Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 265–272.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 265–272.

УДК 517.956.35
MSC 35L77
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-265-272

Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера – Бернулли колебаний балки с упруго закрепленным концом

Рудаков И. А.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана; Московский авиационный институт,
Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1; Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
rudakov_ia@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача о периодических по времени решениях квазилинейного уравнения Эйлера – Бернулли колебаний балки, испытывающей растяжение вдоль горизонтальной оси. Граничные условия соответствуют случаям упруго закрепленного, жестко заделанного и шарнирно закрепленных концов. Нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности. С использованием принцип Шаудера доказывается теорема о существовании и единственности периодического решения.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение Эйлера – Бернулли, колебание балки, нерезонансность, принцип Шаудера

Для цитирования: Рудаков И. А. 2023. Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера – Бернулли колебаний балки с упруго закрепленным концом. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 265–272.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-265-272

Original Research

Periodic Solutions of the Euler – Bernoulli Quasilinear Equation Vibrations of a Beam with an Elastically Fixed End

Igor A. Rudakov

(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasiliev)*

Moscow State Technical University. H. E. Bauman; Moscow Aviation Institute,
5, building 1, 2-ya Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia; 4 Volokolamsk highway, Moscow, 125993, Russia
rudakov_ia@mail.ru

Abstract. The problem of time-periodic solutions of the quasilinear Euler-Bernoulli equation of vibrations of a beam under tension along the horizontal axis is considered. The boundary conditions correspond to the cases of elastically fixed, rigidly fixed and hinged ends. The nonlinear term satisfies the nonresonance condition at infinity. Using the Schauder principle, we prove a theorem on the existence and uniqueness of a periodic solution.

Keywords: Quasilinear Euler-Bernoulli Equation, Beam Oscillation, Non-Resonance, Schauder Principle

For citation: Rudakov I. A. 2023. Periodic Solutions of the Euler – Bernoulli Quasilinear Equation Vibrations of a Beam with an Elastically Fixed End. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 265–272. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-265-272

1. Введение. В работе рассмотрена задача о периодических решениях следующего квазилинейного уравнения

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x,t,u) + f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}; \tag{1}$$

$$u(x,t+T) = u(x,t); \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Предполагается выполнение одного из следующих граничных условий:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) + hu_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) + hu_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Константы a, h и период времени T удовлетворяют следующим условиям

$$a > 0, h > 0, \ T = 2\pi\frac{b}{c}, b, c \in \mathbf{N}, (b,c) = 1; \tag{5}$$

Уравнение Эйлера – Бернулли (1) является математической моделью, описывающей колебания двутавровых балок [1, с. 440], балок, на которые действует сила растяжения вдоль горизонтальной оси, а также проводов. В случае $a = 0$, то есть при отсутствии растяжения или сжатия вдоль горизонтальной оси, задача о периодических решениях для уравнения Эйлера – Бернулли рассмотрена в достаточно большом количестве работ (например, [9]-[3]). В [13]-[5] исследовалась задача о периодических решениях уравнения (1) при $a > 0$, (при наличии растяжения вдоль горизонтальной оси) для различных граничных условий. Случай шарнирно опертых концов изучался в работах [13, 4]. В статье [12] рассмотрен случай жестко заделанных концов. В случае граничных условий (4) (соответствующие шарнирно опертому левому концу и упруго закрепленному правому) в работе [5] доказано существование счетного числа периодических решений, если нелинейное слагаемое имеет степенной рост и $f \equiv 0$.

Целью данной работы является доказательство теоремы о существовании и единственности периодического решения при выполнении одного из граничных условий (3), (4), соответствующих жестко заделанному, шарнирно закрепленному и упруго закрепленному концам.

