Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 4. С. 339–345.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 4. P. 339–345.

УДК 517.9 + 519.216.2
MSC 60H10, 60H30
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-339-345

Об одном подходе к изучению стохастических дифференциальных уравнений леонтьевского типа

Машков Е. Ю.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)

Юго-Западный государственный университет,
Россия, 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94
mashkovevgen@yandex.ru

Аннотация. В конечномерном пространстве рассматривается линейное стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито, у которого в левой части стоит вырожденная постоянная матрица. Принимая во внимание различные экономические приложения данных уравнений, их относят к уравнениям леонтьевского типа, поскольку при некоторых дополнительных предположениях детерминированным аналогом рассматриваемого уравнения описывается знаменитая балансовая модель «затраты-выпуск» В. Леонтьева с учетом запасов. В литературе данные системы чаще называют алгебро-дифференциальные, дескрипторные. В общем случае, для исследования данного типа уравнений необходимо рассмотрение производных высших порядков от правой части. А значит, необходимо рассматривать и производные винеровского процесса, существующие в обобщенном смысле. В предыдущих работах были исследованы данные уравнения с привлечением аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не используются обобщенные функции. Известно, что производные в среднем зависят от того, какая сигма-алгебра используется для их нахождения. В работе исследование данного уравнения проведено с применением производных в среднем относительно новой сигма-алгебры, которая не рассматривалась в предыдущих работах.

Ключевые слова: производная в среднем, текущая скорость, винеровский процесс, стохастическое уравнение леонтьевского типа

Для цитирования: Машков Е. Ю. 2023. Об одном подходе к изучению стохастических дифференциальных уравнений леонтьевского типа. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 339–345. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-339-345

Original Research

On a Certain Approach to Investigation of Stochastic Differential Leontieff Type Equations

Evgenii Yu. Mashkov
(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

Southwest State University,
94 50 Let Octyabrya st., Kursk, 305040, Russia
mashkovevgen@yandex.ru

Abstract. In a finite-dimensional space, we consider a linear stochastic differential equation in Ito form, which has a degenerate constant matrix on the left side. Taking into account the various economic applications of these equations, they are classified as Leontief-type equations, since under some additional assumptions a deterministic analogue of the equation in question describes the famous input-output balance model of V. Leontief taking into account reserves.In the literature, these systems are more often called algebraic-differential and descriptor systems. In general, to study this type of equations it is necessary to consider higher-order derivatives of the right-hand side. This means that it is necessary to consider derivatives of the Wiener process that exist in a generalized sense. In previous works, these equations were studied using the apparatus of Nelson average derivatives of random processes, for the description of which generalized functions are not used. It is known that derivatives on average depend on which sigma-algebra is used to find them. In this work, the study of this equation was carried out using derivatives on average with respect to a new sigma-algebra, which was not considered in previous works.

Keywords: Mean Derivative, Current Velocity, Wiener Process, Stochastic Leontief Type Equationheorem, Local Solvability, Global Solvability

For citation: Mashkov E. Yu. 2023. On a Certain Approach to Investigation of Stochastic Differential Leontieff Type Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 339–345. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-339-345

1. Производные в среднем. Введем в рассмотрение случайный процесс $\zeta(t)$ в R^n, $t \in [0, l]$, который определен на некотором вероятностном пространстве $\mathcal{F}$ и является L_1-случайной величиной при всех t.

Известно, что любой такой процесс порождает семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$ «настоящее» $\mathcal{N}_t^{\zeta}$, которое будем считать полным.

Обозначим (для удобства) условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^{\zeta})$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}_t^{\zeta}$ для $\zeta(t)$ через E_t^{ζ}.

