Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 197–206.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 197–206.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.55+517.96
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-197-206
MSC 39A06, 32A10, 39A10, 39A14
Оригинальное исследование

Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка

[1] **Архипов В. П.**, [2] **Глушак А. В.**
[1] Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru
[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка предложен метод построения асимптотических представлений решений, позволяющий построить точные асимптотики решений в окрестности точки вырождения. Приводится пример получения степенной асимптотики.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, точка вырождения, асимптотические представления, степенная асимптотика

Для цитирования: Архипов В. П., Глушак А. В. 2023. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 197–206.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-197-206

Original Research

First Asymptotics of Solutions of Degenerate Differential Equations of the Second Order

[1] **Viktor P. Arkhipov**, [2] **Alexander V. Glushak**
[1] Oryel State University named after I. S. Turgenev,
95 Komsomolskaya st., Orel, 302026, Russia
varhipov@inbox.ru
[2] Belgorod National Research University,
85 Pobedy st., Belgorod, 308015, Russia
Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. For ordinary linear degenerate differential equations of the second order, a method for constructing asymptotic representations of solutions is proposed, which allows construct exact asymptotics of solutions in a neighborhood of the degeneracy point. An example is given obtaining a power asymptotics.

Keywords: Degenerate Differential Equations, Degeneracy Point, Asymptotic Representations, Power Asymptotics

For citation: Arkhipov V. P., Glushak A. V. 2023. First Asymptotics of Solutions of Degenerate Differential Equations of the Second Order. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 197–206. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-197-206

---

1. Введение. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, при сохранении знака коэффициента при старшей производной, подробно изучены в классических курсах дифференциальных уравнений. Однако изучение поведения решений вблизи точки вырождения указанного коэффициента требует определенных усилий (см. [3, 4, 1]). В настоящей работе нас интересует возможность построения точных асимптотик решений в окрестности точки вырождения при $t \to 0+$.

Рассмотрим вырождающееся при $t = 0$ дифференциальное уравнение

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t) \tag{1}$$

с действительными на отрезке $[0, 1]$ коэффициентами и такими, что $b(0) \neq 0$, $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ при $t \in (0, 1]$, а также при некоторых предположениях о гладкости коэффициентов, позволяющих проводить необходимые преобразования.

В работах [1, 2] построены разложения решений уравнения (1) по асимптотическим рядам специально выбранных функций. Приведем во введении некоторые из этих результатов, которые понадобятся для наших дальнейших исследований.

Пусть $d(t)$ — произвольная достаточно гладкая функция и такая, что $d(t) \neq 0$ при $t \in (0, 1]$. Для любых точек $t_0, t \in (0, 1]$ определим две функции $v_k(t),\ k = 1, 2$ по формуле

$$v_k(t, t_0) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{b(\tau) - (-1)^k d(\tau)}{2a(\tau)}\, d\tau \right), \tag{2}$$

а также функции

$$h(t) = \frac{1}{4d(t)} \left(a(t) \left(\frac{d'(t)}{d(t)} \right)^2 - 2 \left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)} \right)' + \frac{d^2(t) - b^2(t) + 4a(t)c(t) - 2a(t)b'(t)}{a(t)} \right), \tag{3}$$

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau, \quad w(t, t_0) = \int_t^{t_0} \frac{d(\tau)}{a(\tau)}\, d\tau. \tag{4}$$

При $f(t) \equiv 0$ линейно независимые решения однородного уравнения (1) могут быть представлены в виде $u_1(t) = \Phi(t)v_1(t), \quad u_2(t) = \Psi(t)v_2(t)$.

Функция $\Phi(t)$ — решение задачи

$$\Phi(t) = 1 + K_1\Phi(t), \quad \Phi(0) = 1, \tag{5}$$

где K_1 — интегральный оператор

$$K_1\varphi(t) = \int_0^{t_0} k_1(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau$$

с ядром $k_1(t, \tau) = h(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t \leq t_0$ и $k_1(t, \tau) = h(\tau) \exp\left(w(\tau, t_0) - w(t, t_0)\right)$ при $t \leq \tau \leq t_0$, функции $h(t),\ w(t, t_0)$ введены в (3), (4).

