Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 4. С. 305–312.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 4. P. 305–312.

УДК 517.952
MSC 35J56
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-305-312

Об одном методе построения решений однородной задачи Шварца

Николаев В. Г.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
Россия, 454001, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41
vg14@inbox.ru

Аннотация. В статье рассмотрена однородная задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису, или J-аналитических функций. При этом 2×2-матрица J имеет собственные числа λ, μ, лежащие выше вещественной оси. Собственные числа могут быть как различными, так и кратными. Во втором разделе статьи приведена постановка задачи. В начале третьего раздела доказана лемма 3.1, устанавливающая одно соотношение между вещественными и голоморфными функциями. Далее построен специальный базис оператора J. Затем с помощью данного базиса и леммы 3.1 построена J-аналитическая функция $\phi(z)$ в виде квадратичного вектор-полинома некоторого специального вида. Если собственные числа λ, μ матрицы J фиксированы, то функция $\phi(z)$ зависит от элементов первого столбца матрицы J как от параметров. Эти параметры подбираются так, чтобы реальная часть функции $\phi(z)$ имела вид $(P, 0)$, где $P = P(x, y)$ – положительно определенная квадратичная форма. В результате функция $\phi(z) - (1, 0)$ будет искомым решением однородной задачи Шварца в эллипсе $\Gamma : P(x, y) = 1$. Далее матрица J восстанавливается по элементам первого столбца и собственным числам λ, μ. Полученный результат оформлен в виде теоремы 3.1. В конце статьи приведены шесть примеров, построенных по изложенному выше алгоритму.

Ключевые слова: функции, аналитические по Дуглису, лямбда-голоморфные функции, собственное число матрицы, базис оператора, эллипс

Для цитирования: Николаев В. Г. 2023. Об одном методе построения решений однородной задачи Шварца. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 305–312. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-305-312

Original Research

On One Method for Constructing Solutions to the Homogeneous Schwarz Problem

Vladimir G. Nikolaev
(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev*)

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University,
41 Bolshaya St.-Peterburgskaya st., Velikiy Novgorod, 173003, Russia
vg14@inbox.ru

Abstract. The paper considers the homogeneous Schwarz problem for Douglis analytic or J-analytic functions. The 2×2-matrix J has eigenvalues λ, μ, lying above the real axis. The eigenvalues can be either distinct or multiples. In the second section of the paper there are given the problem statement and definitions of J-analytic and λ-holomorphic functions. At the beginning of the third section Lemma 3.1 is proved, establishing some relation between real and holomorphic functions. Then is constructed a special operator basis J. For matrices with multiple eigenvalue this basis coincides with the Jordan basis of the matrix J. Then with the help of this basis and Lemma 3.1 is constructed J-analytic function $\phi(z)$ in the form of a quadratic vector polynomial of some special form. If the eigenvalues λ, μ of the matrix J are fixed, then the function $\phi(z)$ depends on the elements of the first column of the matrix J as parameters. These parameters are chosen so that the real part of the function $\phi(z)$ has the form $(P, 0)$, where $P = P(x, y)$ is a positively defined quadratic form. All J-analytic functions are defined with the accuracy of the additive vector constant Therefore, the function $\phi(z) - (1, 0)$ will be the required solution to the homogeneous Schwarz problem in the ellipse $\Gamma : P(x, y) = 1$. Then the matrix J is reconstructed by the known elements of the first column and the eigenvalues λ, μ. The obtained result is formalized in the form of Theorem 3.1. At the end of the paper there are given six examples constructed according to the algorithm described above.

Keywords: Douglis Analytic Functions, Lambda-Holomorphic Functions, Matrix Eigenvalue, Operator Basis, Ellipse

For citation: Nikolaev V. G. 2023. On One Method for Constructing Solutions to the Homogeneous Schwarz Problem. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 305–312. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-305-312

---

1. Введение. Настоящая работа посвящена исследованию однородной задачи Шварца для J-аналитических функций. Впервые эти функции были рассмотрены А. Дуглисом [1], который назвал их гипераналитическими. В дальнейшем теория J-аналитических функций развивалась Д. Паскали [2], Д. Хорватцем [3], Р. Гильбертом [4], Б. Боярским [5], Д. Хайлом [6], А. П. Солдатовым [7, 8, 9] и многими другими авторами. В частности, для них был построен аналог теории аналитических функций, поэтому теперь эти функции мы называем аналитическими по Дуглису.