Будем говорить, что выполнено условие (A), если при рассмотрении граничных условий (3) выполнено неравенство

$$b\left(a + \frac{1}{8} + \frac{2h}{\pi}\right) \notin \mathbf{N}, \tag{6}$$

а при выполнении граничных условий (4) выполнено неравенство

$$b\left(\frac{1}{2}a + \frac{h}{\pi}\right) \notin \mathbf{N}. \tag{7}$$

2. Асимптотика собственных значений задачи Штурма – Лиувилля. С краевыми задачами (1),(2),(3); (1),(2),(4) связаны следующие задачи на собственные функции и собственные значения:

$$X'''' - aX'' = \lambda X, \quad 0 < x < \pi; \tag{8}$$

$$X(0) = X'(0) = 0, \;\; X(\pi) = X''(\pi) + hX'(\pi) = 0; \tag{9}$$

$$X(0) = X''(0) = 0, \;\; X(\pi) = X''(\pi) + hX'(\pi) = 0. \tag{10}$$

Исследуем задачу (8),(9). Стандартно [12] доказывается, что собственные значения λ задачи (8),(9) являются положительными. В случае, когда $\lambda > 0$, корнями характеристического многочлена уравнения (8) являются числа $\pm pi, \pm q$, где

$$p = \sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} - a/2}, \;\; q = \sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} + a/2}. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (8) можно представить в следующем виде

$$X = C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px) + C_3 \operatorname{ch}(qx) + C_4 \operatorname{sh}(qx). \tag{12}$$

Подставив (12) в граничные условия (9), получим однородную систему линейных уравнений относительно C_1, C_2, C_3, C_4. Стандартно, приравняв определитель этой системы к нулю, получим уравнение для собственных значений задачи (8),(9):

$$(p^2 + q^2)\operatorname{ch}(q\pi) \cdot \sin(p\pi) + h \cdot \frac{p}{q}\operatorname{sh}(q\pi) \cdot \sin(p\pi) + 2ph -$$

$$-2ph \operatorname{ch}(q\pi) \cdot \cos(p\pi) - \frac{p}{q}(p^2 + q^2)\operatorname{sh}(q\pi) \cdot \cos(p\pi) = 0. \tag{13}$$

При исследовании данного уравнения применим теорему о нулях функции, имеющей данное асимптотическое представление [2, с. 217]. Для этого перепишем уравнение (13) следующим образом:

$$F(p) \equiv \sin\left(p\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{p}\frac{h}{\sqrt{2}}\cos(p\pi) + \frac{ph}{\sqrt{2}\,q(p^2 + q^2)}\operatorname{th}(p\pi) \cdot \sin(p\pi) +$$

$$+\sqrt{2}\cos(p\pi)\frac{p}{2q}\left(\frac{q}{p} - \operatorname{th}(q\pi)\right) + \frac{\sqrt{2}ah\cos(p\pi)}{2p(p^2 + q^2)} = 0.$$

Если обозначить $F_0(p) = \sin\left(p\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, $F_1(p) = -\frac{h}{\sqrt{2}}\cos(p\pi)$, то данное уравнение примет следующий вид:

$$F_0(p) + \frac{1}{p}F_1(p) + O\left(\frac{1}{p^2}\right) = 0. \tag{14}$$

Легко видеть, что функции $F_1(p), F_1'(p), F_0''(p), F''(p)$ являются ограниченными, а также что имеет место неравенство $|F_0(p)| + |F_0'(p)| \geq \pi$.

Таким образом, условия теоремы о нулях функции [2, с. 217] выполнены. Из этой теоремы вытекает существование натурального числа n_1, такого, что при $n \geq n_1$ все корни p_n уравнения (14) находятся по одному на промежутках $(n+1/4, n+1)$. Кроме того, из формулы (78) [2, с. 218] выведем следующее асимптотическое представление

$$p_n = n + \frac{1}{4} - \frac{-h\cos(\pi(n+1/4))}{\sqrt{2}(n+1/4)\cos(\pi n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = n + \frac{1}{4} + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из (11) следует, что этим значениям p_n соответствуют следующие собственные значения задачи (8),(9):

$$\lambda_n' = \left(n + \frac{1}{4} + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^4 + a\left(n + \frac{1}{4} + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2.$$