Аналогично, функция $\Psi(t)$ — решение задачи

$$\Psi(t) = 1 + K_2\Psi(t), \quad \Psi(0) = 1, \tag{6}$$

где K_2 — интегральный оператор

$$K_2\psi(t) = \int_0^{t} k_2(t, \tau)\psi(\tau)\, d\tau$$

с ядром $k_2(t, \tau) = -h(\tau)\left(1 - \exp\left(w(t, t_0) - w(\tau, t_0)\right)\right)$ при $0 \leq \tau \leq t$.

В дальнейшем будем полагать $b(t) = b = const \neq 0,\ a(t) = t^m a_0(t),\ m \geq 2,\ a_0(t) > 0$, что означает случай сильного вырождения уравнения (1).

Пусть $d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)}$. Выберем точку $t_0 > 0$ так, чтобы для $t \in [0, t_0]$ выполнялись неравенства $d(t) > 0$. Такой выбор функции $d(t)$ и точки t_0 позволяет при $t \to 0$ записать асимптотические представления

$$a(t) = t^m O(1),\ h(t) = t^{2m-2}O(1),\ d(t) = |b|\left(1 + t^m O(1)\right),\ s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau = t^{2m-1}O(1), \tag{7}$$

что в дальнейшем позволит использовать (7) при нахождении асимптотик решений.

2. Асимптотические свойства интегральных операторов K_1 и K_2. Будем предполагать в дальнейшем, что функции $a(t)$ и $f(t)$ имеют именно степенную асимптотику конечного порядка в точке $t = 0$.

Лемма 1. *Пусть $a(t), f(t), d(t) \in C^2[0, t_0]$ для некоторого $t_0 \in (0, 1]$, $a(0) = a'(0) = 0$ и на $(0, t_0]$ $a(t) > 0, f(t) \neq 0$, кроме того, $d(t) > 0$ на $[0, t_0]$. Тогда справедливы представления*

$$\int_t^{t_0} f(\xi) \exp\left(-\int_t^{\xi} \frac{d(\tau)}{a(\tau)} d\tau \right) d\xi = \frac{a(t)}{d(t)} \left(f(t) + \left(\frac{a(t)f(t)}{d(t)} \right)' (1 + a'(t)O(1)) \right), \tag{8}$$

$$\int_0^{t} f(\xi) \exp\left(-\int_{\xi}^{t} \frac{d(\tau)}{a(\tau)} d\tau \right) d\xi = \frac{a(t)}{d(t)} \left(f(t) - \left(\frac{a(t)f(t)}{d(t)} \right)' (1 + o(1)) \right). \tag{9}$$

Доказательство. Дважды интегрируя по частям, получим представление

$$\int\limits_t^{t_0} f(\xi)\exp\left(-\int\limits_t^{\xi}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}+\int\limits_t^{t_0}\left(\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi-$$

$$-\frac{a(t_0)f(t_0)}{d(t_0)}\exp\left(-\int\limits_t^{t_0}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}+\int\limits_t^{t_0}\left(\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi+o(t^{\infty})=$$

$$=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}+\frac{a(t)\tilde f(t)}{d(t)}+\int\limits_t^{t_0}\left(\frac{a(\xi)\tilde f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\exp\left(-\int\limits_t^{\xi}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi+o(t^{\infty}), \tag{10}$$

где $\tilde f(t)=\left(\dfrac{a(t)f(t)}{d(t)}\right)'$.