Поскольку в общем случае почти все выборочные траектории процесса $\zeta(t)$ не дифференцируемы, то его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать применения обобщенных функций, согласно Нельсону [1] введем следующее

Определение 1.1. *[2] 1) Производной в среднем справа $D\zeta(t)$ процесса $\zeta(t)$ в момент времени t называется L_1-случайная величина вида $D\zeta(t) = \lim\limits_{\triangle t \to +0} E_t^{\zeta}\left\{\dfrac{\zeta(t+\triangle t) - \zeta(t)}{\triangle t}\right\}$, в предположении, что предел существует в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и ($\triangle t \to +0 \Leftrightarrow \triangle t \to 0$ и $\triangle t > 0$).*
2) Производной в среднем слева $D_*\zeta(t)$ процесса $\zeta(t)$ в момент времени t называется L_1-случайная величина $D_*\zeta(t) = \lim\limits_{\triangle t \to +0} E_t^{\zeta}\left\{\dfrac{\zeta(t) - \zeta(t-\triangle t)}{\triangle t}\right\}$, в предположении, что предел существует в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

В общем случае, $D\zeta(t) \neq D_*\zeta(t)$, но для для процессов, имеющих п.н. гладкие выборочные траектории, эти производные совпадают.

Принимая во внимание свойства условного математического ожидания [3] имеем, что $D\zeta(t)$ и $D_*\zeta(t)$ могут быть представлены как композиции $\zeta(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Z^0(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\zeta}\left\{\frac{\zeta(t+\triangle t) - \zeta(t)}{\triangle t}|\zeta(t) = x\right\},\ \ Z_*^0(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\zeta}\left\{\frac{\zeta(t) - \zeta(t-\triangle t)}{\triangle t}|\zeta(t) = x\right\}$$

на R^n, т.е., $D\zeta(t) = Z^0(t,\zeta(t))$ и $D_*\zeta(t) = Z_*^0(t,\zeta(t))$.

Определение 1.2. *[2] Производная $D_S = \frac{1}{2}\left[D + D_*\right]$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}\left[D - D_*\right]$ называется антисимметрической производной в среднем.*

Введем в рассмотрение векторные поля $v^{\zeta}(t,x) = \frac{1}{2}\left[Z^0(t,x) + Z_*^0(t,x)\right]$ и $u^{\zeta}(t,x) = \frac{1}{2}\left[Z^0(t,x) - Z_*^0(t,x)\right]$.

Определение 1.3. *[2] $v^{\zeta}(t) = v^{\zeta}(t,\zeta(t)) = D_S\zeta(t)$ называется текущей скоростью процесса $\zeta(t)$; $u^{\zeta}(t) = u^{\zeta}(t,\zeta(t)) = D_A\zeta(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\zeta(t)$.*

Известно [1, 2], что текущая скорость для стохастических процессов является аналогом обычной физической скорости детермиинированных процессов, а осмотическая скорость показывает насколько быстро нарастает "стохастичность" процесса.

Далее нам понадобиться лемма для нахождения симметрических производных в среднем от винеровского процесса $w(t)$.

Лемма 1.1. *[2, 4, 5] Для $t \in (0, l]$ выполняются*

$$Dw(t) = 0,\ \ D_*w(t) = \frac{w(t)}{t},\ \ D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t}$$

Для целых $m \geq 2$

$$D_S^m w(t) = (-1)^{m-1}\prod_{i=1}^{m-1}(2i-1)\frac{w(t)}{(2t)^m}.$$

Для целых положительных i, j имеет место

$$E_t^{w^i}(w^j(t)) = E(w^j(t)) = 0, i \neq j.$$

2. Основной результат. Исследуется вырожденное стохастическое дифференциальное уравнение в R^n

$$\tilde{B}\zeta(t) = \int_0^t \tilde{A}\zeta(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t), \tag{1}$$

где $\tilde{B}$ и $\tilde{A}$ – вещественные постоянные $n \times n$ – матрицы, $det\tilde{B} = 0$, а $det\tilde{A} \neq 0$, пучок $\tilde{A} + \lambda\tilde{B}$ – регулярен ($det\left[\tilde{A} + \lambda\tilde{B})\right] \neq 0$), $\zeta(t)$ – искомый стохастический n-мерный процесс, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $f(t)$ – C^{∞}-гладкая детерминированная вектор-функция. Данные уравнения встречаются в различных приложениях [6, 7].