Пусть на промежутке $(0, n_1]$ задача (8), (9) имеет $n_2 \in \mathbf{Z}_+ \equiv \mathbf{N} \cup \{0\}$ собственных значений (на каждом конечном промежутке задача (8), (9) имеет конечное число собственных значений [11, с. 78]). Обозначим $\{\lambda_{1,n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ множество собственных значений задачи (8)-(9), перенумерованное в порядке возрастания. Тогда при $n \geq n_2 + 1$ имеет место формула

$$\lambda_{1,n} = \left(n + \frac{1}{4} + m_0 + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^4 + a\left(n + \frac{1}{4} + m_0 + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2.$$

Здесь $m_0 = n_1 - n_2 - 1$. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}} - n - m_0 - \frac{1}{4}\right)n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\lambda_{1,n}} - \left(n + m_0 + \frac{1}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{1,n} - (n+m_0+1/4)^4}{n^2}\cdot\frac{n^2}{\sqrt{\lambda_{1,n}} + (n+m_0+1/4)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{1,n} - (n+m_0+1/4)^4}{n^2} = \frac{1}{4}a + \lim_{n\to\infty}\frac{(n+m_0+1/4)^3\left(\frac{h}{2\pi}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{4}a + \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{h}{2\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi}.$$

Данное соотношение позволяет получить более удобное для дальнейших вычислений выражение собственных значений:

$$\lambda_{1,n} = \left(n + m_0 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4. \tag{15}$$

Заметим, что из общей формулы (7.2) (для дифференциального оператора четного порядка с переменными коэффициентами) работы [11] вытекает следующее представление для собственных значений задачи (8),(9):

$$\lambda_{1,n} = \left(n + m_0 + \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4.$$

Таким образом, в (15) получен первый член асимптотики для слагаемого $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Каждому собственному значению λ_n соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция

$$X_{1,n}(x) = A_n\left(\frac{p_{\overline{n}}}{q_{\overline{n}}}(\mathrm{sh}(q_{\overline{n}}(x-\pi))) + \mathrm{sh}(q_{\overline{n}}\pi)\cos(p_{\overline{n}}x) - \mathrm{sh}(q_{\overline{n}}x)\cos(p_{\overline{n}}\pi) + \sin(p_{\overline{n}}(x-\pi))\right) +$$

$$+ \mathrm{ch}(q_{\overline{n}}x)\sin(p_{\overline{n}}\pi) - \mathrm{ch}(q_{\overline{n}}\pi)\sin(p_{\overline{n}}x). \tag{16}$$

Здесь $\overline{n} = n + m_0$. Множители A_n удовлетворяют условию нормировки:

$$\int_0^\pi X_{1,n}^2 dx = 1.$$

Семейство функций $\{X_{1,n}\}$ образует полную и ортонормированную в гильбертовом пространстве $L_2[0,\pi]$ систему функций.

Для множества $\{\lambda_{2,n}\}_{n\in\mathrm{N}}$ собственных значений задачи (8),(10) в [5] получена следующая асимптотическая формула

$$\lambda_{2,n} = \left(n + m_1 + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4. \tag{17}$$

Здесь $m_1 \in \mathbf{Z}$. Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид

$$X_{2,n} = B_n\left(\sin(\overline{p}_n x) - \sin(\overline{p}_n\pi)\frac{sh(\overline{q}_n x)}{sh(\overline{q}_n\pi)}\right). \tag{18}$$

Здесь $\overline{p}_n = \overline{n} + \tau_{\overline{n}}$, $\overline{q}_n = \sqrt{\overline{p}_n^2 + a}$, $\overline{n} = n + m_1$, $\tau_n = \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Если множители B_n выбрать, исходя из условия нормировки $||X_{2,n}||_{L_2(\Omega)} = 1$, то будет иметь представление

$$B_n = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{-1}. \tag{19}$$

Из формул (16), (18), (19) вытекает существование констант D_1, D_2, таких, что

$$|X_{i,n}(x)| \le D_i,\ \ |X'_{i,n}(x)| \le D_i n,\ \ |X''_{i,n}(x)| \le D_i n^2\ \ \forall x \in [0,\pi], \forall n \in \mathbf{N}. \tag{19}$$

Здесь $i = 1, 2$.