Хорошо известно [8, 9], что решения уравнения Лапласа в односвязной области описываются как вещественные части аналитических функций. Через аналитические функции выражаются и решения более общих эллиптических уравнений с вещественно аналитическими коэффициентами. Единый подход к изучению этих представлений был предложен И. Н. Векуа [10]. В дальнейшем А. В. Бицадзе [11] было получено представление через аналитические вектор-функции и их производные общего решения эллиптических систем.

Сравнительно недавно (А. П. Солдатов [7, 8], Р. Йех [12]) было обнаружено, что с помощью функций, аналитических по Дуглису, представление Бицадзе существенно упрощается. Можно сказать, что по отношению к эллиптическим уравнениям и системам с постоянными (и только старшими) коэффициентами эти функции играют ту же роль, что и аналитические функции по отношению к уравнению Лапласа. Аналогичные свойства выявлены (Н. А. Жура [13]) и для систем второго порядка, эллиптических по Дуглису – Ниренбергу. Таким образом, актуальным является исследование различных граничных задач для функций, аналитических по Дуглису. Рассмотренная в статье задача Шварца — одна из них. Определенные результаты по этой теме получены в работах В. Г. Николаева [14, 15], А. П. Солдатова [9] и В. Б. Васильева [16]. В настоящей статье приведен метод построения решений однородной задачи Шварца в виде квадратичных вектор-полиномов.

2. Основные определения и постановка задачи. Пусть все собственные числа матрицы $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ лежат выше вещественной оси. Пусть n-вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, где область $D \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим следующую однородную эллиптическую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \tag{1}$$

Определение 2.1. (см. [1, 7, 14, 15, 16] *Функция $\phi = \phi(z)$ как решение системы* (1) *называется аналитической по Дуглису или функцией J-аналитической с матрицей J.*

В [7] показано, что система (1) является эллиптической.

Замечание 2.1. Согласно (1) функции $\phi(z)$ и $\alpha\phi(z) + \gamma$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}^n$ будут аналитическими по Дуглису с одной и той же матрицей J.

Приведем скалярный аналог определения 2.1, который будет существенно использован ниже.

Определение 2.2. (см. [7, 14, 15, 16]) *Пусть $J = \lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Скалярная функция $f_\lambda = f_\lambda(z) \in C^1(D)$, удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = 0, \quad z \in D, \tag{2}$$

называется λ-голоморфной функцией.

Следуя [2], обозначим $[z]_\lambda = (x + \lambda y)$; $[z]_\mu = (x + \mu y)$. С учетом (2) функции

$$f_\lambda(z) = \alpha_1 [z]_\lambda + \alpha_2 [z]_\lambda^2, \quad f_\mu(z) = \beta_1 [z]_\mu + \beta_2 [z]_\mu^2, \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C},$$

будут, соответственно, λ- и μ-голоморфными.

Рассмотрим для системы (1) следующую *однородную задачу Шварца* [9, 14, 15].

Пусть конечная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладким контуром Г. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Очевидными решениями задачи (3) служат постоянные функции $\phi(z) \equiv ic$, $c \in \mathbb{R}^n$, которые называются *тривиальными решениями.*

Если $n \geq 2$, то возможны непостоянные решения однородной задачи (3). Примеры таких решений для $n = 2$ приведены в конце следующего пункта.

3. Метод построения решений однородной задачи Шварца. Приведенный ниже алгоритм основан на использовании специального базиса Q_1 оператора J, а также на применении приведенного ниже соотношения (4) между вещественными и голоморфными функциями. Основная суть метода состоит в следующем. Сначала задаются собственные числа λ, μ матрицы J. Затем коэффициенты матрицы J подбираются как параметры с тем условием, чтобы равенство (3) выполнялось на некотором эллипсе Г.