Сформулируем вспомогательное утверждение:

Теорема 2.1.(Матричное преобразование Шура) *[8] Пусть пучок $\tilde{A}$+$\lambda\tilde{B}$ регулярен. Тогда существуют вещественные ортогональные матрицы Q_L и Q_R, такие, что матрица $Q_L\tilde{B}Q_R = B$ – верхняя квазитреугольная, а матрица $Q_L\tilde{A}Q_R = A$ – верхняя треугольная.*

Пусть вектора базиса в R^n стоят в таком порядке, что матрицы B и A имеют следующий вид

$$
B=\begin{pmatrix}
b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 & \dots & b_i^1 & b_{i+1}^1 & b_{i+2}^1 & \dots & b_j^1 & b_{j+1}^1 & \dots & b_p^1 & b_{p+1}^1 & b_{p+2}^1 & \dots & b_n^1\\
b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 & \dots & b_i^2 & b_{i+1}^2 & b_{i+2}^2 & \dots & b_j^2 & b_{j+1}^2 & \dots & b_p^2 & b_{p+1}^2 & b_{p+2}^2 & \dots & b_n^2\\
0 & 0 & b_3^3 & b_4^3 & \dots & b_i^3 & b_{i+1}^3 & b_{i+2}^3 & \dots & b_j^3 & b_{j+1}^3 & \dots & b_p^3 & b_{p+1}^3 & b_{p+2}^3 & \dots & b_n^3\\
0 & 0 & b_3^4 & b_4^4 & \dots & b_i^4 & b_{i+1}^4 & b_{i+2}^4 & \dots & b_j^4 & b_{j+1}^4 & \dots & b_p^4 & b_{p+1}^4 & b_{p+2}^4 & \dots & b_n^4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_i^i & b_{i+1}^i & b_{i+2}^i & \dots & b_j^i & b_{j+1}^i & \dots & b_p^i & b_{p+1}^i & b_{p+2}^i & \dots & b_n^i\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_i^{i+1} & b_{i+1}^{i+1} & b_{i+2}^{i+1} & \dots & b_j^{i+1} & b_{j+1}^{i+1} & \dots & b_p^{i+1} & b_{p+1}^{i+1} & b_{p+2}^{i+1} & \dots & b_n^{i+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_j^j & b_{j+1}^j & \dots & b_p^j & b_{p+1}^j & b_{p+2}^j & \dots & b_n^j\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{j+1}^{j+1} & \dots & b_p^{j+1} & b_{p+1}^{j+1} & b_{p+2}^{j+1} & \dots & b_n^{j+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{p+1}^p & b_{p+2}^p & \dots & b_n^p\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{p+2}^{p+1} & \dots & b_n^{p+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n^{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
A=\begin{pmatrix}
a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \dots & a_i^1 & a_{i+1}^1 & a_{i+2}^1 & \dots & a_j^1 & a_{j+1}^1 & \dots & a_p^1 & a_{p+1}^1 & a_{p+2}^1 & \dots & a_n^1\\
0 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_i^2 & a_{i+1}^2 & a_{i+2}^2 & \dots & a_j^2 & a_{j+1}^2 & \dots & a_p^2 & a_{p+1}^2 & a_{p+2}^2 & \dots & a_n^2\\
0 & 0 & a_3^3 & a_4^3 & \dots & a_i^3 & a_{i+1}^3 & a_{i+2}^3 & \dots & a_j^3 & a_{j+1}^3 & \dots & a_p^3 & a_{p+1}^3 & a_{p+2}^3 & \dots & b_n^3\\
0 & 0 & 0 & a_4^4 & \dots & a_i^4 & a_{i+1}^4 & a_{i+2}^4 & \dots & a_j^4 & a_{j+1}^4 & \dots & a_p^4 & a_{p+1}^4 & a_{p+2}^4 & \dots & a_n^4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_i^i & a_{i+1}^i & a_{i+2}^i & \dots & a_j^i & a_{j+1}^i & \dots & a_p^i & a_{p+1}^i & a_{p+2}^i & \dots & a_n^i\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i+1}^{i+1} & a_{i+2}^{i+1} & \dots & a_j^{i+1} & a_{j+1}^{i+1} & \dots & a_p^{i+1} & a_{p+1}^{i+1} & a_{p+2}^{i+1} & \dots & a_n^{i+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_j^j & a_{j+1}^j & \dots & a_p^j & a_{p+1}^j & a_{p+2}^j & \dots & a_n^j\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{j+1}^{j+1} & \dots & a_p^{j+1} & a_{p+1}^{j+1} & a_{p+2}^{j+1} & \dots & a_n^{j+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_p^p & a_{p+1}^p & a_{p+2}^p & \dots & a_n^p\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{p+1}^{p+1} & a_{p+2}^{p+1} & \dots & a_n^{p+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1}^{n-1} & \dots & a_n^{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^n
\end{pmatrix}
$$

т. е., в B сначала вдоль главной диагонали расположены блоки размера 2×2 (соответствующие сопряженным парам комплексных собственных значений), потом невырожденные блоки размера 1×1 (соответствующие ненулевым действительным собственным значениям), а затем вырожденные блоки размера 1×1(соответствующие нулевым собственным значениям).

Выполним преобразование Шура над пучком $\tilde{A} + \lambda \tilde{B}$. Тогда получим, что уравнение (1) трансформируется следующим образом

$$Q_L \tilde{B} Q_R Q_R^{-1} \zeta(t) = \int_0^t Q_L \tilde{A} Q_R Q_R^{-1} \zeta(s) ds + \int_0^t Q_L f(s) ds + Q_L \tilde{w}(t)$$

и после введения новых обозначений $\xi(t) = Q_R^{-1}\zeta(t)$, $w(t) = Q_L \tilde{w}(t)$ – винеровский процесс, $Q_L f(t) = h(t)$ примет такой вид

$$B\xi(t) = \int_0^t A\xi(s) ds + \int_0^t h(s) ds + w(t). \tag{2}$$

Из вида (2) мы понимаем, что (для простоты) начальное условие для решения (2) предполагается вида $\eta(0) = 0$.

Поскольку матрица B верхняя блочно-треугольная, а A верхняя треугольная, получаем, что уравнение (2) распадается на дифференциальные уравнения следующих типов.

Строкам в B, содержащим элементы блоков 2×2, соответствуют подсистемы из двух уравнений

$$\sum_{l=i}^{n} b_l^i \xi^l(t) = \int_0^t \left\{ \sum_{l=i}^{n} a_l^i \xi^l(s) \right\} ds + \int_0^t h^i(s) ds + w^i(t),$$

$$\sum_{l=i}^{n} b_l^{i+1} \xi^l(t) = \int_0^t \left\{ \sum_{l=i+1}^{n} a_l^{i+1} \xi^l(s) \right\} ds + \int_0^t h^{i+1}(s) ds + w^{i+1}(t).$$

После введения новых обозначений эти подсистемы уравнений принимают такой вид

$$\bar{\xi}(t)+\eta(t)=\int_0^t G\bar{\xi}(s)ds+\int_0^t \vartheta(s)ds+\int_0^t \bar{h}(s)ds+C\bar{w}(t),$$

$$A_i^i=\begin{pmatrix} a_i^i & a_{i+1}^i \\ 0 & a_{i+1}^{i+1}\end{pmatrix},\ \bar{\xi}=\begin{pmatrix}\eta^i\\ \xi^{i+1}\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} b_i^i & b_{i+1}^i \\ b_i^{i+1} & b_{i+1}^{i+1}\end{pmatrix}^{-1},\ \eta=C\begin{pmatrix} b_{i+2}^i & \cdots & b_n^i \\ b_{i+2}^{i+1} & \cdots & b_n^{i+1}\end{pmatrix}\left(\xi^{i+2}\ldots\xi^n\right)^T,$$

$$\bar{h}=C\begin{pmatrix}h^i\\ h^{i+1}\end{pmatrix},\ \bar{w}=\begin{pmatrix}w^i\\ w^{i+1}\end{pmatrix},\ G=CA_i^i,\ \vartheta(t)=C\begin{pmatrix} a_{i+2}^i & \cdots & a_n^i \\ a_{i+2}^{i+1} & \cdots & a_n^{i+1}\end{pmatrix}\left(\xi^{i+2}\ldots\xi^n\right)^T.$$

Решения таких подсистем уравнений находятся по известной [9] формуле

$$\bar{\xi}(t)=\int_0^t e^{G(t-\tau)}Cd\bar{w}_\tau+\int_0^t e^{G(t-\tau)}\left\{\vartheta(\tau)+\bar{h}(\tau)-G\eta(\tau)\right\}d\tau-\eta(t). \tag{3}$$

Строкам в B с невырожденными блоками размера 1×1 соответствуют уравнения

$$b_j^j\xi^j(t)+b_{j+1}^j\xi^{j+1}(t)+\ldots+b_n^j\xi^n(t)=\int_0^t\left\{a_j^j\xi^j(s)+a_{j+1}^j\xi^{j+1}(s)+\ldots+a_n^j\xi^n(s)\right\}ds+\int_0^t h^j(s)ds+w^j(t).$$

Решения таких уравнений находятся по известной [9] формуле

$$\xi^j(t)=\int_0^t e^{\frac{a_j^j}{b_j^j}(t-s)}\frac{1}{b_j^j}dw_s^j-\left\{\frac{b_{j+1}^j}{b_j^j}\xi^{j+1}(t)+\ldots+\frac{b_n^j}{b_j^j}\xi^n(t)\right\}+$$

$$+\int_0^t e^{\frac{a_j^j}{b_j^j}(t-s)}\left\{\frac{1}{b_j^j}h^j(s)+\frac{a_{j+1}^j}{b_j^j}\xi^{j+1}(s)+\ldots+\frac{a_n^j}{b_j^j}\xi^n(s)-\frac{a_j^j}{\left[b_j^j\right]^2}\left[b_{j+1}^j\xi^{j+1}(s)+\ldots+b_n^j\xi^n(s)\right]\right\}ds.$$

В более компактной записи имеет вид

$$\xi^j(t)=\frac{1}{b_j^j}\int_0^t exp\left[\frac{a_j^j}{b_j^j}(t-s)\right]dw_s^j-\frac{1}{b_j^j}\sum_{l=j+1}^n b_l^j\xi^l(t)+$$

$$+\frac{1}{\left[b_j^j\right]^2}\int_0^t exp\left[\frac{a_j^j}{b_j^j}(t-s)\right]\left\{b_j^jh^j(s)+b_j^j\sum_{l=j+1}^n a_l^j\xi^l(s)-a_j^j\sum_{l=j+1}^n b_l^j\xi^l(s)\right\}ds. \tag{4}$$

Оставшимся нижним $n-m+1$ строкам в B, содержащим нулевые диагональные блоками, соответствует подсистема вида

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{m+1}^m & b_{m+2}^m & \cdots & b_n^m \\ 0 & 0 & b_{m+2}^{m+1} & \cdots & b_n^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^m(t)\\ \xi^{m+1}(t)\\ \vdots\\ \xi^n(t)\end{pmatrix}=\int_0^t\begin{pmatrix} a_m^m & a_{m+1}^m & \cdots & a_n^m \\ 0 & a_{m+1}^{m+1} & \cdots & a_n^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^m(s)\\ \xi^{m+1}(s)\\ \vdots\\ \xi^n(s)\end{pmatrix}ds+$$

$$+\int_0^t\begin{pmatrix}h^m(s)\\ h^{m+1}(s)\\ \vdots\\ h^n(s)\end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix}w^m(t)\\ w^{m+1}(t)\\ \vdots\\ w^n(t)\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для дальнейшего изложения, следуя [2], введем обозначение: $D_S^{w^i}$ – симметрическая производная в среднем относительно σ-алгебры «настоящеее» 1-мерного винеровского процесса $w^i(t)$.