Рассмотрим далее отношение

$$\frac{\int\limits_t^{t_0}\left(a(\xi)\tilde f(\xi)/d(\xi)\right)'\exp\left(-\int\limits_t^{\xi}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}{\tilde f(t)a(t)a'(t)/d(t)}=\frac{\int\limits_t^{t_0}\left(a(\xi)\tilde f(\xi)/d(\xi)\right)'\exp\left(\int\limits_{\xi}^{t_0}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}{\tilde f(t)a(t)a'(t)/d(t)\exp\left(\int\limits_t^{t_0}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}$$

и, поскольку функции $a(t)$ и $f(t)$ имеют именно степенную асимптотику конечного порядка в точке $t=0$, то применяя правило Лопиталя к этому отношению, получим

$$\lim_{t\to0+}\frac{-\left(a(t)\tilde f(t)/d(t)\right)'}{\left(a(t)a'(t)\tilde f(t)/d(t)\right)'-a'(t)\tilde f(t)}=const=O(1). \tag{11}$$

Таким образом, в силу доказанного равенства (11)

$$\int\limits_t^{t_0}\left(a(\xi)\tilde f(\xi)/d(\xi)\right)'\exp\left(-\int\limits_t^{\xi}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi=\frac{\tilde f(t)a(t)a'(t)}{d(t)}O(1),$$

что вместе с (10) устанавливает асимптотическое представление (8).

Докажем теперь представление (9). Как и при доказательстве (8), дважды интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^{t} f(\xi)\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi=\int\limits_0^{t}\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\frac{d(\xi)}{a(\xi)}\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi=$$

$$=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}-\int\limits_0^{t}\frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\frac{d(\xi)}{a(\xi)}\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi=$$

$$=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}-\frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)f(t)}{d(t)}\right)'+\int\limits_0^{t}\left(\frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)'\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi. \tag{12}$$

Поскольку

$$\lim_{t\to0+}\frac{\int\limits_0^{t}\tilde f(\xi)\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}{\tilde f(t)a(t)a'(t)/d(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{\int\limits_0^{t}\tilde f(\xi)\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t_0}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}{\tilde f(t)a(t)a'(t)/d(t)\exp\left(-\int\limits_t^{t_0}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}=$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\tilde f(t)\exp\left(-\int\limits_t^{t_0} d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)}{\tilde f(t)\exp\left(-\int\limits_t^{t_0} d(\tau)/a(\tau)d\tau\right) + \left(a(t)\tilde f(t)/d(t)\right)'\exp\left(-\int\limits_t^{t_0} d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\tilde f(t)}{\tilde f(t) + \left(a(t)\tilde f(t)/d(t)\right)'} = 1,$$

то

$$\int\limits_0^t f(\xi)\exp\left(-\int\limits_\xi^t \frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi = \frac{a(t)}{d(t)}\left(f(t) - \frac{a(t)f(t)}{d(t)}\right)'(1+o(1)$$

и из (12) вытекает представление (9). Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:

$$K_{10}\varphi(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\ K_{11}\varphi(t) = \int\limits_t^{t_0} h(\tau)\varphi(\tau)\exp\left(w(\tau,t_0) - w(t,t_0)\right)d\tau,\ s(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\,d\tau,$$

где функции $h(t)$, $w(t,t_0)$ определены в (3), (4).

Интегрируя по частям, будем иметь

$$K_{10}\varphi(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = s(t)\varphi(t) - \int\limits_0^t s(\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau,$$

а, применяя лемму 1 при $\varphi(t)\in C^2[0,t_0]$, получим

$$K_{11}\varphi(t) = \int\limits_t^{t_0} h(\tau)\varphi(\tau)\exp\left(w(\tau,t_0)-w(t,t_0)\right)d\tau = \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t)\varphi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\varphi(t)\right)'(1+a'(t)O(1))\right). \quad (13)$$

Поэтому для $K_1\varphi(t)$ справедливо асимптотическое представление

$$K_1\varphi(t) = K_{10}\varphi(t) + K_{11}\varphi(t) =$$

$$= s(t)\varphi(t) - \int\limits_0^t s(\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t)\varphi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\varphi(t)\right)'(1+a'(t)O(1))\right). \quad (14)$$

Продифференцировав (5) и применив (13), получим асимптотическое представление для производной

$$(K_1\varphi(t))' = \frac{d(t)}{a(t)}\exp(-w(t,t_0))\int\limits_t^{t_0} h(\tau)\varphi(\tau)\exp\left(w(\tau,t_0)\right)\,d\tau = \frac{d(t)}{a(t)}K_{11}\varphi(t) =$$

$$= h(t)\varphi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\varphi(t)\right)'(1+a'(t)O(1)) = h(t)\varphi(t)\left(1+o(1)\right). \quad (15)$$

