q\beta - F_\theta\tilde{D}_q\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_q\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_q\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_q\eta^q - F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_q\eta^\alpha,$$
$$\zeta^\theta = \tilde{D}_\theta\zeta - F_t\tilde{D}_\theta\tau - F_S\tilde{D}_\theta\xi - F_q\tilde{D}_\theta\beta - F_\theta\tilde{D}_\theta\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_\theta\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_\theta\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_\theta\eta^q - F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_\theta\eta^\alpha,$$
$$\zeta^{D_S^\alpha\theta} = \tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\zeta - F_t\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\tau - F_S\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\xi - F_q\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\beta - F_\theta\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta - F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta^\alpha - F_{\theta_t}\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta^t -$$
$$- F_{\theta_S}\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta^q,$$
$$\zeta^{\theta_t} = \tilde{D}_{\theta_t}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_t}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_t}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_t}\beta - F_\theta\tilde{D}_{\theta_t}\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^q -$$
$$- F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^\alpha,$$
$$\zeta^{\theta_S} = \tilde{D}_{\theta_S}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_S}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_S}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_S}\beta - F_\theta\tilde{D}_{\theta_S}\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^q -$$
$$- F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^\alpha.$$

Оператор Y будем искать в линейно-автономном виде:

$$\eta = p(t,S,q)\theta + g(t,S,q), \quad \tau_\theta = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \beta_\theta = 0.$$

Формулы продолжения η^t, η^q в таком случае имеют вид

$$\eta^t = D_t\eta - \theta_t D_t\tau - \theta_S D_t\xi - \theta_q D_t\beta = p_t\theta + g_t + p\theta_t - \theta_t\tau_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t,$$
$$\eta^q = D_q\eta - \theta_t D_q\tau - \theta_S D_q\xi - \theta_q D_q\beta = p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q.$$

Тогда подстановка формул продолжения и (5) в (7) дает

$$\zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}\eta^q_S|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}\eta^q_q|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta_\theta - F_{\theta_q}\eta^q_\theta|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta_{\theta_t} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_t}|_{\mathcal{M}} = 0,$$
$$\zeta_{\theta_S} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_S}|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta_{D_S^\alpha\theta} - F_{\theta_q}\eta^q_{D_S^\alpha\theta}|_{\mathcal{M}} = 0.$$

После подстановки формулы для η^q отсюда получаем

$$\zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}(p_{Sq}\theta + g_{Sq} + (p_S - \beta_{Sq})\theta_q - \xi_{Sq}\theta_S -$$
$$-\tau_{Sq}\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right)\Bigg) = 0,$$
$$\zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}(p_{qq}\theta + g_{qq} + (p_q - \beta_{qq})\theta_q - \xi_{qq}\theta_S -$$
$$-\tau_{qq}\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right)\Bigg) = 0,$$
$$\zeta_\theta - F_{\theta_q}p_q = 0, \quad \zeta_{\theta_t} + F_{\theta_q}\tau_q = 0, \quad \zeta_{\theta_S} + F_{\theta_q}\xi_q = 0, \quad \zeta_{D_S^\alpha\theta} = 0.$$

Разделение переменных в этих равенствах влечет уравнения

$$\tau_S = 0, \quad \tau_q = 0, \quad p_q = 0, \quad \xi_q = 0, \quad g_{Sq} = 0, \quad p_S - \beta_{Sq} = 0, \quad g_{qq} = 0, \quad \beta_{qq} = 0,$$
$$\zeta_S = 0, \quad \zeta_q = 0, \quad \zeta_\theta = 0, \quad \zeta_{\theta_t} = 0, \quad \zeta_{\theta_S} = 0, \quad \zeta_{D_S^\alpha\theta} = 0. \tag{8}$$

Теперь подстановка формул продолжения в (6) дает

$$p_t\theta + g_t + p\theta_t - \theta_t\tau_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t - rp\theta - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi +$$
$$+ \mu D_S^\alpha g + \mu\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau -$$
$$- \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k}D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) -$$
$$- \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k}D_S^{\alpha+1-k}\theta_t D_S^k\tau - \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k}D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau +$$
$$+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau -\right.$$
$$\left.- \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta - \beta\right) - \zeta|_{\mathcal{M}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= (p-\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right) + \\
&+ p_t\theta + g_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t - rp\theta - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \\
&+ \mu D_S^\alpha g + \mu\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \\
&- \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k}D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \\
&- \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k}D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \right. \\
&\left. - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta - \beta\right) - \zeta = 0. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Дифференцируем полученное уравнение по переменным $D_S^{\alpha+1}\theta$, $D_S^\alpha\theta_q$, θ_S, θ и получаем $\xi_t = 0$, $\beta_S = 0$, $p_t = r\tau_t$, $\tau_t = (\alpha+1)\xi_S$. Последнее соотношение влечет равенства $\xi_{SS} = 0$, $\tau_{tt} = 0$, так как $\tau_S = 0$ и $\xi_t = 0$. Используя равенство $p_S = \beta_{Sq}$ из (8), получаем $p_S = 0$. Итак,

$$
\tau_{tt} = 0, \quad \tau_t = (\alpha+1)\xi_S, \quad \xi_t = 0, \quad \xi_{SS} = 0, \quad \beta_S = 0, \quad p_t = r\tau_t, \quad p_S = 0. \qquad (10)
$$

Подстановка (10) в уравнение (9) дает

$$
\begin{aligned}
&(p-\tau_t)\left((\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right) + \\
&+ g_t - \theta_q\beta_t - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \mu D_S^\alpha g + \mu D_S^\alpha\theta\,(p - \alpha\xi_S) + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g - \\
&- \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + D_S^\alpha\theta\,(p - \alpha\xi_S) - \beta\right) - \zeta = 0. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Расщепляем полученное уравнение (11) по переменной $D_S^\alpha\theta$ и получаем

$$
(D_S^\alpha\theta)^2 : -\frac{1}{2}(p-\tau_t) - \frac{r}{2}\tau + p - \alpha\xi_S = 0, \qquad (12)
$$

$$
\begin{aligned}
&D_S^\alpha\theta : (p-\tau_t)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu\,(p - \alpha\xi_S) + rq\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha g - \beta - q(p - \alpha\xi_S)) = 0, \qquad (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&1 : (p-\tau_t)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) + g_t - \theta_q\beta_t - rg - \mu\beta + rS\beta + \\
&+ rq\xi + \mu D_S^\alpha g + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g - \frac{r}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(D_S^\alpha g - \beta\right) - \zeta = 0. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

При помощи равенства $\tau_t = (\alpha+1)\xi_S$ из (10) получаем из (12) выражение $p = r\tau + (\alpha-1)\xi_S$. Интегрирование уравнений $\tau_{tt} = 0$, $\xi_{SS} = 0$, $\tau_t = (\alpha+1)\xi_S$, $\xi_t = 0$ из (10) и $\xi_q = 0$, $\tau_q = 0$, $\tau_S = 0$ из (8) при условии $\xi(c) = 0$ дает $\tau = (\alpha+1)At + B$, $\xi = A(S-c)$. Дифференцирование (14) по θ_q и q дает $\beta_{tq} = 0$. Тогда интегрирование β_{qq} из (8) и $\beta_S = 0$ (10) дает $\beta = Eq + L(t)$. Дифференцирование (13) по S с подстановкой $\xi_{SS} = 0$, $\beta_S = 0$, $p_S = 0$ из (10) и $\tau_S = 0$ из (8) дает равенство $D_S D_S^\alpha g = D_S^{\alpha+1}g = 0$. Следовательно, $D_S^\alpha g = M(t,q)$ и формула (3) решения дифференциального уравнения дает

$$
g = H(t,q)(S-c)^{\alpha-1} + M(t,q)\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
$$

Ввиду $g_{qq} = 0$, $g_{Sq} = 0$ из (8) получаем $M_q = 0$, $H_q = 0$. Таким образом,

$$
\tau = A(\alpha+1)t + B, \quad \xi = A(S-c), \quad \beta = Eq + L(t), \qquad (15)
$$

$$
p = rB + A(r(\alpha+1)t + (\alpha-1)), \quad g = H(t)(S-c)^{\alpha-1} + M(t)\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (16)
$$

Подставляя эти равенства в (13), получаем

$$
\mu A + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(M(t) - Eq - L(t) - qA + rq((\alpha+1)At + B)) = 0.
$$

Его дифференцирование по q дает $E = -A + rB + r(\alpha+1)At$, поэтому $rA = 0$. Следовательно,

$$M(t) = L(t) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}, \quad rA = 0, \quad E = -A + rB. \tag{17}$$

Подстановка (15)–(17) в (14) дает

$$1 : (rB - 2A)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) + H_t(S-c)^{\alpha-1} + M_t\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \theta_q L_t -$$
$$- rH(S-c)^{\alpha-1} - rM\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \mu(Eq + L) + rS(Eq + L) + \mu M +$$
$$- \frac{rB}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(M - Eq - L) - \zeta = 0.$$

Расщепляем это уравнение по переменным q, S и получаем с учетом последнего равенства в (17)

$$(S-c)^{\alpha-1} : H_t - rH = 0, \quad \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} : M_t - rM = 0, \quad S : rL = 0, \tag{18}$$
$$1 : (rB - 2A)F - \theta_q L_t - \mu L - \zeta + \mu M = 0. \tag{19}$$

Решение уравнения на H в (18) есть $H = H_0 e^{rt}$. Подстановка (17) в уравнение на M (18) дает уравнение $L_t - rL = 0$ и с учетом $rL = 0$ получаем $L_t = 0$. Тогда вместе с подстановкой (17) в (19) получаем

$$H = H_0 e^{rt}, \quad L = L_0, \quad rL_0 = 0, \quad \zeta = (rB - 2A)F - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}. \tag{20}$$

Теперь подставляем (17), (20) в (15), (16) и получаем равенства

$$\tau = A(\alpha+1)t + B, \quad \xi = A(S-c), \quad \beta = (rB - A)q + L_0,$$
$$p = rB + A(\alpha-1), \quad g = H_0 e^{rt}(S-c)^{\alpha-1} + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L_0 - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right).$$

Если $r \neq 0$, то из (17) и (20) получаем, что $A = 0$, $L_0 = 0$, и тогда получаем утверждение.

Теорема 3.1. *Алгебра Ли генераторов непрерывных групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения* (4) *при* $r \neq 0$ *порождается операторами*

$$Y_1 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta + rF\partial_F, \quad Y_2 = e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta.$$

Если $r = 0$, то получаем теорему.

Теорема 3.2. *Алгебра Ли генераторов непрерывных групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения* (4) *при* $r = 0$ *порождается операторами*

$$Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad Y_3 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta,$$
$$Y_4 = (\alpha+1)\partial_t + (S-c)\partial_S - q\partial_q + \left((\alpha-1)\theta - \frac{\mu(S-c)^\alpha}{\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta - \left(2F + \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_F.$$

4. Групповая классификация. Для уравнения

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F(t, \theta_q), \tag{21}$$

при $\theta = \theta(t, S, q)$, $\gamma\sigma \neq 0$, $0 < \alpha < 1$, будем искать генераторы групп Ли линейно-автономных преобразований в виде $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta$, где τ, ξ, β, η зависят от t, S, q, θ. Продолженный оператор имеет вид

$$X^{\alpha+1} = X + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^\alpha\partial_{D_S^\alpha\theta} + \eta^{\alpha+1}\partial_{D_S^{\alpha+1}\theta} + \eta^q\partial_{\theta_q}.$$

Его действие на уравнение (21) дает равенство

$$\eta^t - r\eta - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \mu\eta^\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\eta^{\alpha+1} - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau +$$
$$+ \gamma\sigma e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)(\eta^\alpha - \beta) - F_t\tau - F_{\theta_q}\eta^q|_N = 0,$$

где $\mathcal{N}$ — алгебраическое многообразие в расширенном пространстве переменных, задаваемое уравнением (21). Отсюда с помощью формул продолжения получаем

$$
\begin{aligned}
&p_t\theta + g_t + p\theta_t - \theta_t\tau_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t - rp\theta - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \\
&+ \mu D_S^\alpha g + \mu\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \\
&- \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \\
&- \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_t D_S^k\tau - \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \right.\\
&\left.- \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta - \beta\right) - F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q)|_{\mathcal{N}} = 0.
\end{aligned}
$$

Переходим на многообразие $\mathcal{N}$:

$$
\begin{aligned}
&(p - \tau_t + F_{\theta_q}\tau_q)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right) + \\
&+ p_t\theta + g_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t - rp\theta - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \\
&+ \mu D_S^\alpha g + \mu\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \\
&- \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \\
&- \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_t D_S^k\tau - \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \right.\\
&\left.- \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta - \beta\right) - F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q) = 0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Дифференцируем полученное уравнение (22) по $D_S^\alpha\theta_t$, $D_S^\alpha\theta_q$, $D_S^{\alpha+1}\theta$, θ, θ_S и получаем $\tau_S = 0$, $\beta_S = 0$, $\tau_t - F_{\theta_q}\tau_q = (\alpha+1)\xi_S$, $r(F_{\theta_q}\tau_q - \tau_t) + p_t - F_{\theta_q}p_q = 0$, $\xi_t - F_{\theta_q}\xi_q = 0$. Из $\tau_S = 0$ и $\tau_t - \tau_q F\theta_q = (\alpha+1)\xi_S$ получаем $\xi_{SS} = 0$. Далее, дифференцируя (22) последовательно по $D_S^\alpha\theta$ и $D_S^{\alpha-1}\theta$, получаем равенство $p_S + \frac{1-\alpha}{2}\xi_{SS} = p_S = 0$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\tau_S = 0, \quad \xi_{SS} = 0, \quad \beta_S = 0, \quad p_S = 0, \quad \tau_t - \tau_q F_{\theta_q} = (\alpha+1)\xi_S, \quad \xi_t - F_{\theta_q}\xi_q = 0,\\
&r(F_{\theta_q}\tau_q - \tau_t) + p_t - F_{\theta_q}p_q = 0.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Подстановка равенств (23) в (22) дает

$$
\begin{aligned}
&(p - (\alpha+1)\xi_S)\left((\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right) + g_t - \theta_q\beta_t - rg - \mu\beta + \\
&+ rS\beta + rq\xi + \mu D_S^\alpha g + \mu D_S^\alpha\theta\,(p - \alpha\xi_S) + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + D_S^\alpha\theta\,(p - \alpha\xi_S) - \beta\right) - F_t\tau - F_{\theta_q}(g_q + p\theta_q - \theta_q\beta_q) = 0.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Расщепляя уравнение (24), получим

$$(D_S^\alpha\theta)^2 : -r\tau + p + (1-\alpha)\xi_S = 0, \tag{25}$$

$$D_S^\alpha\theta : (p-(\alpha+1)\xi_S)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu\,(p-\alpha\xi_S) + rq\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau + \tag{26}$$
$$+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(D_S^\alpha g - \beta - q\,(p-\alpha\xi_S)\right) = 0,$$

$$1 : (p-(\alpha+1)\xi_S)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) + g_t - \theta_q\beta_t - rg - \mu\beta + \tag{27}$$
$$+ rS\beta + rq\xi + \mu D_S^\alpha g + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g - \frac{r}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha g - \beta) -$$
$$- F_t\tau - F_{\theta_q}(g_q + p\theta_q - \theta_q\beta_q) = 0.$$

Из (25) получаем $p = r\tau + (\alpha-1)\xi_S$.

Интегрирование уравнения $\xi_{SS} = 0$ из (23) при условии $\xi(c) = 0$ дает $\xi = A(t,q)(S-c)$. Следовательно, из (23) получаем

$$\xi = A(t,q)(S-c), \quad p = r\tau + (\alpha-1)A(t,q), \quad \tau_t - F_{\theta_q}\tau_q = (\alpha+1)A(t,q), \quad A_t - F_{\theta_q}A_q = 0. \tag{28}$$

Подстановка ξ и p из (28) в (26) дает равенство $\mu A + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(D_S^\alpha g - \beta + r\tau q - qA\right) = 0$. Отсюда

$$D_S^\alpha g = \beta + q(A - r\tau) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}.$$

Его общее решение по формуле (3) имеет вид

$$g = \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\beta + q(A-r\tau) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + M(t,q)(S-c)^{\alpha-1}. \tag{29}$$

Подстановка полученных g из (29), p и ξ из (28) в (27) приводит к уравнению

$$(r\tau - 2A)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) - \theta_q\beta_t - \mu\beta +$$
$$+ \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\beta_t + q(A_t - r\tau_t) - \frac{\mu(A_t + rA)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + M_t(S-c)^{\alpha-1} +$$
$$+ \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(-r\beta - rq(A - r\tau) + r\frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) - rM(S-c)^{\alpha-1} + rS\beta + rqA(S-c) + \mu\beta +$$
$$+ \mu q(A - r\tau) - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - \frac{r}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(q(A-r\tau) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) -$$
$$- F_t\tau - F_{\theta_q}\left(\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\beta_q + A - r\tau + q(A_q - r\tau_q) - \frac{\mu A_q e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) -\right.$$
$$\left. + M_q(S-c)^{\alpha-1} + \theta_q(r\tau + (\alpha-1)A - \beta_q)\right) = 0. \tag{30}$$

Расщепляем (30) по S и получаем

$$\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} : \beta_t + q(A_t - r\tau_t) - \frac{\mu A_t e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - r\beta - rq(A - r\tau) -$$
$$- F_{\theta_q}\left(\beta_q + A - r\tau + q(A_q - r\tau_q) - \frac{\mu A_q e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) = 0,$$
$$(S-c)^{\alpha-1} : M_t - rM - F_{\theta_q}M_q = 0,$$
$$S : -rq(r\tau - 2A) + r\beta + rqA = 0,$$
$$1 : (r\tau - 2A)\left(\mu q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) - \theta_q\beta_t - \mu\beta - rqAc + \mu\beta + \mu q(A - r\tau) - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} -$$
$$- \frac{r}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau - q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(A - r\tau) + \mu qA - F_t\tau - F_{\theta_q}\left(r\tau + (\alpha-1)A - \beta_q\right)\theta_q = 0.$$

Сокращение с использованием равенств $A_t - F_{\theta_q} A_q = 0$ и $\tau_t - F_{\theta_q}\tau_q = (\alpha+1)A$ из (28) дает

$$\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} : \beta_t - rq(\alpha+2)A - r\beta + r^2 q\tau - F_{\theta_q}\left(\beta_q + A - r\tau\right) = 0, \tag{31}$$

$$(S-c)^{\alpha-1} : M_t - rM - F_{\theta_q} M_q = 0, \tag{32}$$

$$S : -rq(r\tau - 3A) + r\beta = 0, \tag{33}$$

$$1 : (r\tau - 2A)F - \theta_q\beta_t - rqAc - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - F_t\tau - F_{\theta_q}\left(r\tau + (\alpha-1)A - \beta_q\right)\theta_q = 0. \tag{34}$$

5. Предположение $\mathbf{F}_{\theta_q\theta_q} \neq 0$. В предположении $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ из уравнений (28), (31), (32) получим, что

$$A_t = 0, \quad A_q = 0, \quad \tau_q = 0, \quad \tau_t = (\alpha+1)A, \quad \beta_q = r\tau - A, \quad M_q = 0, \quad M_t - rM = 0. \tag{35}$$

Теперь дифференцируем (34) по θ_q и q и получаем ввиду $\tau_q = 0$, $A_q = 0$, $\beta_{qq} = 0$ из (35) выражение $0 = \beta_{tq} = r\tau_t - A_t = r(\alpha+1)A$, отсюда $rA = 0$. Интегрирование $\tau_S = 0$ из (34), $\tau_q = 0$, $\tau_t = (\alpha+1)A$ из (35) дает $\tau = (\alpha+1)At + B$. Интегрирование уравнений также дает $\beta = (rB - A)q + L(t)$, $M = M_0 e^{rt}$. Тогда с учетом (28) получаем

$$\tau = (\alpha+1)At + B, \quad \xi = A(S-c), \quad \beta = (rB - A)q + L(t), \quad M = M_0 e^{rt}, \quad rA = 0. \tag{36}$$

Подстановка этих равенств в выражения для p (28) и g (29) дает

$$p = rB + (\alpha-1)A, \quad g = \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L(t) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + M_0 e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}. \tag{37}$$

Подстановка (36) в равенства (31), (33) и (34) дает

$$L_t = 0, \quad rL = 0, \quad (rB - 2A)F - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - F_t((\alpha+1)At + B) - \alpha A F_{\theta_q}\theta_q = 0. \tag{38}$$

Если $r \neq 0$, то из (36), (38) получаем $L = 0$, $A = 0$. Их подстановка в (36)–(38) дает

$$\tau = B, \quad \xi = 0, \quad \beta = rBq, \quad p = rB, \quad g = M_0 e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}, \quad rBF - BF_t = 0.$$

Решение уравнения $rBF - BF_t = 0$ при $B \neq 0$ имеет вид $F = e^{rt}G(\theta_q)$, $G'' \neq 0$. Если $B = 0$, то получаем случай произвольной функции.

Теорема 5.1. *Алгебра Ли уравнения* (21) *при* $r \neq 0$, $F = e^{rt}G(\theta_q)$, $G'' \neq 0$, *порождается операторами*

$$X_1 = e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta.$$

Алгебра Ли уравнения (21) *при* $r \neq 0$ *и функции* $F = F(t, \theta_q)$, $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *не эквивалентной функции вида* $e^{rt}G(\theta_q)$, *порождается оператором*

$$X_1 = e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta.$$

Если $r = 0$ то уравнения (36)–(38) принимают вид

$$\tau = (\alpha+1)At + B, \quad \xi = A(S-c), \quad \beta = -Aq + L, \quad p = (\alpha-1)A, \tag{39}$$

$$g = \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L - \frac{\mu A}{\gamma\sigma^2}\right) + M_0(S-c)^{\alpha-1}, \tag{40}$$

$$2AF + \frac{\mu^2 A}{\gamma\sigma^2} + F_t((\alpha+1)At + B) + \alpha A F_{\theta_q}\theta_q = 0. \tag{41}$$

Уравнение (41) является классифицирующим, рассмотрим его подробнее.

1. Если $A \neq 0$, то общее решение уравнения (41) имеет вид

$$F = \frac{1}{2A}((\alpha+1)At + B)^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(((\alpha+1)At + B)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2},$$

где Φ — произвольная функция. При помощи преобразования эквивалентности, порождаемых оператором $X_2 = \partial_t$, получаем

$$F = t^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}. \tag{42}$$

Подстановка этой функции в классифицирующее уравнение дает

$$2At^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - ((\alpha+1)At+B)\left[\frac{2}{\alpha+1}t^{-\frac{2}{\alpha+1}-1}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) + \frac{\alpha}{\alpha+1}t^{-\frac{1}{\alpha+1}-2}\Phi'(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q)\theta_q\right] +$$
$$+\alpha At^{-\frac{1}{\alpha+1}-1}\Phi'(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q)\theta_q = 0.$$

После сокращения и обозначения $z = t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q$ получаем $B(2\Phi(z) + \alpha z\Phi'(z)) = 0$.

1.1. Если $B \neq 0$, решение этого уравнения имеет вид $\Phi(z) = Cz^{-\frac{2}{\alpha}}$, т. е.

$$F = C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}.$$

1.2. Если $B = 0$, то остается функция вида (42) при произвольном Φ, $\Phi'' \neq 0$.

2. Если $A = 0$, то получаем подстановкой в (39)–(41) равенства

$$\tau = B, \quad \xi = 0, \quad \beta = L, \quad p = 0, \quad g = L\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + M_0(S-c)^{\alpha-1}, \quad BF_t = 0.$$

2.1. Если $B \neq 0$, то получаем $F = F(\theta_q)$, $F'' \neq 0$.

2.2. Если $B = 0$, то $F = F(t, \theta_q)$ — произвольная функция, для которой $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему о групповой классификации.

Теорема 5.2. *1. Алгебра Ли уравнения*

$$\theta_t = \mu q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F(t,\theta_q) \tag{43}$$

при $F = C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$ *порождается операторами*

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta,$$
$$X_4 = (\alpha+1)\partial_t + (S-c)\partial_S - q\partial_q + \left((\alpha-1)\theta - \frac{\mu(S-c)^\alpha}{\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta.$$

2. Алгебра Ли уравнения (43) *при функции* $F = t^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, $\Phi'' \neq 0$, *не эквивалентной функции вида* $C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, *порождается операторами*

$$X_1 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta,$$
$$X_3 = (\alpha+1)\partial_t + (S-c)\partial_S - q\partial_q + \left((\alpha-1)\theta - \frac{\mu(S-c)^\alpha}{\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta.$$

3. Алгебра Ли уравнения (43) *при функции* $F = F(\theta_q)$, $F'' \neq 0$, *не эквивалентной функциям вида* $C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, $t^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, *порождается операторами*

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta.$$

4. Алгебра Ли уравнения (43) *при функции* $F = F(t,\theta_q)$, $F_t \neq 0$, $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *не эквивалентной функциям вида* $C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, $t^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, *порождается операторами*

$$X_1 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta.$$

Список литературы

1. Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю. 2007. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка. Вестник УГАТУ, 9(3): 125–135.

2. Ядрихинский Х. В., Федоров В. Е. 2021. Инвариантные решения модели Геана – Пу ценообразования опционов и хеджирования. Челябинский физико-математический журнал, 6(1): 43–52. doi:10.47475/2500-0101-2021-16104.

3. Fall A. N., Ndiaye S. N., Sene N. 2019. Black — Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative. Chaos, Solitons and Fractals, 125: 108–118. doi:10.1016/j.chaos.2019.05.024.
4. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. 2019. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs. In: Fractional Differential Equations, vol. 2, Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Munich, Boston, 2019, 353–382. doi:10.1515/9783110571660-016.
5. Gueant O. 2016. The Financial Mathematics of Market Liquidity: From Optimal Execution to Market Making. Chapman and Hall/CRC, London, 302. doi:10.1201/b21350.
6. Gueant O., Pu J. 2013. Option pricing and hedging with execution costs and market impact. arXiv: 1311.4342. doi:10.48550/arXiv.1311.4342.
7. Kumar S., Yildirin A., Khan Y., Jafari H., Sayevand K., Wei L. 2012. Analytical solution of fractional Black – Scholes European option pricing equations using Laplace transform. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2: 1–9.
8. Sawangtong P., Trachoo K., Sawangtong W., Wiwattanapataphee B. 2018. The analytical solution for the Black – Scholes equation with two assets in the Liouville – Caputo fractional derivative sense. Mathematics, 8: 129. doi:10.3390/math6080129.
9. Sitnik S. M., Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2022. Symmetry analysis of a model of option pricing and hedging. Symmetry, 14: 1841. doi:10.3390/sym14091841.
10. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2023. Recursion operators for the Gueant–Pu model. Lobachevskii Journal of Mathematics, 44(3): 1236–1240. doi:10.1134/S1995080223030344.
11. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2022. Symmetry analysis of the Gueant – Pu model. AIP Conference Proceedings, 2528: 020035. doi:10.1063/5.0106164.
12. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E., Dyshaev M. M. 2021. Group analysis of the Gueant and Pu model of option pricing and hedging, In: Symmetries and Applications of Differential Equations, ed. by A. C. J. Luo and R. K. Gazizov, Springer, Singapore, 173–203. doi:10.1007/978-981-16-4683-6_6.

References

1. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. 2007. Nepreryvnye gruppy preobrazovaniy differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka [Continuous transformation groups of fractional differential equations]. Vestnik UGATU, 9(3): 125–135.
2. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2021. Invariant solutions of the Gueant — Pu model of options pricing and hedging. Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal, 6(1): 43–52. (in Russian) doi:10.47475/2500-0101-2021-16104.
3. Fall A. N., Ndiaye S. N., Sene N. 2019. Black – Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative. Chaos, Solitons and Fractals, 125: 108–118. doi:10.1016/j.chaos.2019.05.024.
4. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. 2019. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs. In: Fractional Differential Equations, vol. 2, Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Munich, Boston, 2019, 353–382. doi:10.1515/9783110571660-016.
5. Gueant O. 2016. The Financial Mathematics of Market Liquidity: From Optimal Execution to Market Making. Chapman and Hall/CRC, London, 302. doi:10.1201/b21350.
6. Gueant O., Pu J. 2013. Option pricing and hedging with execution costs and market impact. arXiv: 1311.4342. doi:10.48550/arXiv.1311.4342.
7. Kumar S., Yildirin A., Khan Y., Jafari H., Sayevand K., Wei L. 2012. Analytical solution of fractional Black – Scholes European option pricing equations using Laplace transform. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2: 1–9.
8. Sawangtong P., Trachoo K., Sawangtong W., Wiwattanapataphee B. 2018. The analytical solution for the Black – Scholes equation with two assets in the Liouville – Caputo fractional derivative sense. Mathematics, 8: 129. doi:10.3390/math6080129.
9. Sitnik S. M., Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2022. Symmetry analysis of a model of option pricing and hedging. Symmetry, 14: 1841. doi:10.3390/sym14091841.
10. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2023. Recursion operators for the Gueant–Pu model. Lobachevskii Journal of Mathematics, 44(3): 1236–1240. doi:10.1134/S1995080223030344.
11. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2022. Symmetry analysis of the Gueant–Pu model. AIP Conference Proceedings, 2528: 020035. doi:10.1063/5.0106164.
12. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E., Dyshaev M. M. 2021. Group analysis of the Gueant and Pu model of option pricing and hedging, In: Symmetries and Applications of Differential Equations, ed. by A. C. J. Luo and R. K. Gazizov, Springer, Singapore, 173–203. doi:10.1007/978-981-16-4683-6_6.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.05.2023 Received May 22, 2023
Поступила после рецензирования 04.07.2023 Revised July 4, 2023
Принята к публикации 08.07.2023 Accepted July 8, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ядрихинский Христофор Васильевич – младший научный сотрудник Якутского отделения Дальневосточного центра математических исследований, Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, г. Якутск, Россия

Федоров Владимир Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет; главный научный сотрудник Якутского отделения Дальневосточного центра математических исследований, Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, г. Челябинск, Россия; Якутск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Khristofor V. Yadrikhinskiy – Junior Research Assistant of Yakut Branch of the Far Eastern Center for Mathematical Research, North East Federal University named after M. K. Ammosov, Yakutsk, Russia

Vladimir E. Fedorov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia; Chief Scientific Officer of Yakut Branch of the Far Eastern Center for Mathematical Research, North East Federal University named after M. K. Ammosov, Chelyabinsk, Russia; Yakutsk, Russia