3. Периодическое решение квазилинейного уравнения. Обозначим $\Omega = [0,\pi]\times\mathbf{R}/(T\mathbf{Z})$, $(u,v) = \int_\Omega u(x,t)v(x,t)dxdt$, если $u, v \in L_2(\Omega)$, $||u|| = ||u||_{L_2(\Omega)}$, $H_1(\Omega) = W_2^1(\Omega), H_2(\Omega) = W_2^2(\Omega)$ пространства Соболева,

$$W_1 = \{v \in C^\infty(\Omega)|\ v(0,t) = v_x(0,t) = v(\pi,t) = v_{xx}(\pi,t) + hv_x(\pi,t) = 0\ \forall t\},$$

$$W_2 = \{v \in C^\infty(\Omega)|\ v(0,t) = v_{xx}(0,t) = v(\pi,t) = v_{xx}(\pi,t) + hv_x(\pi,t) = 0\ \forall t\}.$$

Определим линейные операторы $L_i : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega), i = 1, 2$ такие, что

$$L_i u = u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx}\ \ \forall u \in W_i$$

и область определения $D(L_i)$ состоит из таких функций $v \in L_2(\Omega)$, для которых существует $h \in L_2(\Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega v(u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx})dxdt = \int_\Omega hudxdt$$

для любой функции $u \in W_i$ и при этом $L_i v = h$.

Операторы L_i – самосопряженные, спектр которых является дискретным и совпадает с множеством собственных значений

$$\sigma(L_i) = \{\eta_{i,nk} \equiv \lambda_{i,n} - \frac{c^2}{b^2}k^2\ |n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}_+\}.$$

Множества функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{T}}X_{i,n}\cos(\frac{c}{b}kt),\ \sqrt{\frac{2}{T}}X_{i,n}\sin(\frac{c}{b}t),\ \frac{1}{\sqrt{T}}X_{i,n}:\ n,k \in \mathbf{N}\right\} \tag{20}$$

составляют полные, ортонормированные в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций операторов L_i, $i = 1, 2$.

Будем предполагать, что нелинейное слагаемое $g(x,t,u)$ непрерывно по всем переменным и удовлетворяет следующему условию.

Для каждых из задач (1),(2),(3); (1),(2),(4) соответственно существуют константы $\alpha_i, \beta_i (i = 1,2), u_0 > 0$, такие, что $\alpha_i < \beta_i$ и

$$\frac{g(x,t,u)}{u} \in [\alpha_i, \beta_i]\ \text{ при } |u| \ge u_0, \forall (x,t) \in \Omega. \tag{21}$$

Определение. Обобщенным решением задач (1), (2), (3); (1), (2), (4) соответственно называется функция $u \in H_1(\Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega u(v_{tt} + v_{xxxx} - av_{xx})dxdt = \int_\Omega (g(x,t,u) + f(x,t))vdxdt\ \forall v \in W_i, i = 1, 2.$$

Теорема. *Предположим* $g \in C^1(\Omega\times\mathbf{R})$, *выполнены условия (5), (A), (21) и*

$$[\alpha_i, \beta_i] \cap \sigma(L_i) = \emptyset,\ \ i = 1, 2. \tag{22}$$

Тогда для любой функции $f \in H_1(\Omega)$ задачи (1), (2), (3); (1), (2), (4) имеют обобщенное решение

$$u_i \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega) \tag{23},$$

такое, что $(u_i)_{xx} \in C(\Omega)$. Если дополнительно выполнено условие

$$g'_u(x,t,u) \in [\alpha_i, \beta_i] \ \forall u, \ \forall (x,t) \in \Omega, \tag{24}$$

то это решение единственное.

Доказательство теоремы разобьем на следующие шаги:
1) Исследование операторов L_i и их резольвенты;
2) Доказательство существования обобщенного решения;
3) Обоснование гладкости решения;
4) Доказательство утверждения о единственности.

Шаг 1). Покажем, что оператор L_1 имеет конечномерное ядро (Конечномерность ядра оператора L_2 при выполнении условия (7) доказана в работе [5]). Для этого достаточно доказать, что равенство

$$\eta_{1,nk} = 0 \tag{25}$$

может выполняться не более, чем для конечного числа пар $(n,k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}_+$.

Из равенства (15) следует, что

$$\eta_{1,nk} = \frac{1}{b^2} F_{nk} \left(b \left(n + m_0 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi} \right) \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 + ck \right),$$

где $F_{nk} = b\left(n + m_0 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi}\right) \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 - ck$. Поскольку

$$F_{nk} = \frac{1}{2} \left(b(n+m_0)(2n+2m_0+1) - 2ck + b\left(\frac{1}{8} + a + \frac{2h}{\pi}\right) + o(1) \right),$$

то из условия (6) вытекает существование натурального числа n_3, такого, что при $n \geq n_3$ выполняется неравенство

$$|F_{nk}| \geq \gamma_0 > 0. \tag{26}$$

Здесь $\gamma_0 = \frac{1}{4} \min_{m \in \mathrm{Z}} |b\left(\frac{1}{8} + a + \frac{2h}{\pi}\right) - m|$. Следовательно, при $n \geq n_3$ равенство (25) не выполняется. Поэтому $\dim \ker L_1 < \infty$.

Из (26) вытекает существование положительной константы γ_1, такой, что

$$\eta_{1,nk} \geq \gamma_1(n^2+k) \ \text{при} \ \eta_{1,nk} \neq 0. \tag{27}$$

Из неравенства (30) работы (9) также вытекает существование константы $\gamma_2 > 0$, такой, что

$$\eta_{2,nk} \geq \gamma_2(n^2+k) \ \text{при} \ \eta_{2,nk} \neq 0. \tag{28}$$

Докажем, что при $\mu \notin \sigma(L_i)$ операторы $(L_i - \mu I)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ являются вполне непрерывными. Для этого достаточно проверить сходимость следующего ряда

$$I_i = \sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\eta_{i,nk} - \mu)^2}.$$

Из неравенств (27), (28) вытекает существование положительной константы C_1, такой, что $\left(1 - \frac{\mu}{\eta_{1,nk}}\right)^2 \geq C_1 > 0$ при $n \geq n_1$. Отсюда следует неравенство

$$I_i \leq \frac{1}{C_1} \sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta_{i,nk}^2}.$$

Сходимость ряда $\sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta_{i,nk}^2}$ при $i = 2$ доказана в [5]. При $i = 1$ доказательство аналогично. Таким образом ряд I_i сходится и операторы $(L_i - \mu I)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ вполне непрерывны.

Шаг 2) Рассмотрим операторные уравнения

$$L_i u = g(x,t,u) + f, \quad u \in D(L_i), i = 1,2. \tag{29}$$

Решения уравнения (29), принадлежащие $H_1(\Omega)$, являются обобщенными решениями задач (1),(2),(3); (1), (2), (4) соответственно. Если обозначить $F_i(u) = (L_i - \alpha_i I)^{-1}(g(x,t,u) - \alpha_i u + f(x,t))$, то (29) будет эквивалентно следующим уравнениям

$$u = F_i(u). \tag{30}$$

Таким образом, доказательство существования решений уравнений (29) сведено к доказательству существования неподвижной точки у операторов F_i. Из доказанного выше в шаге 1) следует, что операторы $F_i : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ являются вполне непрерывными. Чтобы показать существование неподвижных точек у операторов F_i, воспользуемся следствием из теоремы Шаудера о неподвижной точке [6, с. 416]. Для этого докажем, что найдутся $R_i > 0, i = 1,2$ такие, что

$$F_i(u) \neq \lambda u \ \forall \lambda > 1 \ \forall u \in S_{R_i} \equiv \{u \in L_2(\Omega) |\ ||u|| = R_i\}. \tag{31}$$