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Для произвольных чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, где $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, существуют вещественная квадратичная форма $u(x, y)$ и μ-голоморфная функция $f_\mu(z) = \alpha[z]_\mu$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ такие, что*

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f_\mu(z) = \alpha[z]_\mu = \alpha(x + \mu y). \tag{4}$$

Функции $u(x,y)$ и $f_\mu(z)$ единственны с точностью до вещественного множителя.
Доказательство. Обозначим:

$$u(x,y) = ax^2 + 2cxy + by^2, \quad a,b,c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Коэффициенты a, b, c квадратичной формы (5) будем искать из равенства

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0. \tag{6}$$

Подстановим (5) в левую часть (6):

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left[2cx + 2by - \lambda(2ax + 2cy)\right] = 2b - 2\lambda c - \mu(2c - 2\lambda a) = 0,$$

откуда $b + \lambda\mu a = (\lambda + \mu)c$. Это равенство перепишем с учетом обозначений $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$:

$$b + (\lambda_1 + \lambda_2 i)(\mu_1 + \mu_2 i)a = (\lambda_1 + \lambda_2 i + \mu_1 + \mu_2 i)c. \tag{7}$$

В свою очередь, равенство (7) равносильно следующей алгебраической системе относительно переменных a, b, где c можно рассматривать как параметр:

$$\begin{cases} (\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2)a + b = (\lambda_1 + \mu_1)c, \\ (\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2)a = (\lambda_2 + \mu_2)c. \end{cases} \tag{8}$$

Из (8) находим:

$$a = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)c}{\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2}, \quad b = (\lambda_1 + \mu_1)c - \frac{(\lambda_2 + \mu_2)c}{\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2} \cdot (\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2), \quad c = c. \tag{9}$$

Если в (9) знаменатель $\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2 \neq 0$, то решение (8) единственно с точностью до множителя c. Пусть $\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2 = 0$. По условию $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, то есть $\lambda_2 + \mu_2 \neq 0$. Поэтому из второго уравнения в (8) имеем: $a = a$, $c = 0$. Таким образом, из первого уравнения в (8) $b = -a(\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2)$. Полученное решение единственно с точностью до множителя a. Таким образом, единственная с точностью до множителя квадратичная форма (5), удовлетворяющая (6), построена.

Заметим, что функция

$$f_\mu(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

будет линейной, и при этом согласно (6) и (2) она будет μ-голоморфной. Следовательно, при некотором значении α имеет место равенство (4). Найдем комплексный параметр α. Для этого продифференцируем по переменной x обе части равенства (4). Имеем с учетом обозначения (5):

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2c - 2\lambda a = 2(c - \lambda a), \tag{10}$$

где вещественные числа a, c есть ненулевое решение системы (8). При этом параметр α определен с точностью до множителя c, если $c \neq 0$, и с точностью до множителя a, если $c = 0$, $a \neq 0$. Таким образом, при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$ система (8) всегда имеет ненулевое решение. Несложно показать также, что $\alpha \neq 0$, если числа a, b, c — не все нулевые. *Лемма* 3.1 *доказана.*

Замечание 3.1. Пусть числа $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$. Формулы (8) и (9), то есть и квадратичная форма $u(x,y)$ (5) не зависят от того, какое из этих двух чисел обозначено через λ, а какое — через μ. Обозначим, например, $\xi = \lambda$. Тогда согласно (10) параметр α будет иметь вид $\alpha = 2(c - \xi a)$. Соотвественно, в этом случае $\zeta = \mu$, то есть в (4) имеем $f_\mu(z) = \alpha(x + \zeta y)$.

Перейдем непосредственно к описанию алгоритма построения решений задачи (3) в виде квадратичных вектор-форм, где Γ — некоторый эллипс. При этом будем использовать лемму 3.1. Пусть λ, μ — собственные числа *нетреугольной* 2×2-матрицы J, которые лежат выше вещественной оси. Обозначим:

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad J - \mu E = \begin{pmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Пусть вектор $\mathbf{x} = (1,0)^{\mathrm{T}}$, тогда в обозначениях (11) вектор $\mathbf{y} = (J - \mu E)\mathbf{x} = (a_{11} - \mu,\ a_{21}) \neq 0$, так как матрица J нетреугольная и $a_{21} \neq 0$. Пусть E — единичная матрица. Имеем:

$$\begin{gathered} J\mathbf{y} = J(J - \mu E)\mathbf{x} = (J + \lambda E - \lambda E)(J - \mu E)\mathbf{x} = (\lambda E + J - \lambda E)(J - \mu E)\mathbf{x} = \\ = \lambda E(J - \mu E)\mathbf{x} + (J - \lambda E)(J - \mu E)\mathbf{x} = \lambda(J - \mu E)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}, \end{gathered} \tag{12}$$