Рассматривая последнее уравнение системы (5), имеем

$$\int_0^t a_n^n\xi^n(s)ds=-\int_0^t h^n(s)ds-w^n(t).$$

Найдем симметрическую производную в среднем $D_S^{w^n}$ (текущую скорость) от обеих частей этого уравнения. Тогда при $0<t<T$ с помощью Леммы 1.1 находим $\xi^n(t)$

$$\xi^n(t)=-\frac{1}{a_n^n}h^n(t)-\frac{1}{a_n^n}D_S^{w^n}w^n(t)=-\frac{1}{a_n^n}h^n(t)-\frac{1}{a_n^n}\frac{w^n(t)}{2t}. \tag{6}$$

Рассматривая предпоследнее уравнения системы (5), имеем

$$b_n^{n-1}\xi^n = \int_0^t \left\{a_{n-1}^{n-1}\xi^{n-1}(s) + a_n^{n-1}\xi^n(s)\right\} ds + \int_0^t h^{n-1}(s)ds + w^{n-1}(t).$$

Берем симметрическую производную в среднем $D_S^{w^{n-1}}$ от обеих частей этого уравнения. Тогда с помощью Леммы 2.1 мы при $0 < t < T$ получим

$$\xi^{n-1}(t) = \frac{b_n^{n-1}}{a_{n-1}^{n-1}} D_S^{w^{n-1}}\xi^n(t) - \frac{a_n^{n-1}}{a_{n-1}^{n-1}}\xi^n(t) - \frac{1}{a_{n-1}^{n-1}}h^{n-1}(t) - \frac{1}{a_{n-1}^{n-1}}D_S^{w^{n-1}}w^{n-1}(t).$$

В последнее равенство подставим выражение для $\xi^n(t)$ и применим Лемму 1.1. Тогда при $0 < t < T$ будем иметь

$$\xi^{n-1}(t) = -\frac{b_n^{n-1}}{a_n^n a_{n-1}^{n-1}}\frac{dh^n(t)}{dt} + \frac{a_n^{n-1}}{a_n^n a_{n-1}^{n-1}}h^n(t) - \frac{1}{a_{n-1}^{n-1}}h^{n-1}(t) + \frac{a_n^{n-1}}{a_n^n a_{n-1}^{n-1}}\frac{w^n(t)}{2t} - \frac{1}{a_{n-1}^{n-1}}\frac{w^{n-1}(t)}{2t}. \tag{7}$$

В системе (5) переходим к следующему уравнению для $\xi^{n-2}(t)$

$$b_{n-1}^{n-2}\xi^{n-1}(t) + b_n^{n-2}\xi^n(t) = \int_0^t \left\{a_{n-2}^{n-2}\xi^{n-2}(s) + a_{n-1}^{n-2}\xi^{n-1}(s) + a_n^{n-2}\xi^n(s)\right\} ds + \int_0^t h^{n-2}(s)ds + w^{n-2}(t).$$

Находим симметрическую производную $D_S^{w^{n-2}}$ от обеих частей этого уравнения. Тогда, применив Лемму 1.1, будем иметь

$$\begin{aligned}
\xi^{n-2}(t) &= \frac{b_{n-1}^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}}D_S^{w^{n-2}}\xi^{n-1}(t) + \frac{b_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}}D_S^{w^{n-2}}\xi^n(t) - \frac{a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}}\xi^{n-1}(t) - \\
&- \frac{a_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}}\xi^n(t) - \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}}h^{n-2}(t) - \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}}D_S^{w^{n-2}}w^{n-2}(t) = \\
&= -\frac{b_{n-1}^{n-2}b_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n}\frac{d^2h^n(t)}{dt^2} + \left\{\frac{b_{n-1}^{n-2}a_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} + \frac{a_{n-1}^{n-2}b_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} - \frac{b_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}a_n^n}\right\}\frac{dh^n(t)}{dt} + \\
&+ \left\{\frac{a_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}a_n^n} - \frac{a_{n-1}^{n-2}a_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n}\right\}h^n(t) - \frac{b_{n-1}^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}}\frac{dh^{n-1}(t)}{dt} + \frac{a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}}h^{n-1}(t) - \\
&- \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}}h^{n-2}(t) + \left\{\frac{a_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}a_n^n} - \frac{a_{n-1}^{n-2}a_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n}\right\}\frac{w^n(t)}{2t} + \frac{a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}}\frac{w^{n-1}(t)}{2t} - \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}}\frac{w^{n-2}(t)}{2t}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Далее в системе (5) переходим к следующему уравнению для $\xi^{n-3}(t)$

$$b_{n-2}^{n-3}\xi^{n-2}(t) + b_{n-1}^{n-3}\xi^{n-1}(t) + b_n^{n-3}\xi^n(t) =$$

$$= \int_0^t \left\{a_{n-3}^{n-3}\xi^{n-3}(s) + a_{n-2}^{n-3}\xi^{n-2}(s) + a_{n-1}^{n-3}\xi^{n-1}(s) + a_n^{n-3}\xi^n(s)\right\} ds + \int_0^t h^{n-3}(s)ds + w^{n-3}(t).$$

Берем симметрическую производную $D_S^{w^{n-3}}$ от обеих частей этого уравнения. Тогда, применив Лемму 1.1, будем иметь

$$\begin{aligned}
\xi^{n-3}(t) &= \frac{b_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}}D_S^{w^{n-3}}\xi^{n-2}(t) + \frac{b_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}}D_S^{w^{n-2}}\xi^{n-1}(t) + \frac{b_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}}D_S^{w^{n-3}}\xi^n(t) - \frac{a_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}}\xi^{n-2}(t) - \\
&- \frac{a_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}}\xi^{n-1}(t) - \frac{a_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}}\xi^n(t) - \frac{1}{a_{n-3}^{n-3}}h^{n-3}(t) - \frac{1}{a_{n-3}^{n-3}}D_S^{w^{n-3}}w^{n-3}(t) = \\
&= -\frac{b_{n-2}^{n-3}b_{n-1}^{n-2}b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n}\frac{d^3h^n(t)}{dt^3} + \left\{\frac{b_{n-2}^{n-3}b_{n-1}^{n-2}a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} + \frac{b_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} - \frac{b_{n-2}^{n-3}b_n^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_n^n} - \right. \\
&\left. - \frac{b_{n-1}^{n-3}b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} + \frac{a_{n-2}^{n-3}b_{n-1}^{n-2}b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n}\right\}\frac{d^2h^n(t)}{dt^2} + \left\{\frac{b_{n-2}^{n-3}a_n^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_n^n} - \frac{b_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} + \frac{b_{n-1}^{n-3}a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} - \right. \\
&\left. - \frac{b_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_n^n} - \frac{a_{n-2}^{n-3}b_{n-1}^{n-2}a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} - \frac{a_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} + \frac{a_{n-2}^{n-3}b_n^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_n^n} + \frac{a_{n-1}^{n-3}b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}a_n^n}\right\}\frac{dh^n(t)}{dt} + \\
&+ \left\{\frac{a_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}a_n^n}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} - \frac{a_{n-2}^{n-3}a_n^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_n^n} - \frac{a_{n-1}^{n-3}a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}a_n^n} + \frac{a_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_n^n}\right\}h^n(t) -
\end{aligned}$$

$$-\frac{b_{n-2}^{n-3}b_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}}\frac{d^2h^{n-1}(t)}{dt^2}+\left\{\frac{b_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}}-\frac{b_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}}+\frac{a_{n-2}^{n-3}b_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}}\right\}\frac{dh^{n-1}(t)}{dt}+$$
$$+\left\{\frac{a_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}}-\frac{a_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}}\right\}h^{n-1}(t)-\frac{b_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}}\frac{dh^{n-2}(t)}{dt}+\frac{a_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}}h^{n-2}(t)-$$
$$-\frac{1}{a_{n-3}^{n-3}}h^{n-3}(t)+\left\{\frac{a_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n^n}-\frac{a_{n-2}^{n-3}a_n^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_n^n}+\frac{a_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_n^n}-\frac{a_{n-1}^{n-3}a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}a_n^n}\right\}\frac{w^n(t)}{2t}+$$
$$+\left\{\frac{a_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}}-\frac{a_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}}\right\}\frac{w^{n-1}(t)}{2t}+\frac{a_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}}\frac{w^{n-2}(t)}{2t}-\frac{1}{a_{n-3}^{n-3}}\frac{w^{n-3}(t)}{2t}. \quad (9)$$

Аналогично, для $m \le l \le n-1$ и при $0 < t < T$ мы имеем рекуррентное соотношение для нахождения $\xi^l(t)$

$$D_S^{w^l}\left\{b_{l+1}^l\xi^{l+1}(t)+b_{l+2}^l\xi^{l+2}(t)+\ldots+b_n^l\xi^n(t)\right\}=a_l^l\xi^l(t)+a_{l+1}^l\xi^{l+1}(t)+\ldots+a_n^l\xi^n(t)+h^l(t)+D_S^{w^l}w^l(t).$$

В более компактной записи

$$D_S^{w^l}\left\{\sum_{i=l+1}^n b_i^l\xi^i(t)\right\}=\left\{\sum_{i=l}^n a_i^l\xi^i(t)\right\}+h^l(t)+\frac{w^l(t)}{2t}. \quad (10)$$

Применяя Лемму 1.1 и формулы (6), (7), (8), (9), (10), несложно получить явное выражение для любого $\xi^l(t)$.

Теперь перейдем к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (5). Заметим, что симметрические производные в среднем корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции использованы как приращения по времени вправо, так и влево. Тогда принимая во внимание формулы (6), (7), (8), (9) и (10) видим, что решения $\xi^l(t)$ описываются как суммы, в которых некоторые из слагаемых содержат сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t}$. А это означает, что решения стремятся к бесконечности при $t \longrightarrow 0$, т. е. значения решений при $t = 0$ не существуют. Один из способов разрешения указанной ситуации (как и в [4, 5]) состоит в следующем. Мы зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, T)$ и определим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t)=\begin{cases} t_0 \text{ при } 0 \le t \le t_0; \\ t \text{ при } t_0 \le t. \end{cases} \quad (11)$$

Выражения $\frac{w^j(t)}{t}$ в процессах, удовлетворяющих соотношениям (6), (7), (8), (9) и (10), заменим на $\frac{w^j(t)}{t_0(t)}$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, но они будут являться решениями только при $t_0 \le t < T$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t \ge \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов совпадают с вероятностью 1.

Таким образом, мы имеем следующее утверждение

Теорема 3.1. *При условиях, указанных выше, уравнение* (1) *с нулевыми начальными условиями преобразуется к каноническому уравнению* (2) *с нулевыми начальными условиями, формулы для нахождения решений которого имеют вид* (3), (4), (6), (7), (8), (9) *и* (10).

Список литературы

1. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press; 1967. 142 p.
2. Gliklikh YuE. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. London: Springer-Verlag, 2011. 460 p.
3. Parthasaraty KR. Introduction to Probability and Measure. New York: Springer-Verlag, 1978. 344 p.
4. Гликлих Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов. *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование.* 2012;13:24-34.
5. Gliklikh YuE., Mashkov EYu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software.* 2013;6:2:25-39.
6. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика.М.: Экономика, 1977. 324 с.
7. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М.: АНО Физматлит, 2015.
8. Demmel J. Applied Numerical Linear Algebra. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. 419 p.
9. Scorohod AV., Gihman II. Theory of stochastic processes. New York (NY): Springer-Verlag, 1979. 3: 388 p.

References

1. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press, 1967. 142 p.
2. Gliklikh YuE. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. London: Springer-Verlag, 2011. 460 p.
3. Parthasaraty KR. Introduction to Probability and Measure. New York: Springer-Verlag, 1978. 344 p.
4. Gliklikh Yu.E. Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise by the Methods of Mean Derivatives of Stochastic Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software.* 2012;13:24-34. (in Russian)
5. Gliklikh YuE., Mashkov EYu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software.* 2013;6:2:25-39.
6. Leontief W.W. Input-Qutput Economics. New York: Oxford University Press; 1986. 436 p.
7. Kurdjukov A.P., Belov A.A. Deskriptor sustems and control problem. Moskow: Fizmatlit, 2015 (in Russian)
8. Demmel J. Applied Numerical Linear Algebra. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. 419 p.
9. Scorohod AV., Gihman II. Theory of stochastic processes. New York (NY): Springer-Verlag, 1979. 3: 388 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.08.2023
Поступила после рецензирования 07.10.2023
Принята к публикации 09.10.2023

Received August 22, 2023
Revised October 7, 2023
Accepted October 9, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Машков Евгений Юрьевич – кандидат физико-математических наук, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Evgenii Yu. Mashkov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor Department of Higher Mathematics, Southwest State University, Kursk, Russia