Предположим противное, то есть для произвольного числа $R > 0$ найдутся числа $\lambda_i > 1, i = 1,2$ и $u_i \in S_R$, такие, что

$$F_i(u_i) = \lambda_i u_i. \tag{32}$$

Обозначим $v_i = (L_i - \alpha_i I)^{-1} f$. Из условия (22) вытекает существование чисел $\mu_{i,1}, \mu_{i,2} \in \sigma(L_i)(i = 1,2)$, таких, что

$$[\alpha_i, \beta_i] \subset [\mu_{i,1}, \mu_{i,2}]; \ (\mu_{i,1}, \mu_{i,2}) \cap \sigma(L_i) = \emptyset. \tag{33}$$

Из равенства (32) вытекает следующее соотношение:

$$g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i = \lambda_i (L_i - \alpha_i I)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v). \tag{34}$$

Умножив равенство (34) на $(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i)$ скалярно в $L_2(\Omega)$, из (21),(22), (33) выведем

$$(g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i) = -\lambda_i (L_i - \alpha_i I)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_i}{\mu_{i,2} - \alpha_i} ||(\alpha_i I - L_i)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i)||^2 = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i} ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i||^2. \tag{35}$$

Из условия (21) вытекает существование положительных констант $C_{i,1}, C_{i,2}, i = 1,2$, таких, что

$$|g(x,t,u) - \alpha_i u| \leq (\beta_i - \alpha_i)|u| + C_{i,1}, \ (g(x,t,u) - \alpha_i u)u \geq -C_{i,2} \ \ \forall (x,t,u) \in \Omega \times \mathbf{R}.$$

Отсюда и (35) следует

$$\frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i} ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i||^2 \geq (g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i, u_i) - \frac{1}{\lambda_i}(g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i, v_i) \geq$$

$$\geq \int_\Omega |g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i| \cdot |u_i| dxdt - ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| \cdot ||v_i|| - 2|\Omega| C_{i,2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} \int_\Omega (g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i)^2 dxdt - \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} C_{i,1} \int_\Omega |g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i| dxdt -$$

$$- ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| \cdot ||v_i|| - 2|\Omega| C_2 \geq \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i||^2 - C_3 ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| - C_4.$$

Здесь и далее $C_3, C_4, C_5, ...$ есть положительные константы. Из данного неравенства выведем

$$\left(\frac{1}{\beta_i - \alpha_i} - \frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i}\right) ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i||^2 - C_3 ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| - C_4 \leq 0.$$

Отсюда и из (33) вытекает существование константы C_5, такой, что $||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| \leq C_5$. Тогда из равенства (34) получим оценки $||(L_i - \alpha_i I)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i)|| \leq C_5, \ \ ||u_i|| \leq C_6$. Следовательно, если $R > C_6$, уравнение (32) решений не имеет, что противоречит предположению. Условия теоремы Шаудера выполнены. Из нее вытекает существование решений $u_i, i = 1,2$ операторных уравнений (29).

Шаг 3) Представим решения u_i в виде суммы $u_i = u_{i,1} + u_{i,2}$, где $u_{i,1} \in R(L_i), u_{i,2} \in \ker L_i$. Обозначим $w_i = g(x,t,u_i) + f \in R(L_i)$. Из уравнений (29) выразим

$$u_{i,1} = L_i^{-1} w_i. \tag{36}$$

Если разложить функции $w_i, \ i = 1,2$ в ряд Фурье по системе (20)

$$w_i = \sum_{\eta_{i,nk} \neq 0} X_{i,n}(x)(a_{i,nk} \cos(\frac{c}{b}kt) + b_{i,nk} \sin(\frac{c}{b}kt)),$$

то для $u_{i,1}$ будем иметь следующее представление в виде ряда Фурье:

$$u_{i,1} = \sum_{\eta_{i,nk}\neq 0} \frac{1}{\eta_{i,nk}} X_{i,n}(x)(a_{i,nk}\cos(\frac{c}{b}kt) + b_{i,nk}\sin(\frac{c}{b}kt)). \qquad (37)$$