так как согласно теореме Гамильтона-Кэли $(J-\lambda E)(J-\mu E)=0$. Следовательно, вектор $\mathbf{y}=(J-\mu E)\mathbf{x}=(a_{11}-\mu, a_{21})$ будет собственным для матрицы J, соответствующем ее собственному числу λ. При этом из равенства $\mathbf{y}=(J-\mu E)\mathbf{x}$ получаем $J\mathbf{x}=\mu\mathbf{x}+\mathbf{y}$. Поэтому матрица J_1 оператора J в специальном базисе $Q_1=(\mathbf{x},\mathbf{y})$ имеет вид

$$J_1=Q_1^{-1}JQ_1=\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad Q_1=(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{pmatrix}1 & a_{11}-\mu\\ 0 & a_{21}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

Замечание 3.2. Из (13) следует, что при $\lambda=\mu$ специальный базис Q_1 матрицы J будет жордановым базисом.

Согласно (13) $J=Q_1J_1Q_1^{-1}$. Подставим правую часть этого равенства в (1):

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-Q_1J_1Q_1^{-1}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}=0, \tag{14}$$

и умножим обе части (14) слева на матрицу Q_1^{-1} :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[Q_1^{-1}\phi\right]-J_1\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[Q_1^{-1}\phi\right]=0. \tag{15}$$

Будем искать решение $Q_1^{-1}\phi(z)$ уравнения (15) в виде

$$Q_1^{-1}\phi(z)=(g,\, iu)^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

где $u=u(x,y)$ — вещественная квадратичная форма. Тогда с учетом (15) и (13) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}g(z)\\ iu(x,y)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}g(z)\\ iu(x,y)\end{pmatrix}=0. \tag{17}$$

Из (17) согласно (2) следует, что $g(z)=g_\mu(z)$ — это произвольная μ-голоморфная функция. Положим $g_\mu(z)=\beta[z]_\mu^2=\beta(x+\mu y)^2$, $\beta\in\mathbb{C}$, тогда согласно (17)

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\lambda\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-i\,\frac{\partial g_\mu}{\partial x}=-i\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta(x+\mu y)^2\right]=-2i\beta(x+\mu y)=-2i\beta[z]_\mu. \tag{18}$$

К уравнению (18) приме́ним лемму 3.1. Тогда в обозначениях (4) имеем $\alpha=-2i\beta$, то есть

$$g_\mu(z)=\beta[z]_\mu^2=\frac{\alpha i}{2}\,[z]_\mu^2=\frac{\alpha i}{2}\,(x+\mu y)^2,\quad \alpha=2(c-\lambda a), \tag{19}$$

где число α находим согласно (10). Квадратичную форму $u=u(x,y)$ строим по формулам (5), (8) и (9). Таким образом, по построению и с учетом (16) функция $\phi(z)=Q_1\cdot(g,\, iu)^{\mathrm{T}}$ будет аналитической по Дуглису с матрицей J (11). При этом согласно замечанию 2.1 функция

$$\phi(z)=\overline{a}_{21}\cdot Q_1\cdot(g,\, iu)^{\mathrm{T}}-(\xi_1,\xi_2)^{\mathrm{T}}\quad \xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$$

будет аналитической по Дуглису с той же матрицей J. Выпишем подробно данную функцию с учетом (13) и (19):

$$\begin{gathered}\phi(z)=\overline{a}_{21}\cdot Q_1\cdot(g_\mu,\, iu)^{\mathrm{T}}-(\xi_1,\xi_2)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\overline{a}_{21} & \overline{a}_{21}(a_{11}-\mu)\\ 0 & |a_{21}|^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\alpha i}{2}\,[z]_\mu^2\\ iu(x,y)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\\ =\begin{pmatrix}\overline{a}_{21}\cdot\frac{\alpha i}{2}\cdot[z]_\mu^2+i\cdot\overline{a}_{21}(a_{11}-\mu)\cdot u(x,y)\\ i\cdot|a_{21}|^2\cdot u(x,y)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix},\quad \xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}.\end{gathered} \tag{20}$$

Пусть при фиксированных собственных числах λ,μ матрицы J коэффициенты a_{11},a_{21} ее первого столбца таковы, что в (20)

$$\operatorname{Re}\left[\overline{a}_{21}\cdot\frac{\alpha i}{2}\cdot[z]_\mu^2+i\cdot\overline{a}_{21}(a_{11}-\mu)\cdot u(x,y)\right]=a_1x^2+2c_1xy+b_1y^2,\quad a_1b_1-c_1^2>0. \tag{21}$$

Пусть квадратичная форма (31) — положительно определенная. Тогда при $(\xi_1,\xi_2)=(1,0)$ функция $\phi(z)$ (20) будет обладать искомым свойством $\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma=0$ на эллипсе

$$\Gamma:\ a_1x^2+2c_1xy+b_1y^2=1.$$

Довольно очевидно, что коэффициенты a_{11}, a_{21} можно подобрать (и неединственным образом) так, чтобы выполнялось условие (31). Затем матрицу J восстанавливаем по известным ее собственным числам и элементам первого столбца — см. приведенное ниже замечание 3.3. Если квадратичная форма (31) — отрицательно определенная, то нужно в (20) взять $(\xi_1, \xi_2) = (-1, 0)$. Таким образом, искомое решение однородной задачи Шварца задачи (3) построено.

Замечание 3.3. Пусть заданы элементы a_{11}, a_{21} первого столбца матрицы J (11), а также заданы ее собственные числа λ, μ. Тогда, как известно, второй столбец матрицы J однозначно восстанавливается на основании следующих двух равенств: $a_{11} + a_{22} = \lambda + \mu$, $\det J = \lambda \cdot \mu$. Аналогично: пусть известны элементы a_{12}, a_{22} второго столбца матрицы J и ее собственные числа λ, μ. Тогда первый столбец матрицы J однозначно восстанавливается, исходя из той же пары равенств.

Приведем два примера, построенные по описанному выше методу.

Пример 3.1. Пусть $\lambda = \mu = 1 + i$. Тогда согласно (9) $a = 1, c = 1, b = 2$, то есть $u(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$. Согласно (10) $\alpha = -2i$. Положим в (20) $a_{11} = -2i$, $a_{21} = 1$. Тогда функция $\phi(z)$ (20) будет обладать свойством (31). Матрицу J восстанавливаем по известным элементам a_{11}, a_{21} ее первого столбца и кратному собственному числу λ (см. замечание 3.3). В итоге имеем:

$$\phi_1(z) = \overline{a}_{21} \cdot Q_1 \cdot (g,\ iu)^{\mathrm{T}} - (1,0)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4x^2 + 8xy + 6y^2 - 1 - x^2 i \\ (x^2 + 2xy + 2y^2)\, i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -2i & 8 - 6i \\ 1 & 2 + 4i \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Непосредственная подстановка в (1) показывает, что функция $\phi_1(z)$ в (22) будет аналитической по Дуглису с данной матрицей J. При этом J имеет кратное собственное число $\lambda = 1 + i$. Имеем: $\operatorname{Re}\phi_1(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ 4x^2 + 8xy + 6y^2 = 1$.

Пример 3.2. Пусть $\lambda = 2i$, $\mu = 1 + i$. Тогда согласно (9) $a = 3, c = 2, b = 8$, то есть $u(x, y) = 3x^2 + 4xy + 8y^2$. Согласно (10) $\alpha = 4 - 12i$. Положим в (20) $a_{11} = -2$, $a_{21} = -i$. Тогда функция $\phi(z)$ (20) будет обладать свойством (31). Далее восстанавливаем матрицу J. В итоге имеем:

$$\phi_2(z) = \overline{a}_{21} \cdot Q_1 \cdot (g,\ iu)^{\mathrm{T}} - (1,0)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7x^2 - 4xy + 12y^2 - 1 + (9x^2 + 12xy + 4y^2)\, i \\ (3x^2 + 4xy + 8y^2)\, i \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 8 - 4i \\ -i & 3 + 3i \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Функция $\phi_2(z)$ в (23) будет аналитической по Дуглису с матрицей J (24). При этом J имеет разные собственные числа $\lambda = 2i$, $\mu = 1 + i$. Имеем: $\operatorname{Re}\phi_2(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ 7x^2 - 4xy + 12y^2 = 1$.

Далее заметим, что те же самые рассуждения можно повести, если изначально в (12) взять вектор $\mathbf{x} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$. Дальнейшие преобразования аналогичны приведенным выше. Опишем коротко лишь их основные моменты. Вектор $\mathbf{y} = (J - \mu E)\mathbf{x} = (a_{12},\ a_{22} - \mu)$ будет собственным вектором, соответствующем другому собственному числу λ матрицы J. Это доказывается так же, как и (12). После преобразований получаем выражения, аналогичные (13):

$$J_2 = Q_2^{-1} J Q_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad Q_2 = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} - \mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Число α находим по той же формуле (10), квадратичную форму $u(x, y)$ — по формулам (5), (8) и (9). В ходе дальнейших преобразований получаем следующий "зеркальный" аналог равенства (20):

$$\begin{gathered} \phi(z) = \overline{a}_{12} \cdot Q_2 \cdot (iu,\ g_\mu)^{\mathrm{T}} - (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} |a_{12}|^2 & 0 \\ \overline{a}_{12}(a_{22} - \mu) & \overline{a}_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} iu(x,y) \\ \dfrac{\alpha i}{2}\, [z]_\mu^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} i \cdot |a_{12}|^2 \cdot u(x,y) \\ \overline{a}_{12} \cdot \dfrac{\alpha i}{2} \cdot [z]_\mu^2 + i \cdot \overline{a}_{12}(a_{22} - \mu) \cdot u(x,y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{25}$$

Пусть в (25)

$$\operatorname{Re}\left[\overline{a}_{12} \cdot \frac{\alpha i}{2} \cdot [z]_\mu^2 + i \cdot \overline{a}_{12}(a_{22} - \mu) \cdot u(x,y)\right] = a_1 x^2 + 2c_1 xy + b_1 y^2, \quad a_1 b_1 - c_1^2 > 0. \tag{26}$$

Пусть числа a_{12}, a_{22} таковы, что квадратичная форма (26) — положительно определенная. Тогда при $(\xi_1, \xi_2) = (0, 1)^{\mathrm{T}}$ функция (25) будет решением однородной задачи Шварца на эллипсе $\Gamma:\ a_1 x^2 + 2c_1 xy + b_1 y^2 = 1$. Затем согласно замечанию 3.3 матрицу J восстанавливаем по известным ее собственным числам и элементам второго первого столбца.

Заметим, что формулы (20) и (25) позволяют строить решения $\phi(z)$ однородной задачи Шварца со свойством $\operatorname{Re}\phi(z) = (P, 0)$, либо $\operatorname{Re}\phi(z) = (0, P)$. Для того, чтобы получить решения задачи (3) со свойством $\operatorname{Re}\phi(z) = (P_1, P_2)$, приме́ним следующее преобразование. Пусть матрица C — вещественная и неособая. Тогда с учетом (1) имеем равенство

$$C \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - CJC^{-1} \cdot C\,\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial y}\big[C\phi\big] - CJC^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\big[C\phi\big] = 0. \tag{27}$$

Согласно (27) и (1) функция $\phi'(z) = C\phi(z)$ будет аналитической по Дуглису с матрицей $J' = CJC^{-1}$, которая подобна матрице J. Поэтому матрица J' имеет те собственные числа, что и матрица J. Очевидно, что если построено решение задачи (3) по формулам (20) или (25), то при соответствующем подборе матрицы C получим решение с требуемым свойством $\operatorname{Re}\phi(z) = (P_1, P_2)$.

Полученные в этом разделе результаты оформим в виде следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть комплексные числа λ, μ лежат выше вещественной оси. Тогда существуют нетреугольная 2×2-матрица J, имеющая собственные числа λ, μ, и эллипс Γ такие, что для некоторого J-аналитического квадратичного вектор-полинома $\phi(z)$ выполняется равенство* (3).