Аналогично применяя лемму 1 при $\psi(t)\in C^2[0,t_0]$, получим

$$K_2\psi(t) = -\int\limits_0^t h(\tau)\left(1-\exp\left(w(t,t_0)-w(\tau,t_0)\right)\right)\psi(\tau)\,d\tau = K_{20}\psi(t) + K_{21}\psi(t) =$$

$$= -s(t)\psi(t) + \int\limits_0^t s(\tau)\psi'(\tau)\,d\tau + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t)\psi(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\psi(t)\right)'(1+O(1))\right). \quad (16)$$

Дифференцируя (6) и применяя лемму 1, с учетом асимптотических представлений (7), будем иметь

$$(K_2\psi(t))' = k_2(t,t)\psi(t) - \frac{d(t)}{a(t)}\int\limits_0^t h(\tau)\exp\left(w(t,t_0)-w(\tau,t_0)\right)\psi(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{d(t)}{a(t)} \int\limits_0^t h(\tau) \exp\left(\int\limits_\tau^t \frac{d(\xi)}{a(\xi)}\, d\xi\right) \psi(\tau)\, d\tau = -h(t)\psi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\psi(t)\right)' (1+o(1)) =$$

$$= -h(t)\psi(t)(1+o(1)). \tag{17}$$

3. Первые асимптотики функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$. Результаты предыдущего пункта применим для исследования асимптотики функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$. Отметим, что требования гладкости, накладываемые на рассматриваемые функции, обусловлены методом и не являются точными.

Лемма 2. *Пусть $a(t), c(t) \in C^4[0, t_0]$, $a(t) = t^m a_0(t)$, $m \geq 2$, $a_0(t) > 0$ при $t \in [0, t_0]$, $b(t) = b = const$ и $d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)} > 0$. Тогда определяемые равенствами (5), (6) функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ допускают при $t \to 0+$ асимптотические представления*

$$\Phi(t) = 1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\right)'\right) + s^2(t)O(1), \tag{18}$$

$$\Psi(t) = 1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\right)'\right) + s^2(t)O(1), \tag{19}$$

где функции $h(t), s(t)$ определены в (3), (4).

Доказательство. Продифференцировав (5) и используя (15), получим

$$\Phi'(t) = (K_1\Phi(t))' = h(t)\Phi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Phi(t)\right)' (1 + a'(t)O(1)) = h(t)\Phi(t)(1+o(1)). \tag{20}$$

Учитывая равенства (5), (14), (20), будем иметь

$$\Phi(t) = 1 + K_1\Phi(t) = 1 + s(t)\Phi(t) - \int\limits_0^t s(\tau)\Phi'(\tau)\, d\tau + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t)\Phi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Phi(t)\right)'\right) (1 + a'(t)O(1)) =$$

$$= 1 + s(t)\Phi(t) - \frac{1}{2}s^2(t)\Phi(t)(1+o(1)) + \frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Phi(t) + \left(\frac{a(t)\Phi(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)' + h(t)\Phi'(t)\left(\frac{a(t)}{d(t)}\right)^2\right) (1 + a'(t)O(1)),$$

поскольку

$$\int\limits_0^t s(\tau)\Phi'(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t s(\tau)h(\tau)\Phi(\tau)(1+o(1))\, d\tau = \frac{1}{2}s^2(t)\Phi(t)(1+o(1)).$$

При малых $t > 0$ $\Phi'(t) = h(t)\Phi(t)(1+o(1))$, поэтому справедливо соотношение

$$\Phi(t) = 1 + s(t)\Phi(t) + \frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Phi(t) + \frac{a(t)\Phi(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)' + s^2(t)\Phi(t)O(1),$$

разрешая которое относительно $\Phi(t)$, окончательно получим $1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\right)'\right) + s^2(t)O(1)$, что и доказывает асимптотическое представление (18).

Аналогично для $\Psi(t)$ из (6), (16), (17) выводим

$$\Psi'(t) = (K_2\Psi(t))' = -h(t)\Psi(t)(1+o(1)),$$

$$\Psi(t) = 1 + K_2\Psi(t) = 1 - s(t)\Psi(t) - \int\limits_0^t s(\tau)h(\tau)\Psi(\tau)(1+o(1))\, d\tau +$$

$$+ \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t)\Psi(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Psi(t)\right)'\right) (1+o(1)),$$

$$\Psi(t = 1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\right)'\right) + s^2(t)O(1).$$

Тем самым и асимптотическое представление (19) также установлено. Лемма доказана.

4. Первые асимптотики решений однородного уравнения. Поведение решений однородного уравнения

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = 0 \tag{21}$$

вблизи точки вырождения $t = 0$ определяется в основном функциями $v_1(t, t_0)$, $v_2(t, t_0)$, заданными равенствами (2) (подробнее см. [1]), которые представляются конкретными функциями и их асимптотики могут быть получены стандартными методами или же с помощью известных пакетов математических вычислений, например, Wolfram Mathematica. Асимптотические представления указанных во введении решений

$$u_1(t) = \Phi(t)v_1(t, t_0), \quad u_2(t) = \Psi(t)v_2(t, t_0) \tag{22}$$

однородного уравнения (21) устанавливаются в следующей теореме, в которой требования к гладкости коэффициентов завышены для упрощения формулировки.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (21)* $a(t), c(t) \in C^\infty[0, t_0]$, $a(t) = t^m a_0(t)$, $m \geq 2$, $a_0(t) > 0$ *при* $t \in [0, t_0]$, $b(t) = b = const$ *и* $d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)} > 0$. *Тогда существуют линейно независимые решения* $u_1(t)$ *и* $u_2(t)$ *этого уравнения, допускающие при* $t \to 0+$ *следующие асимптотические разложения*

$$u_1(t) = v_1(t, t_0)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\right)'\right) + s^2(t)O(1)\right), \tag{23}$$

$$u_2(t) = v_2(t, t_0)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\right)'\right) + s^2(t)O(1)\right), \tag{24}$$

где функции $h(t), s(t)$ *определены в (3), (4). При этом для всех* $n \geq 0$ *и* $b < 0$

$$\lim_{t\to 0+} u_1(t) = v_1(0, t_0) \neq 0, \quad \lim_{t\to 0+} u_2^{(n)}(t) = 0, \tag{25}$$

а для $n \geq 0$ *и* $b > 0$

$$\lim_{t\to 0+} u_1^{(n)}(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to 0+} u_2(t) = v_2(0, t_0) \neq 0. \tag{26}$$

Доказательство. Применяя лемму 2 к представлениям (22) получаем асимптотические разложения (23), (24).

Свойства функций $v_1(t, t_0)$, $v_2(t, t_0)$ подробно описаны в статье [1]), в которой установлено, что при $b < 0$ и $n \geq 0$ $\lim\limits_{t\to 0+} v_1(t, t_0) = v_1(0, t_0) > 0$, $\lim\limits_{t\to 0+} v_2^{(n)}(t, t_0) = 0$, а при $b > 0$ $\lim\limits_{t\to 0+} v_1^{(n)}(t, t_0) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 0+} v_2(t, t_0) = v_2(0, t_0) \neq 0$, откуда и следует (25), (26). Теорема доказана.

5. Первые асимптотики решений неоднородного уравнения. Для неоднородного дифференциального уравнения (1) с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью в работах [1, 2] установлено существование дважды непрерывно дифференцируемого решения $u_*(t)$ этого уравнения, которое может быть выражено через определяемые равенствами (5), (6) функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ следующим образом:

$$u_*(t) = A(t)\Phi(t) + B(t)\Psi(t), \tag{27}$$

где

$$A(t) = -\int_0^t \frac{\Psi(\xi)f(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}\exp\left(-\int_\xi^t \frac{b + d(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right)d\xi,$$

$$B(t) = -\int_t^{t_0} \frac{\Phi(\xi)f(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}\exp\left(\int_t^\xi \frac{b - d(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right)d\xi.$$

При этом для $b < 0$ $\lim_{t\to 0+} u_*(t) = 0$, а для $b > 0$ $\lim_{t\to 0+} u_*(t) = u_*(0) \neq 0$.

Полученные в (18), (19) асимптотики функций $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть относительно коэффициентов уравнения (1) выполнены условия теоремы 1. Тогда при* $b < 0$ *для любой функции* $f(t) \in C^\infty[0, t_0]$ *существует решение* $u_*(t) \in C^\infty[0, t_0]$ *этого неоднородного уравнения, которое в окрестности нуля является бесконечно малым и может быть записано в виде*

$$u_*(t) = A_0(t)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)' +$$

$$+B_0(t)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right) - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)' + s^2(t)O(1), \tag{28}$$

где

$$A_0(t) = -\int_0^t \left(1 - s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} - \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)\exp\left(\int_\xi^t \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} = o(1),$$

$$B_0(t) = -\int\limits_t^{t_0} \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right) \exp\left(\int\limits_\xi^t \frac{d_1(\tau)d\tau}{a(\tau)}\right) \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} = o(1),$$

$$d_1(t) = \frac{1}{2}(|b| + d(t)).$$

Если $b > 0$, то бесконечно малое в окрестности нуля решение $\tilde{u}_*(t) \in C^\infty[0, t_0]$ неоднородного уравнения (1) может быть записано в виде

$$\tilde{u}_*(t) = \tilde{A}_0(t)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)' +$$

$$+\tilde{B}_0(t)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right) - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)' + s^2(t)O(1), \tag{29}$$

где

$$\tilde{A}_0(t) = -\int\limits_0^t \left(1 - s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} - \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right) \exp\left(\int\limits_t^\xi \frac{d_1(\tau)d\tau}{a(\tau)}\right) \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} = o(1),$$

$$\tilde{B}_0(t) = -\int\limits_t^{t_0} \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right) \exp\left(\int\limits_\xi^t \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right) \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} = o(1),$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что функции $A_0(t), \tilde{A}_0(t), B_0(t), \tilde{B}_0(t)$ выражаются через заданные функции и их асимптотика может быть получена, возможно и с использованием леммы 1, стандартными методами. В соответствии с условием теоремы и формулами (28), (29) точность указанных асимптотик должна быть порядка t^{4m-2}. Условия гладкости могут быть снижены и определяются лишь методом построения асимптотик и их точностью.

Как уже отмечалось ранее, решение неоднородного уравнения (1) может быть записано в виде (27). При $b < 0$ преобразуем $A(t)$ и $B(t)$, используя полученные в лемме 2 асимптотики (18), (19). Будем иметь

$$A(t) = -\int\limits_0^t \frac{\Psi(\xi)f(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} \exp\left(\int\limits_\xi^t \frac{b - d(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right)d\xi =$$

$$\int\limits_0^t \left(-1 + s(\xi) - \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)' - s^2(\xi)O(1)\right) \exp\left(\int\limits_\xi^t \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right) \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} =$$

$$= A_0(t) + s^2(t)o(1), \tag{30}$$

$$B(t) = -\int\limits_t^{t_0} \frac{\Phi(\xi)f(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} \exp\left(\int\limits_t^\xi \frac{b - d(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right)d\xi =$$

$$-\int\limits_t^{t_0} \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)' + s^2(\xi)O(1)\right) \exp\left(\int\limits_\xi^t \frac{d_1(\tau)d\tau}{a(\tau)}\right) \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} =$$

$$= B_0(t) + s^2(t)O(1), \tag{31}$$

Подставляя представления (30), (31) в равенство (27), и вновь используя (18), (19), получим требуемую асимптотику (28).

При $b > 0$ введем для рассмотрения другое решение $\tilde{u}_*(t)$ неоднородного уравнения (1) так, чтобы $\tilde{u}_*(0) = 0$. Выберем его в виде

$$\tilde{u}_*(t) = u_*(t) - C(t_0)u_2(t), \tag{32}$$

где

$$C(t) = -\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}} \exp\left(-\int\limits_\xi^{t_0} \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi.$$

Поскольку

$$B(t)\Psi(t) = -\Psi(t)\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}\exp\left(\int\limits_t^\xi \frac{b-d(\tau)d\tau}{2a(\tau)}\right)d\xi =$$

$$= -v_2(t,t_0)\Psi(t)\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^\xi \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi =$$

$$= v_2(t,t_0)\Psi(t)\left(\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^\xi \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi - \int\limits_0^{t_0} \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^\xi \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi\right) =$$

$$= v_2(t,t_0)\Psi(t)\left(C(t_0)-C(t)\right) = u_2(t)\left(C(t_0)-C(t)\right),$$

то из последнего равенства и следует $\tilde{u}_*(t) = u_*(t) - C(t_0)u_2(t) = A(t)\Phi(t) - C(t)u_2(t)$, $\tilde{u}_*(0) = 0$.

Определяемое равенством (32) решение $\tilde{u}_*(t)$ запишем в виде

$$\tilde{u}_*(t) = A(t)\Phi(t) + B_*(t)\Psi(t), \tag{33}$$

где $B_*(t) = -v_2(t,t_0)C(t)$, и аналогично предыдущему случаю преобразуем $B_*(t)$, используя (18), (19). Будем иметь

$$B_*(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}}\exp\left(\int\limits_t^{t_0}\frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right)\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}}\exp\left(-\int\limits_\xi^{t_0}\frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)' + s^2(\xi)O(1)\right)\exp\left(\int\limits_t^\xi \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} =$$

$$= B_{*,0}(t) + s^2(t)o(1). \tag{34}$$

Подставляя (30), (34) в (33) и вновь применяя (18), (19), устанавливаем утверждение теоремы при $b > 0$. Теорема доказана.

6. Пример построения степенной асимптотики. Покажем на примере возможность получения степенной асимптотики. Пусть в уравнении (1)

$$a(t) = t^m,\ \ m \ge 2,\ \ b = const \ne 0,\ \ c = const,\ t_0 = 1,\ \ f(t) \in C^\infty[0,1], \tag{35}$$

и, таким образом, получим уравнение

$$(t^m u'(t))' + bu'(t) + cu(t) = f(t). \tag{36}$$

Учитывая конкретный вид (35) коэффициентов уравнения (36), произведем необходимые для получения асимптотик вычисления. Имеем

$$h(t) = \frac{1}{4d(t)}\left(a(t)\left(\frac{d'(t)}{d(t)}\right)^2 - 2\left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)}\right)'\right) = \frac{1}{d^5(t)}\left(c_{2m-2}t^{2m-2} + c_{3m-2}t^{3m-2}\right), \tag{37}$$

где

$$c_{2m-2} = m(2m-1)cb^2,\ \ c_{3m-2} = m(4-3m)c^2,\ \ d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)} = |b|\sqrt{1 - \frac{4ct^2}{b^2}}.$$

Воспользовавшись известной формулой

$$(1-x)^p = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}x^i + O(x^{n+1})$$

справедливой при $|x| < 1$, определим также

$$\frac{1}{\sqrt{d(t)}} = \frac{1}{\sqrt{|b|}}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{4c}{b^2}t^m + \frac{5}{32}\left(\frac{4c}{b^2}\right)^2 t^{2m} + \frac{5\cdot 9}{4^3\cdot 6}\left(\frac{4c}{b^2}\right)^3 t^{3m}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{|b|}}\left(\frac{5\cdot 9\cdot 13}{4^5\cdot 6}\left(\frac{4c}{b^2}\right)^4 t^{4m} + O\left(\left(\frac{4c}{b^2}\right)^5 t^{5m}\right)\right), \tag{38}$$

$$\frac{1}{d(t)} = \frac{1+d_{11}t^m}{|b|} + t^{2m}O(1),\ d_{11} = \frac{2c}{b^2},\quad \frac{1}{d^5(t)} = \frac{1+d_{51}t^m}{|b|^5} + t^{2m}O(1),\ d_{51} = \frac{10c}{b^2}. \tag{39}$$

Подставив (39) в (37), будем иметь

$$h(t) = \frac{1}{|b|^5}\left(1+d_{51}t^m\right)\left(c_{2m-2}t^{2m-2} + c_{3m-2}t^{3m-2}\right) + t^{4m-2}O(1) =$$

$$= h_1 t^{2m-2} + h_2 t^{3m-2} + t^{4m-2}O(1), \tag{40}$$

где

$$h_1 = \frac{m(2m-1)c}{|b|^3},\quad h_2 = \frac{m(4-3m)b^2c^2 + 10c}{|b|^7}$$

и, кроме того,

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)\,d\tau = s_1 t^{2m-1} + s_2 t^{3m-1} + t^{4m-2}O(1),\quad s_1 = \frac{h_1}{2m-1},\ \ s_2 = \frac{h_2}{3m-1}. \tag{41}$$

Используя вычисленные асимптотики (38)–(41) в полученных ранее разложениях (18), (19) и (23), (24), получим

$$\Phi(t) = 1 + s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} + s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3} + t^{4m-2}O(1),$$

$$\Psi(t) = 1 - s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} - s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3} + t^{4m-2}O(1),$$

$$u_1(t) = v_1(t,t_0)\Phi(t) =$$

$$= v_1(t,t_0)\left(1 + s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} + s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3} + t^{4m-2}O(1)\right), \tag{42}$$

$$u_2(t) = v_2(t,t_0)\Psi(t) =$$

$$= v_1(t,t_0)\left(1 - s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} - s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3} + t^{4m-2}O(1)\right). \tag{43}$$

Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 1, при $b < 0$ все производные в нуле функции $v_2(t,t_0)$ обращаются в нуль, поэтому нахождение степенной асимптотики имеет смысл лишь для $u_1(t)$, и если

$$v_1(t,t_0) = \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{v_1^{(j)}(0,t_0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1),$$

то из (42) выводим

$$u_1(t) = \left(1 + s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} + s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3}\right) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{v_1^{(j)}(0,t_0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1).$$

При $b > 0$ функция $v_1(t,t_0)$ неограниченна в нуле, поэтому нахождение степенной асимптотики имеет смысл лишь для $u_2(t)$, и если

$$v_2(t,t_0) = \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{v_2^{(j)}(0,t_0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1),$$

то из (43) следует

$$u_2(t) = \left(1 - s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} - s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3}\right) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{v_2^{(j)}(0,t_0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1).$$

Для построения степенной асимптотики решений $u_*(t)$ при $b < 0$ и $\tilde{u}_*(t)$ при $b > 0$ неоднородного уравнения (36) также можно в (28) и (29) воспользоваться формулами (37)–(41) и разложением

$$f(t) = \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1),$$

выполнить необходимые преобразования и результат проинтегрировать.

Список литературы

1. Архипов В. П. 2011. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференциальные уравнения, 47(10): 1383–1393.
2. Архипов В. П., Глушак А. В. 2016. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, № 20(241), 44: 5–22.
3. Глушко В. П. 1972. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж. 193.
4. Розов Н. Х., Сушко В. Г., Чудова Д. И. 1998. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Фундаментальная и прикладная математика, 4(3): 1063–1095.

References

1. Arkhipov V. P. 2011. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. Differential Equations, 47(10): 1383–1393. (in Russian)
2. Arhipov V. P., Glushak A. V. 2016. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of solutions. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics, № 20(241), 44: 5–22. (in Russian)
3. Glushko V. P. 1972. Linear Degenerating Differential Equations, Voronezh. 193. (in Russian)
4. Rosov N. Kh., Sushko V. G., Chudova D. I. 1998. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. Fundamental and applied mathematics, 4(3): 1063–1095. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.05.2023
Поступила после рецензирования 20.06.2023
Принята к публикации 24.06.2023

Received May 8, 2023
Revised June 20, 2023
Accepted June 24, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Oryel State University named after I. S. Turgenev, Oryel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia