Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 228–235.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 228–235.

УДК 517.98 DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-228-235
MSC 47B35
Оригинальное исследование

О структуре спектра и резольвентного множества оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве гладких функций

Пасенчук А. Э.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)
Южно-Российский государственный политехнический университет имени М. И. Платова,
Россия, 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
pasenchuk@mail.ru

Аннотация. В счетно-нормированном пространстве гладких на единичной окружности функций рассматривается оператор Теплица с гладким символом. Изучаются вопросы об ограниченности, нетеровости и обратимости таких операторов. Вводятся понятия гладкой канонической вырожденной факторизации типа минус гладких функций и связанной с ней локальной вырожденной канонической факторизации типа минус. Получены критерии в терминах символа существования канонической вырожденной факторизации типа минус. Как и в классическом случае оператора Теплица в пространствах суммируемых функций с винеровскими символами, нетеровость оператора Теплица оказалась равносильной наличию гладкой вырожденной канонической факторизации типа минус его символа. Устанавливается эквивалентность вырожденной канонической факторизуемости и аналогичной локальной факторизуемости, что позволяет при исследовании вопросов обратимости пользоваться локализацией символа на некоторых характерных дугах окружности. Получены соотношения, связывающие спектры некоторых операторов Теплица в пространствах гладких и суммируемых функций. Дается описание резольвентного множества оператора Теплица с гладким символом.

Ключевые слова: оператор Теплица, нетеровость, обратимость, гладкий оператор, вырожденный оператор, факторизация, сингулярный, индекс, спектр

Для цитирования: Пасенчук А. Э. 2023. О структуре спектра и резольвентного множества оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве гладких функций. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 228–235.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-228-235

Original Research

On the Structure of the Spectrum and the Resolvent Set of the Toeplitz Operator in a Countably Normed Space of Smooth Functions

Alexander E. Pasenchuk

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)*

South-Russian State Polytechnic University named after V. I. Platov,
132 Enlightenment st., Novocherrassk, 346428, Russia
pasenchukz@mail.ru

Abstract. In a countable normed space of smooth functions on the unit circle, we consider the Toeplitz operator with a smooth symbol. Boundedness, Notherianity and invtrbillity of such operators are studied. The concepts of a smooth canonical degenerate factorization on the minus type of smooth functions and the associated local degenerate canonical factorization of the minus type are introduced. Criteria are obtained in terms of the symbol for existence of a canonical degenerate factorization of type minus. As in the classical case of the Toeplitz operator in spaces of summable functions with Wiener symbols, the Toeplitz operator being Noterian turned out to be equivalent to the presence of a canonical factorization its symbol. The equivalence of the degenerate canonical factorizability is established, which makes it possible to use the localization of the symbol of certain characteristic arcs of the circle when studying Invertibility questions. The equivalence of the degenerate canonical factorizability is established, which makes it possible to use the localization of the symbol on certain characteristic arcs of the circle when studying Invertibility questions. Relations are obtained that relate the spectra of some Toeplitz operators in the spaces smooth and summable functions. A description is given of the resolvent set of the Toeplitz operator with smooth symbol.

Keywords: Toeplitz Operator, Noetherianness, Invertibillity, Smooth Operator, Degenerate Operator, Factorization, Singular, Index, Spectrum

For citation: Pasenchuk A. E. 2023. On the Structure of the Spectrum and the Resolvent Set of the Toeplitz Operator in a Countably Normed Space of Smooth Functions. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 228–235. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-228-235

1. Введение. Пусть N, Z, R, C – множества натуральных, целых, вещественных, комплексных чисел соответственно, а

$$Z_+ = \{j \in Z : j \geq 0\}, Z_- = Z \backslash Z_+, \Gamma = \{z \in C : |z| = 1\}, D^+ = \{z \in C : |z| < 1\}, D^- = \{z \in C : |z| > 1\}.$$

Введем следующие множества функций, определенных на единичной окружности

$$C^m(\Gamma) = \left\{\varphi(\xi) = \sum_{j \in Z} \varphi_j \xi^j,\ \varphi_j \in C,\ \xi \in \Gamma :\ \sum_{j \in Z} (|j| + 1)^{2m} \left|\varphi_j\right|^2 < \infty\right\}, m \in Z_+.$$

$C^m(\Gamma)$ является гильбертовым пространством относительно поточечных линейных операций и нормы

$$\left\|\sum_j \varphi_j \xi^j\right\|_m = \sqrt{\sum_{j \in Z} (|j| + 1)^{2m} \left|\varphi_j\right|^2}.$$

При этом $C^0(\Gamma) = L_2(\Gamma)$ – гильбертово пространство измеримых суммируемых с квадратом на Γ-функций. Пересечение

$$C^\infty(\Gamma) = \bigcap_{m \in Z_+} C^m(\Gamma)$$

является счетно-гильбертовым пространством функций, топология в котором задается при помощи счетного набора норм $\|\bullet\|_m$, $m \in Z_+$. Формулами

$$P^\pm\left(\sum_{j \in Z} \varphi_j \xi^j\right) = \sum_{j \in Z_\pm} \varphi_j \xi^j,$$

определим операторы проектирования $P^\pm$ и положим:

$$C_+^m(\Gamma) = P^+(C^m(\Gamma)), \tilde{C}_-^\infty(\Gamma) = P^-(C^\infty(\Gamma)), C_-^m(\Gamma) = C \oplus \tilde{C}_-^m(\Gamma), m \in Z_+ \bigcup \{\infty\}.$$

Для случая $m = 0$ будем использовать стандартные обозначения

$$C^0(\Gamma) = L_2(\Gamma), \quad C_\pm^0(\Gamma) = L_2^\pm(\Gamma).$$

Оператор

$$T(a) = \left|P^+ a(\xi)\right|_{ImP^+}, T(a) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

называют оператором Теплица, а функцию $a(\xi)$ называют символом этого оператора. В этой работе мы будем предполагать, что $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$.

Оператору Теплица $T(a)$ и родственным операторам посвящено большое число работ. Наиболее полные результаты относительно этого оператора были получены в банаховых пространствах гельдеровых и суммируемых функций. В этих пространствах для широкого класса символов построена полная теория Нетера оператора $T(a)$. Современное состояние теории оператора Теплица и подобных операторов в случае банаховых пространств отражено в монографиях [1]-[4] и цитируемых там работах. Оператор Теплица в случае счетно-нормированного пространства изучался в ряде исследований, многие из которых цитируются в монографиях [4, 7, 8]. В этих работах были установлены критерии нетеровости и обратимости. Однако критерий обратимости был получен в терминах, которые делали его практическое применение весьма трудной задачей. Нами получен новый критерий обратимости оператора Теплица в пространстве гладких функций, позволяющий дать описание спектра и резольвентного множества рассматриваемого оператора. Приводятся утверждения о структуре этих множеств.

2. Вспомогательные результаты. Здесь мы формулируем некоторые вспомогательные понятия и результаты, подробное изложение которых приведено в работах [4]-[6]. Введем следующие линейные функционалы $\pi_k : C_+^\infty(\Gamma) \to C$, действующие по формуле

$$\pi_k\left(\sum_{j \in Z_+} \varphi_j \xi^j\right) = \varphi_k$$

и связанные с ними операторы проектирования

$$\tilde{\pi}_k : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma), \tilde{\pi}_k\left(\sum_{j \in Z_+} \varphi_j \xi^j\right) = \varphi_k \xi^k, \quad k \in Z_+.$$

Оператору $D : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$ поставим в соответствие следующую матрицу:

$$\left(d_{kj}\right), \quad d_{kj} = \pi_k D \tilde{\pi}_j, \quad (k, j) \in Z_+^2.$$

Лемма 1. *Имеет место равенство $D = \sum_{k \in Z_+} \xi^k \sum_{j \in Z_+} d_{kj}$, понимаемое в сильном смысле. Оператор $D : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$ ограничен тогда и только тогда, когда элементы матрицы $\left(d_{kj}\right)$ таковы, что для всех $(k, j) \in Z_+^2$ по любому $n \in Z_+$ найдутся $c_n > 0$ и $m_n \in Z_+$ так, что*

$$\left|d_{kj}\right| \leq c_n (k+1)^{-n} (j+1)^{m_n}.$$

Следствие. *Для оператора Теплица*

$$T(a) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

с символом

$$a(\xi) = \sum_{j \in Z} a_j \xi^j \in C^\infty(\Gamma)$$

имеем $d_{kj} = a_{k-j}$, поэтому оператор $T(a)$ с символом $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ ограничен в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$.

Однако иногда ограниченный оператор Теплица может быть определен и для некоторых, вообще говоря, разрывных на Γ функций. Рассмотрим, например, функцию $a^-(\xi)$, аналитическую в области D^-. Пусть $a^-(\xi) = \sum_{j \in Z_+} a_j \xi^{-j}$ – разложение в ряд Лорана этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Оператор

$$T(a^-) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

ограничен тогда и только тогда, когда найдутся $c_0 > 0$ и $m_0 \in Z_+$ так, что $\left|a_j\right| \leq c_0 (j+1)^{m_0}$. В частности, символ

$$a^-(\xi) = \left(\xi^{-1} - \mu\right)^{-1} = -\sum_{j \in Z_+} \mu^{-j-1} \xi^{-j}$$

порождает ограниченный в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$ оператор Теплица при всех $\mu : |\mu| \geq 1$.

Лемма 2. *Пусть $a^-(\xi)$- функция, аналитическая в области D^-. Оператор Теплица $T(a^-)$, ограниченный в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$, обратим тогда и только тогда, когда*

$$a^-(\xi_0) \neq 0, \forall \xi_0 \in D^-$$

и если

$$\left(a^-(\xi)\right)^{-1} = \sum_{l \in Z_+} b_j \xi^{-j}$$

– разложение функции $\left(a^-(\xi)\right)^{-1}$ в ряд Лорана в окрестности точки $\xi = \infty$, то найдутся $c_0 > 0$ и $m_0 \in Z_+$ так, что $\left|b_j\right| \leq c_0 (j+1)^{m_0}$. При выполнении этих условий

$$\left(T(a^-)\right)^{-1} = T\left((a^-)^{-1}\right).$$

Следствие. *Оператор*

$$T\left(\prod_{j=1}^{m} \left(\xi^{-1} - \mu_j\right)\right) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

обратим тогда и только тогда, когда

$$\left|\mu_j\right| \geq 1, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Рассмотрим функцию $a^+(\xi)$, аналитическую в области D^+. Из леммы 1 вытекает, что порождаемый этой функцией оператор Теплица

$$T\left(a^+\right) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

ограничен тогда и только тогда, когда

$$a^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma).$$

Лемма 3. *Пусть функция $a^+(\xi)$ аналитическая в области D^+. Оператор Теплица*

$$T\left(a^+\right) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

ограничен тогда и только тогда, когда обратим тогда и $a^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma)$. Для обратимости этого оператора необходимо и достаточно, чтобы

$$a^+(\xi) \in GC_+^\infty(\Gamma).$$

При выполнении последнего условия

$$\left(T\left(a^{+}\right)\right)^{-1}=T\left(\left(a^{+}\right)^{-1}\right).$$

Определение. *Будем говорить, что функция $a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$ допускает каноническую гладкую вырожденную факторизацию типа минус, если имеет место равенство $a(\xi)=a^{-}(\xi)\cdot a^{+}(\xi)$, причем компоненты факторизации $a^{\pm}(\xi)$ удовлетворяют условиям: $a^{\pm}(\xi)\in C^{\infty}_{\pm}(\Gamma)$ и операторы Теплица*

$$T\left(a^{\pm}\right):C^{\infty}_{+}(\Gamma)\to C^{\infty}_{+}(\Gamma)$$

обратимы.

Теорема 1. *Оператор Теплица*

$$T(a):C^{\infty}_{+}(\Gamma)\to C^{\infty}_{+}(\Gamma),\, a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$$

обратим тогда и только тогда, когда его символ допускает каноническую гладкую вырожденную факторизацию типа минус.

Пусть $a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma,C)$ и имеет на Γ конечное число нулей z_k порядков $n_k,\quad k=1,2,...,s$ соответственно. Назовем число $n(a)=\sum_{k=1}^{s}n_k$ суммарным числом нулей этой функции. Если $n(a)<\infty$, то может быть введен функционал

$$\kappa_c(a)=\frac{1}{\pi i}v.p.\int_{\Gamma}\frac{a'(\xi)}{a(\xi)}d\xi.$$

Функционал $\kappa_c(a)$ называют сингулярным индексом функции $a(\xi)$.

Теорема 2. *Функция $a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$ допускает гладкую вырожденную факторизацию типа минус тогда и только тогда, когда она имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков и при этом имеет место равенство $\kappa_c(a)=-n(a)$.*

Следствие. *Оператор Теплица*

$$T(a):C^{\infty}_{+}(\Gamma)\to C^{\infty}_{+}(\Gamma)$$

с символом $a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$ обратим тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1)n(a)<\infty, 2)\kappa_c(a)=-n(a).$$

3. Локальная вырожденная факторизация.

Определение. *Будем говорить, что функция $a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$ допускает локальную каноническую вырожденную факторизацию типа минус на окружности Γ, если найдется конечное число дуг этой окружности, удовлетворяющих следующим условиям: 1) дуги $\gamma_k,\quad k=1,2,...,m$ таковы, что*

$$\gamma_k\bigcap\gamma_{k+1}\neq\emptyset,\quad k=1,2,...,m-1;\quad \gamma_1\bigcap\gamma_m\neq\emptyset;\quad \Gamma=\bigcup\gamma_k;$$

2) для каждой дуги γ_k найдутся области $\Delta^{+}_{k},\quad \Delta^{-}_{k}$, так, что дуга $\gamma_k,\quad k=1,2,...,m$ является частью границы каждой из этих областей; 3) на любой дуге γ_k имеет место равенство

$$a(\xi)=g^{-}_{k}(\xi)\,a^{-}_{k}(\xi)\,a^{+}_{k}(\xi),$$

где функции $a^{\pm}_{k}(\xi)$ аналитически продолжимы в области $\Delta^{\pm}_{k}$ и непрерывны на γ_k, функция

$$g^{-}_{k}(\xi)\in C^{\infty}_{-}(\Gamma);$$

4) функции

$$a^{\pm}_{k}(\xi)\neq 0,\qquad \xi\in\Delta^{\pm}_{k}\bigcup\Gamma;$$

5) оператор

$$T\left(g^{-}_{k}\right):C^{\infty}_{+}(\Gamma)\to C^{\infty}_{+}(\Gamma)$$

обратим.

Отметим, что при $g^{-}_{k}(\xi)=1$ понятие локальной вырожденной факторизации типа минус совпадает с понятием локальной канонической факторизации (см. [3, с. 102]). Ясно также, что если функция $a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$ допускает локальную каноническую вырожденную факторизацию типа минус, то функция

$$a_0(\xi)=\prod_{k=1}^{m}\left(g^{-}_{k}(\xi)\right)^{-1}a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$$

допускает локальную каноническую факторизацию.

Замечание. *Функция* $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ *не допускает локальной канонической факторизации в точке* $\xi_0 \in \Gamma$, *если для любой достаточно малой дуги окружности* Δ, *содержащей эту точку, найдутся функции*

$$a_{\Delta}^{-}(\xi) \in C_{-}^{\infty}(\Gamma), \quad a_{\Delta}(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$$

такие, что 1) имеют место соотношения

$$a(\xi) = a_{\Delta}^{-}(\xi)\, a_{\Delta}(\xi), \ \xi \in \Delta;$$

2) оператор $T\left(a_{\Delta}^{-}(\xi)\right)$ *необратим; 3) оператор* $T\left(a_{\Delta}(\xi)\right)$ *обратим.*

Теорема 3. *Оператор Теплица*

$$T(a) : C_{+}^{\infty}(\Gamma) \to C_{+}^{\infty}(\Gamma)$$

с символом $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ *обратим тогда и только тогда, когда его символ допускает локальную каноническую вырожденную факторизацию типа минус на окружности* Γ.

Доказательство. Если оператор $T(a)$ обратим, то согласно теореме 2, его символ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных кратностей и при этом имеет место равенство $\kappa_c(a) = n(a)$. Пусть $\xi_k, \quad k = 1, 2, ..., m$ – все нули функции $a(\xi)$ кратностей $n_k, \quad k = 1, 2, ..., m$ соответственно. Тогда функция

$$a_0(\xi) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{-n_k} a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$$

и $a_0(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \Gamma$. Кроме того, простые вычисления показывают, что

$$\underset{\Gamma}{ind}\, a_0(\xi) = 2\kappa_c(a_0) = 2(\kappa_c(a) + n(a)) = 0.$$

Как известно (см., например, [2]), тогда имеет место представление

$$a_0(\xi) == a_0^{-}(\xi)\, a_0^{+}(\xi),$$

где

$$a_0^{\pm}(\xi) = \exp\left(P^{\pm} \ln a_0(\xi)\right) \in GC_{\pm}^{\infty}(\Gamma).$$

Отсюда следует, что

$$a(\xi) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{n_k} a_0^{-}(\xi)\, a_0^{+}(\xi).$$

Выберем на окружности Γ набор дуг $\gamma_k, \ \ k = 1, 2, ..., m$ так, чтобы они удовлетворяли условиям 1), 2) из определения локальной канонической вырожденной факторизации типа минус. Тогда на дуге γ_k функция $a(\xi)$ допускает представление

$$a(\xi) = \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{n_k} a_k^{-}(\xi)\, a_k^{+}(\xi) \ ,$$

где

$$a_k^{-}(\xi) = \prod_{j \neq k} \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{n_j} a_0^{-}(\xi), a_k^{+}(\xi) = a_0^{+}(\xi).$$

Выбрав в качестве областей $\Delta_k^{+}, \ \ \Delta_k^{-}$ подходящие части областей $D^{+}, \ \ D^{-}$, получим, что функция $a(\xi)$ допускает локальную каноническую вырожденную факторизацию типа минус. Обратно, как было отмечено выше, из локальной вырожденной факторизуемости функции $a(\xi)$ вытекает локальная факторизуемость функции функция $a_0(\xi)$.

Как известно (см., например, теорема 6.1, [3], стр. 102) имеет место представление

$$a_0(\xi) = a_0^{-}(\xi)\, a_0^{+}(\xi).$$

В этом представлении функции $a_0^{\pm}(\xi)$ аналитически продолжимы в области $D^{\pm}$ соответственно, непрерывны на Γ и $a_0^{\pm}(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \overline{D^{\pm}}$. Это означает, что $\underset{\Gamma}{ind}\, a_0(\xi) = 0$, поэтому существует гладкая каноническая факторизация функции $a_0(\xi)$. В силу единственности канонической факторизации функции $a_0^{\pm}(\xi)$ могут отличаться от функций $\exp\left(P^{\pm} \ln a_0(\xi)\right) \in GC_{\pm}^{\infty}(\Gamma)$ лишь скалярными множителями. Но тогда представление

$$a(\xi) = a^{-}(\xi)\, a^{+}(\xi),$$

где

$$a_0^{-}(\xi) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{n_k} a_0^{-}(\xi), a^{+}(\xi) = a_0^{+}(\xi)$$

есть каноническая гладкая вырожденная факторизация типа минус.

4. Спектр и резольвентное множество оператора Теплица. Рассмотрим оператор Теплица

$$T(a) : L_2^+(\Gamma) \to L_2^+(\Gamma).$$

Ясно, что функция $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ порождает ограниченные операторы в пространствах $L_2^+(\Gamma)$ и $C_+^\infty(\Gamma)$. Условимся эти операторы обозначать одним и тем же символом $T(a)$, а для резольвентных множеств и спектров использовать обозначения

$$\rho_2(T(a)), \sigma_2(T(a))$$

в случае пространства $L_2^+(\Gamma)$ и $\rho_\infty(T(a))$, $\sigma_\infty(T(a))$ в случае пространства $C_+^\infty(\Gamma)$ соответственно.

Теорема 4. *Имеют место вложения*

$$\rho_2(T(a)) \subseteq \rho_\infty(T(a)), \sigma_2(T(a)) \supseteq \sigma_\infty(T(a)).$$

Доказательство. В самом деле, если $\lambda \in \rho_2(T(a))$, то $\underset{\Gamma}{ind}(a(\xi)-\lambda) = 0$. Это означает, что выполнены условия $n(a(\xi)-\lambda) = 0$ и

$$\kappa_c(a(\xi)-\lambda) = 2\underset{\Gamma}{ind}(a(\xi)-\lambda) = 0 = n(a(\xi)-\lambda).$$

Но тогда $\lambda \in \rho_\infty(T(a))$.

С геометрической точки зрения теорема 4 может быть истолкована следующим образом. Геометрически образом окружности при отображении $\xi \mapsto a(\xi)$ является замкнутая гладкая кривая $a(\Gamma)$, которая может иметь точки самопересечения. Эта кривая разбивает комплексную плоскость на компоненты связности, обладающие тем свойством, что функция $a(\xi)-\lambda$, $\xi \in \Gamma$ при выборе λ внутри каждой компоненты не обращается в нуль. Это означает, что определен индекс: $\underset{\Gamma}{ind}(a(\xi)-\lambda)$, принимающий постоянное значение при изменении λ внутри каждой компоненты. Обозначим через K_0 объединение тех компонент связности, где $\underset{\Gamma}{ind}(a(\xi)-\lambda) = 0$. Из доказательства теоремы 4 следует, что имеют место соотношения

$$\mathrm{K}_0 = \rho_2(T(a)), \quad \mathrm{K}_0 \subseteq \rho_\infty(T(a)).$$

Вопрос о полном описании спектра и резольвентного множества оператора

$$T(a) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

с символом $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ сводится к вопросу о принадлежности точек кривой $a(\Gamma)$.

Лемма 5. *Точка $\lambda = 0$ является точкой резольвентного множества оператора*

$$T\left(\left(1-\xi_0\xi^{-1}\right)^n\right) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma),$$

но при этом возможны следующие ситуации 1) если $n = 1, 2, 3$ точка $\lambda = 0$ является граничной точкой множеств $\rho_\infty(T(a))$ и $\sigma_\infty(T(a))$, 2) если $n \geq 4$, то точка $\lambda = 0$ является изолированной точкой множества $\rho_\infty(T(a))$.

Доказательство. Обратимость рассматриваемого оператора является следствием леммы 3. Пусть $\lambda \to 0$, рассмотрим оператор

$$T\left(\left(1-\xi_0\xi^{-1}\right)^n\right) - \lambda I = T\left(\left(1-\xi_0\xi^{-1}\right)^n - \lambda\right).$$

Ясно, что его символ допускает представление

$$\left(1-\xi_0\xi^{-1}\right)^n - \lambda = (-\xi_0)^n \prod_{j=1}^{n} \left(\xi^{-1} - \xi_j^{-1}(\lambda)\right),$$

где

$$\xi_j(\lambda) - \left(1-\xi_0\xi^{-1}\right)^n - \lambda = 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\xi_j^{-1}(\lambda) = \xi_0^{-1}\left(1 - \left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_j\right),$$

где

$$\left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_j = \sqrt[n]{|\lambda|}\left(\cos\varphi_j(\lambda) + i\sin\varphi_j(\lambda)\right), \varphi_j(\lambda) = \frac{\varphi_\lambda + 2\pi(j-1)}{n},$$

$$\varphi_\lambda = \arg\lambda j = 1, 2, ..., n.$$

В силу следствия к лемме 2 оператор
$$T\left(\left(1-\xi_0\xi^{-1}\right)^n-\lambda\right)$$
обратим тогда и только тогда, когда
$$\left|\xi_j^{-1}\left(\lambda\right)\right|\geq 1, j=1,2,...,n.$$
Последние неравенства равносильны следующим
$$\cos\varphi_j\left(\lambda\right)\leq\frac{1}{2}\sqrt[n]{|\lambda|}, j=1,2,...,n.$$
Ясно, что при достаточно больших n имеем
$$\varphi_1\left(\lambda\right)=\frac{\varphi_\lambda}{n}\approx 0,$$
поэтому
$$\cos\varphi_1\left(\lambda\right)\approx\cos 0=1.$$
Тогда
$$\cos\varphi_1\left(\lambda\right)>\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}\sqrt[n]{|\lambda|}$$
и, следовательно, оператор
$$T\left(\left(1-\xi_0\xi^{-1}\right)^n-\lambda\right)$$
необратим при $\lambda\longrightarrow 0$, но $\lambda\neq 0$. Непосредственно, легко проверить, что описанная ситуация реализуется для всех $n\geq 4$. Аналогичным образом устанавливается, что при $n=1,2,3$ найдутся такие достаточно близкие к $\lambda=0$ числа, что выполнены неравенства $\cos\varphi_j\left(\lambda\right)\leq\frac{1}{2}\sqrt[n]{|\lambda|}$ для всех j и найдутся такие числа $\lambda\longrightarrow 0$, что хотя бы один из корней удовлетворяет условию $\left|\xi_j^{-1}\left(\lambda\right)\right|<1$.

Теорема 5. *Пусть точка $\lambda=0$ является точкой резольвентного множества оператора Теплица*
$$T\left(a\right):C_+^\infty\left(\Gamma\right)\longrightarrow C_+^\infty\left(\Gamma\right), a\left(\xi\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\xi_k\xi^{-1}\right)^{n_k}a_0\left(\xi\right),$$
где
$$a_0\left(\xi\right)\in C^\infty\left(\Gamma\right);\quad a_0\left(\xi\right)\neq 0,\xi\in\Gamma;\quad \underset{\Gamma}{ind}a_0\left(\xi\right)=0.$$
Тогда, если $\max\limits_k n_k>3$, то точка $\lambda=0$ является изолированной точкой резольвентного множества. Теорема вытекает из теоремы 4 и леммы 5. Пусть $\xi_0\in\Gamma$, рассмотрим оператор
$$T\left(a\left(\xi\right)\right)-a\left(\xi_0\right)I=T\left(a\left(\xi\right)-a\left(\xi_0\right)\right).$$
Будем говорить, что точка $\xi_0\in\Gamma$ имеет конечную кратность относительно функции $a\left(\xi\right)$, если функция $a\left(\xi\right)-a\left(\xi_0\right)$ имеет не более чем конечное число нулей конечных порядков, т.е. $n\left(a\left(\xi\right)-a\left(\xi_0\right)\right)<\infty$. Положим
$$A\left(\xi_0\right)=\left\{\eta_j\in\Gamma:a\left(\eta_j\right)=a\left(\xi_0\right)\right\}.$$
Точки из множества $A\left(\xi_0\right)$ назовем ассоциированным с точкой ξ_0 относительно функции $a\left(\xi\right)$.

Лемма 6. *Если оператор*
$$T\left(a\left(\xi\right)-a\left(\xi_0\right)\right):C_+^\infty\left(\Gamma\right)\longrightarrow C_+^\infty\left(\Gamma\right)$$
обратим, то множество точек, ассоциированных с точкой $\xi_0\in\Gamma$, конечно и каждая из точек $\eta_j\in A\left(\xi_0\right)$ имеет конечную кратность относительно функции $a\left(\xi\right)$.

Рассматривая оператор $T\left(a\left(\xi\right)-\lambda\right)$ при $\lambda\longrightarrow a\left(\xi_0\right)$ и применяя полученные в теоремах 2-5 результаты, заключаем, что
$$\rho_\infty\left(T\left(a\right)\right)=\mathrm{K}_0\bigcup\mathrm{K}_1,$$
где
$$\mathrm{K}_1=\left\{\lambda=a\left(\xi_0\right):\left(n\left(a-a_0\right)<\infty\right)\Lambda\left(\kappa_c\left(a-a_0\right)+n\left(a-a_0\right)=0\right)\right\}, a=a\left(\xi\right),\quad a_0=a\left(\xi_0\right).$$
Отметим, что, вообще говоря, множество K_1 может быть весьма разнообразным подмножеством образа единичной окружности $a\left(\Gamma\right)$. В частности, если хотя бы одна из точек, ассоциированных с точкой ξ_0, имеет кратность не меньшую 4, то точка $a\left(\xi_0\right)\in\mathrm{K}_1$ является изолированной точкой резольвентного множества. Некоторые конкретные примеры спектров и резольвентных множеств операторов Теплица приведены в работах [5, 6].

Список литературы

1. Гахов Ф. Д. 1977. Краевые задачи. М., Наука, 638.
2. Гохберг И. Ц., Фельдман И.А. 1971. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., Наука, 352.
3. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. 1973. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений. К., Штиинца, 426.
4. Пасенчук А. Э. 2013. Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности. РнД., ЮФУ, 279.
5. Пасенчук А. Э., Серегина В. В. 2019. О матричном операторе Римана в пространстве гладких вектор-функций. Владикавказский математический журнал. 21(3): 50–61.
6. Пасенчук А. Э., Серегина В. В. 2022. О спектре оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве гладких функций. Владикавказский математический журнал, 4(3): 96–107.
7. Пресдорф З. 1979. Некоторые классы сингулярных уравнений. М., Мир, 493.
8. Солдатов А. П. 1991. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., Высшая школа, 210.

References

1. Gakhov F. D. 1977. Boundary value problems. M., Nauka, 638. (in Russian)
2. Gokhberg I.Ts., Feldman I.A. 1971. Equations in convolutions and projection methods for their solution. M., Nauka, 352. (in Russian)
3. Gokhberg I. Ts., Krupnik N. Ya. 1973. Introduction to the theory of one-dimensional singular integral equations. K., Shtiintsa, 426. (in Russian)
4. Pasenchuk A. E. 2013. Discrete operators of convolution type in classes of sequences with power behavior at infinity. RnD., Southern Federal University, 279. (in Russian)
5. Pasenchuk A. E., Seregina V. V. 2019. On the matrix Riemann operator in the space of smooth vector functions. Vladikavkaz mathematical journal. 21(3): 50-61. (in Russian)
6. Pasenchuk A. E., Seregina V. V. 2022. On the spectrum of the Toeplitz operator in a countably normed space of smooth functions. Vladikavkaz Mathematical Journal, 4(3): 96–107. (in Russian)
7. Presdorf Z. 1979. Some classes of singular equations. M., Mir, 493. (in Russian)
8. Soldatov A. P. 1991. One-dimensional singular operators and boundary value problems of function theory. M., Higher School, 210. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.05.2023
Поступила после рецензирования 03.07.2023
Принята к публикации 07.07.2023

Received May 20, 2023
Revised July 3, 2023
Accepted July 7, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Пасенчук Александр Эдуардович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, Южно-Российский государственный университет имени М. И. Платова, г. Новочеркасск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander E. Pasenchuk – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics, Platov South-Russian State University, Novocherkassk, Russia