Приведем четыре примера для иллюстрации сделанных выше построений.

Пример 3.3. Используем равенство (25). Пусть $\lambda = i$, $\mu = 2i$. Здесь $\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2 = 0$, то есть из системы (8) имеем: $a = a, c = 0, b = \lambda_2\mu_2 a$. Положим $a = 1$, тогда согласно (10) $\alpha = -2i$, и согласно (5) $u(x, y) = x^2 + 2y^2$. Имеем:

$$\phi_3(z) = \overline{a}_{12} \cdot Q_2 \cdot (iu,\, g_\mu)^{\mathrm{T}} - (0,1)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -3(x^2 + 2y^2)\, i \\ x^2 + 8y^2 - 1 - 4xyi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 2 & 4i \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Матрица J в (28) имеет разные собственные числа $\lambda = i$, $\mu = 2i$. При этом $\operatorname{Re}\phi_3(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ x^2 + 8y^2 = 1$.

Пример 3.4. Пусть $\lambda = i$, $\mu = 2i$, и пусть матрица J и функция $\phi_3(z)$ заданы формулой (28). Имеем с учетом (27):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_3'(z) = C \cdot \phi_3(z) = \begin{pmatrix} x^2 + 8y^2 - 1 - (3x^2 + 4xy + 6y^2)\, i \\ x^2 + 8y^2 - 1 - 4xyi \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$J' = CJC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - i & 1 + 5i \\ 2 & -2 + 4i \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Матрица J' в (30) имеет те же собственные числа $\lambda = i$, $\mu = 2i$, что и подобная ей матрица J в (28). При этом в (13) $\operatorname{Re}\phi_3'(z)\big|_\Gamma = 0$ на том же эллипсе $\Gamma:\ x^2 + 8y^2 = 1$.

Пример 3.5. Здесь так же используем равенство (25). Пусть $\lambda = \mu = 3i$. Тогда $u(x, y) = x^2 + 9y^2$. Имеем:

$$\phi_4(z) = \overline{a}_{12} \cdot Q_2 \cdot (iu,\, g_\mu)^{\mathrm{T}} - (0,1)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} (x^2 + 9y^2)\, i \\ 7x^2 + 9y^2 - 1 + 18xyi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 7i & 1 \\ 16 & -i \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Матрица J в (31) имеет кратное собственное число $\lambda = 3i$. При этом $\operatorname{Re}\phi_4(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ 7x^2 + 9y^2 = 1$.

Пример 3.6. Пусть матрица J и функция $\phi_4(z)$ заданы формулой (31). Имеем с учетом (27):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_4'(z) = C \cdot \phi_4(z) = \begin{pmatrix} 7x^2 + 9y^2 - 1 + (x^2 + 18xy + 9y^2)\, i \\ 7x^2 + 9y^2 - 1 + 18xyi \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$J' = CJC^{-1} = \begin{pmatrix} 16 + 7i & -15 - 8i \\ 16 & -16 - i \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Матрица J' в (33) имеет то же кратное собственное число $\lambda = 3i$, что и подобная ей матрица J в (31). При этом в (32) $\operatorname{Re}\phi_4'(z)\big|_\Gamma = 0$ на том же эллипсе $\Gamma:\ 7x^2 + 9y^2 = 1$.

4. Заключение. Приведенный выше метод имеет то преимущество, что он позволяет быстро построить примеры решений однородной задачи Шварца. Метод универсален, то есть он подходит для матриц J как с кратными, так и с разными собственными числами. Следует отметить, что построение конкретных примеров все-же требует достаточно больших вычислений. Поэтому здесь обязательна проверка, то есть подстановка функции $\phi(z)$ и матрицы J в равенство (1). Данная процедура была проделана автором для всех шести построенных выше примеров.

Список литературы

1. Douglis A. Function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Communications on Pure and Applied Mathematics.* 1953;6:259–289.

2. Paskali D. Vecturs analytiques generelises. *Pure and Applied mathematics.* 1965;10:779–808.
3. Horvath J. A generalization of the Cauchy-Riemann equations. *Contrib. Differential Equations.* 1961;1:39–57.
4. Gilbert RP. Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity. *Proceedings of the Royal Society.* 1975;73:317–371.
5. Bojarski B. Theory of generalized analytic vector. *Annales Polonici Mathematici.* 1966;17(3):281–320.
6. Hile GN. Elliptic systems in the plane with order term and constant coefficients. *Communications on Pure and Applied Mathematics.* 1978;3(10):949–977.
7. Солдатов А.П. Функции, аналитические по Дуглису. Белгород; 2016. 88 с.
8. Солдатов А.П. Эллиптические уравнения высокого порядка. *Дифференциальные уравнения.* 1989;25(1):136–142.
9. Soldatov AP. The Schwarz problem for Douglis analytic functions. *Journal of Mathematical Sciences.* 2011;2(173):221–224.
10. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Москва; 1948. 367 с.
11. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. Москва; 1966. 325 с.
12. Ieh RZ. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane. *Pacific Journal of Mathematics.* 1990;142(2):379–399.
13. Жура Н.И. Об общих решениях систем Лерая-Дуглиса-Ниренберга с постоянным коэффициентами на плоскости. *Доклады РАН.* 1993;331(5):546–549.
14. Nikolaev VG. Schwarz Problem in Ellipse for Nondiagonalizable Matrices. *Journal of Mathematical Sciences.* 2020;6(251):876–901.
15. Николаев В.Г., Солдатов А.П. О решении задачи Шварца для J-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова. *Дифференциальные уравнения.* 2015;51(7):965–969.
16. Васильев В.Б., Николаев В.Г. О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости. *Дифференциальные уравнения.* 2017;53(10):1351–1361.

References

1. Douglis A. Function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Communications on Pure and Applied Mathematics.* 1953;6:259–289.
2. Paskali D. Vecturs analytiques generelises. *Pure and Applied mathematics.* 1965;10:779–808.
3. Horvath J. A generalization of the Cauchy-Riemann equations. *Contrib. Differential Equations.* 1961;1:39–57.
4. Gilbert RP. Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity. *Proceedings of the Royal Society.* 1975;73:317–371.
5. Bojarski B. Theory of generalized analytic vector. *Annales Polonici Mathematici.* 1966;17(3):281–320.
6. Hile GN. Elliptic systems in the plane with order term and constant coefficients. *Communications on Pure and Applied Mathematics.* 1978;3(10):949–977.
7. Soldatov AP. 2016. Douglis analytic functions. Belgorod; 2016. 88 p.
8. Soldatov AP. 1989. Elliptic equations of high order. *Differential equations.* 1989;25(1):136–142. (in Russian)
9. Soldatov AP. The Schwarz problem for Douglis analytic functions. *Journal of Mathematical Sciences.* 2011;2(173):221–224.
10. Vekua IN. New methods of solving elliptic equations. Moscow; 1948. 367 p. (in Russian)
11. Bitsadze AV. Boundary value problems for second order elliptic equations. Moscow; 1966. 325 p. (in Russian)
12. Ieh RZ. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane. *Pacific Journal of Mathematics.* 1990;142(2):379–399.
13. Zhura NI. On the general solution of Leray-Douglis-Nirenberg systems with constant coefficients in the plane. *Reports of the RAN.* 1993;331(5):546–549. (in Russian).
14. Nikolaev VG. Schwarz Problem in Ellipse for Nondiagonalizable Matrices. *Journal of Mathematical Sciences.* 2020;6(251):876–901.
15. Nikolaev VG., Soldatov AP. On the solution of the Schwarz problem for J-analytic functions in a domain bounded by a Lyapunov contour. *Differential Equations.* 2015;51(7):962–966.
16. Vasil'ev VB., Nikolaev VG. Schwarz problem for first-order elliptic systems on the plane. *Differential Equations.* 2017;53(10):1318–1328.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.08.2023
Поступила после рецензирования 27.09.2023
Принята к публикации 30.09.2023

Received August 15, 2023
Revised September 27, 2023
Accepted September 30, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Николаев Владимир Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir G. Nikolaev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Novgorod State University named after Yaroslav-the-Wise, Velikiy Novgorod, Russia