Из ограниченности последовательности $\{\frac{k}{\eta_{i,nk}}\}$ следует включение $(u_{i,1})_t \in L_2(\Omega)$. Используя неравенства (19), (27) методом из леммы 1.2 работы [4] доказывается сходимость ряда

$$\sum_{\eta_{i,nk}\neq 0} \frac{n}{|\eta_{i,nk}|}(|a_{i,nk}| + |b_{i,nk}|.$$

Отсюда будем иметь $(u_{i,1})_x \in C(\Omega)$. $u_{i,1} \in H_1(\Omega)$. Поскольку $\dim\ker L_i < \infty$, то $u_i \in H_1(\Omega)$. Тогда из условия теоремы получим включение $w_i \in H^1(\Omega)$, из которого вытекает сходимость ряда

$$\sum_{\eta_{i,nk}\neq 0} k^2(a^2_{i,nk} + b^2_{i,nk}). \qquad (38)$$

Из сходимости ряда (38) и ограниченности последовательности $\{\frac{k}{\eta_{i,nk}}\}$ следуют включения $(u_{i,1})_{tt} \in L_2(\Omega)$, $(u_{i,1})_{tx} = (L_i^{-1}(w_i)_t)_x \in C(\Omega)$.

Из оценок (27) и из сходимости ряда I_1 в работе [4, с. 695] вытекает сходимость ряда

$$\sum_{\eta_{i,nk}\neq 0} \frac{n^2}{|\eta_{i,nk}|}(a^2_{i,nk} + b^2_{i,nk}).$$

Отсюда, (19) и из конечномерности ядра операторов L_i, получим включения $(u_{i,1})_{xx} \in C(\Omega)$, $u_{xx} \in C(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$.

Шаг 4) Пусть функция g удовлетворяет условию (24). Предположим, задачи (1),(2),(3); (1),(2),(4) имеют решения u_i, h_i. Если вычесть соответствующие равенства, то получим соотношение

$$(\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i) + p(x,t,u_i) - p(x,t,h_i) = 0.$$

Здесь $p_i(x,t,u) = g(x,t,u) - \alpha_i u$. Из условия (24) следует неравенство

$$(p(x,t,u) - p(x,t,v))(u - v) \geq \frac{1}{\beta_i - \alpha_i}(p(x,t,u) - p(x,t,v))^2. \qquad (39)$$

Умножив (39) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u_i - h_i$, получим следующие оценки:

$$0 = ((\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i), u_i - h_i) + (p(x,t,u_i) - p(x,t,h_i), u_i - h_i) \geq$$

$$\geq -\frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i}||(\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i)||^2 + \frac{1}{\beta_i - \alpha_i}||p(x,t,u_i) - p(x,t,h_i)||^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\beta_i - \alpha_i} - \frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i}\right)||(\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i)||^2.$$

Поэтому $(\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i) = 0$. Поскольку $\alpha_i \notin \sigma(L_i)$, то отсюда следует $u_i - h_i = 0$. Теорема доказана.

4. Заключение. Рассмотрено квазилинейное уравнение Эйлера-Бернулли колебаний балки и проводов, подверженных растяжению вдоль горизонтальной оси. Граничные условия соответствуют случаям упруго закрепленного, жестко заделанного и шарнирно опертого концов. Выведена асимптотическая формула для собственных значений соответствующей задачи Штурма – Лиувилля для случая жестко заделанного и упруго закрепленного концов. Доказана теорема о существовании и единственности периодического решения при произвольной периодической правой части, если нелинейное слагаемое удовлетворяет условию отсутствия резонанса на бесконечности.

Список литературы

1. Коллатц Л. 1968. Задачи на собственные значения. М., Наука, 504.
2. Наймарк М. А. 2010. Линейные дифференциальные операторы. М., Наука, 527.
3. Рудаков И. А. 2015. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки. Известия РАН. Серия математическая, 79(5): 215-238. Doi: 10.4213/im8250.
4. Рудаков И. А. 2018. О периодических решениях одного уравнения колебаний балки. Дифференциальные уравнения, 54: 691–700. DOI: 10.1134/S0374064118050126.

5. Рудаков И. А. 2022. О существовании счётного числа периодических решений краевой задачи для уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями. Дифференциальные уравнения, 58: 1062–1072. DOI: 10.31857/S0374064122080064, EDN: CFUKPN.
6. Треногин В. А. 1980. Функциональный анализ. М., Наука, 495.
7. Трикоми Ф. 1962. Дифференциальные уравнения. М., Издательство иностранной литературы, 350.
8. Chen B., Gao Y., Li Y. 2018. Periodic solutions to nonlinear Euler – Bernoulli beam equations. Dynamical systems, 1: 23–49.
9. Elishakoff I., Pentaras D. 2006. Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams. J. Sound Vibration, 298: 439–445.
10. Eliasson L. H., Grebert B., Kuksin S. B. 2016. KAM for the nonlinear beam equation. Geometric and Functional Analysis, 26(6): 1588–1715.
11. Nazarov A. I., Nikitin Y. Y. 2004. Exact L2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. Probability Theory and Related Fields, 129(4): 469–494.
12. Rudakov I. A., Ji S. 2023. Infinitely many periodic solutions for the quasi-linear Euler -– Bernoulli beam equation with fixed ends. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 62:66. DOI: 10.1007/s00526-022-02404-3.
13. Yamaguchi M. 1995. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications. Funkcialaj Ekvacioj, 38: 519–538.

References

1. Collatz L. 1968. Eigenvalue problems. M., Nauka, 504. (in Russian)
2. Naimark M. A. 2010. Linear differential operators. M., Nauka, 527. (in Russian)
3. Rudakov I. A. 2015. Periodic solutions of the quasilinear equation of forced vibrations of a beam. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mathematical Series, 79(5): 215-238. Doi: 10.4213/im8250. (in Russian)
4. Rudakov I. A. 2018. On periodic solutions of one equation of beam vibrations. Differential Equations, 54: 691–700. DOI: 10.1134/S0374064118050126. (in Russian)
5. Rudakov I. A. 2022. On the existence of a countable number of periodic solutions to a boundary value problem for the beam vibration equation with homogeneous boundary conditions. Differential Equations, 58: 1062–1072. DOI: 10.31857/S0374064122080064, EDN: CFUKPN. (in Russian)
6. Trenogin V. A. 1980. Functional analysis. M., Nauka, 495. (in Russian)
7. Tricomi F. 1962. Differential Equations. M., Publishing house of foreign literature, 350. (in Russian)
8. Chen B., Gao Y., Li Y. 2018. Periodic solutions to nonlinear Euler – Bernoulli beam equations. Dynamical systems, 1: 23–49.
9. Elishakoff I., Pentaras D. 2006. Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams. J. Sound Vibration, 298: 439–445.
10. Eliasson L. H., Grebert B., Kuksin S. B. 2016. KAM for the nonlinear beam equation. Geometric and Functional Analysis, 26(6): 1588–1715.
11. Nazarov A. I., Nikitin Y. Y. 2004. Exact L2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. Probability Theory and Related Fields, 129(4): 469–494.
12. Rudakov I. A., Ji S. 2023. Infinitely many periodic solutions for the quasi-linear Euler -– Bernoulli beam equation with fixed ends. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 62:66. DOI: 10.1007/s00526-022-02404-3.
13. Yamaguchi M. 1995. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications. Funkcialaj Ekvacioj, 38: 519–538.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.06.2023
Поступила после рецензирования 11.08.2023
Принята к публикации 17.08.2023

Received June 29, 2023
Revised August 10, 2023
Accepted August 14, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Рудаков Игорь Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана; Московский авиационный институт, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Igor A. Rudakov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State Technical University. H. E. Bauman; Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia