

Двусторонние оценки решений с обострением режима нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичным источником

¹ [Вирченко Ю. П.](#) , ² [Ченцова В. В.](#) 

¹ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46
virch@bsu.edu.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
chentsova@bsu.edu.ru



Аннотация. Изучаются решения $u(x, t) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ с компактным носителем одномерного нелинейного уравнения теплопроводности с вырождающимися при $u(x, t) = 0$: линейным по u транспортным коэффициентом и самосогласованным источником $\alpha u + \beta u^2$ общего вида. Устанавливаются двусторонние оценки времени обострения для решений с компактным носителем, функционально зависящие от начальных условий $u(x, 0)$.

Ключевые слова: аппроксимация решений, компактный носитель, нелинейное уравнение теплопроводности, обострение режима, эталонное решение

Для цитирования: Вирченко Ю. П., Ченцова В. В. 2023. Двусторонние оценки решений с обострением режима нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичным источником. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 273–284. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-273-284

Original Research

Bilateral Estimates of Solutions with Blow up Regime of the Nonlinear Heat Equation with a Quadratic Source

¹ [Yuri P. Virchenko](#) , ² [Victoria V. Chentsova](#) 

¹ Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
46 Kostyukova st., Belgorod, 308012, Russia
virch@bsu.edu.ru

² Belgorod National Research University,
85, Pobeda st., Belgorod, 308015, Russia
chentsova@bsu.edu.ru

Abstract. Solutions $u(x, t) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ with compact support of one-dimensional quasilinear heat transfer equation degenerated at $u(x, t) = 0$ is studied. The equation has the linear on u transport coefficient and self-consistent source $\alpha u + \beta u^2$ of general type. Bulateral estimates of the blow-up time for solutions with a compact support are established, functionally depended on the initial conditions $u(x, 0)$.

Keywords: Approximation of Solutions, Compact Support, Nonlinear Equation of Heat Transfer, Blow-up Regime, Etalon Solution

For citation: Virchenko Yu. P., Chentsova V. V. 2023. Bilateral Estimates of Solutions with Blow up Regime of the Nonlinear Heat Equation with a Quadratic Source. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 273–284. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-273-284

1. Введение. Квазилинейное параболическое уравнение общего вида

$$\dot{u} = (k(u)u_x)_x + f(u_x, u), \quad (1)$$

относительно функций $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, в котором $u_x \equiv \partial u / \partial x$, $\dot{u} \equiv \partial u / \partial t$ с транспортным коэффициентом $k(u) \geq 0$ и измеримой функцией $f(u_x, u)$ от текущих значений $u(x, t)$, $u_x(x, t)$ является основой для различных моделей, исследуемых в математической физике (см., например, [1]). При этом, как правило, интересуются неотрицательными решениями $u(x, t) \geq 0$ этого уравнения, удовлетворяющими нулевым краевым условиям. Особым случаем такого уравнения является такой, у которого $k(0) = 0$. В этом случае возможно возникновение решений со слабым разрывом, у которого с одной стороны от разрыва решение $u(x, t) = 0$ [1]. Это явление было предсказано в [2] и, в дальнейшем, исследовалось в различных работах

(см., например, [3]), в частности, изучались условия остановки фронта [4]. Если функция $f(u_x, u)$ в уравнении представима в виде $f(u_x, u) = (F(u))_x + g(u)$, где $F(u)$ дифференцируема по u , а функция $g(u)$ измерима. Если $F(u)$ отлична от линейной и стремится к бесконечности при $u \rightarrow \infty$, то, как известно, такое уравнение уже не имеет глобальных решений по причине образования за конечное время разрывов у решения $u(x, t)$. Слабые же решения задачи Коши при этом уже не определяются единственным образом. Слагаемое $(F(u))_x$ в этом случае описывает явление переноса. Для обеспечения единственности вводится понятие об энтропийном решении [5]. Изучению таких решений посвящено уже значительное число работ (см., например, [6] – [9]). В зависимости от свойств функции $g(u)$, решения уравнения (1) могут иметь различное качественное поведение [1]. Особый интерес представляет исследование решений $u(x, t)$ уравнения (1) при $f(u_x, u) = (F(u))_x + g(u)$ с $g(u) > 0$. В этом случае его решения могут переходить в т. н. режим с обострением. Такие решения $u(x, t)$ существуют только лишь на конечном интервале времени $t \in [0, t_*)$ так, что $u(x, t) \rightarrow \infty$ в какой-то точке $x \in \mathbb{R}$ при $t \rightarrow t_*$, где t_* называется временем обострения. Такой режим реализуется при определенном асимптотическом поведении этой функции $g(u) \sim u^\gamma$, $\gamma > 1$. Основное направление таких работ связано с изучением условий, при которых режим с обострением возникает, и определением глобальных характеристик соответствующих решений. Мы будем, далее, интересоваться частным случаем уравнения (1), у которого $F \equiv 0$. Функцию $g(u)$ в этом случае мы будем называть самосогласованным источником. Изучение режимов с обострением для такого уравнения имеет давнюю историю [10] – [16]. Их исследование суммировано в монографии [17]. Из более поздних достижений в исследовании режимов с обострением отметим работы [18], [19], где изучались: определение критического показателя нелинейности, вызывающей обострение, оценки времени обострения и размера компактной области, в которой такое обострение происходит.

В настоящей работе рассматривается вырождающееся уравнение (1) с $F \equiv 0$, в котором учитываются слагаемые не более чем квадратичные по функции u , а именно

$$\dot{u} = (uu_x)_x + \alpha u + \beta u^2, \quad (2)$$

в котором $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Мы будем изучать решения на компактном носителе $[c_-, c_+] \subset \mathbb{R}$. Они обладают обострением режима при $\beta > 0$, а также «исчезают» за конечное время при $\beta < 0$. Мы предлагаем, по нашему мнению, альтернативный метод двустороннего оценивания времени обострения, впервые использованный одним из авторов в работах [20], [21] без его достаточного математического обоснования. Здесь мы ликвидируем этот пробел и надеемся, что этот метод получит в дальнейшем развитие.

2. Принцип максимума. В этом разделе мы докажем принцип максимума для квазилинейных параболических уравнений в той форме, которая представлена в монографии [17], в которой, однако, не дано его доказательство, а затем представим обобщение этого принципа для слабых решений с компактным носителем для вырождающихся уравнений такого типа.

Пусть $T > 0, K > 0$ – произвольные постоянные. Рассмотрим банахово пространство $C_{2,1}([-K, K], [0, T])$ функций $u(x, t)$ двух переменных $\langle x, t \rangle$, дважды непрерывно дифференцируемых по $x \in [-K, K]$ и непрерывно дифференцируемых по $t \in [0, T]$ с нормой $\|u\| = \max_{j \in \{0,1\}, k \in \{0,1,2\}} \max_{x \in [-K, K], t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^{j+k} u(x, t)}{\partial t^j \partial x^k} \right|$.

Лемма 2.1. Пусть функция $k'(u)$ удовлетворяет условию Липшица по $u \in \mathbb{R}$, а функция $f(u_x, u)$ удовлетворяет такому же условию по каждой из переменных $\langle u_x, u \rangle \in \mathbb{R}^2$. Тогда множества функций S_1 и S_2 :

$$\{u \in C_{2,1}([-K, K], [0, T]) : \dot{u}(x, t) < L[u](x, t)\}, \quad (3)$$

$$\{u \in C_{2,1}([-K, K], [0, T]) : \dot{u}(x, t) > L[u](x, t)\}, \quad (4)$$

где

$$L[u](x, t) \equiv \left[(k(u)u_x)_x + f(u_x, u) \right](x, t) \quad (5)$$

открыты в пространстве $C_{2,1}([-K, K], [0, T])$, а их замыканиями являются, соответственно, множества $\{u \in C_{2,1}([-K, K], [0, T]) : \dot{u}(x, t) \leq L[u](x, t)\}$ и $\{u \in C_{2,1}([-K, K], [0, T]) : \dot{u}(x, t) \geq L[u](x, t)\}$.

Доказательство. Достаточно доказать первую часть утверждения. Положим, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет неравенству $\dot{u}(x, t) < \underline{L}[u](x, t)$. Ввиду непрерывности функции $\dot{u}(x, t) - L[u](x, t)$ по паре переменных на прямоугольнике $[-K, K] \times [0, T]$, должно выполняться

$$-\varepsilon = \max_{x \in [-K, K], t \in [0, T]} \left\{ (\dot{u} - L[u])(x, t) \right\} < 0.$$

Добавив к функции $u(x, t)$ произвольную функцию $\delta(x, t)$ с достаточно малой нормой такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\dot{\delta}(x, t) + \left(L[u] - L[u + \delta] \right)(x, t) < \varepsilon, \quad (6)$$

получим, что все функции $(u + \delta)(x, t)$ из $C_{2,1}([-K, K], [0, T])$ составляют окрестность функции $u(x, t)$, содержащуюся в множестве типа (3). Возможность же выбора такой функции $\delta(x, t)$ вытекает из следующих оценок

$$\begin{aligned} & |\delta(x, t) + (L[u] - L[u + \delta])(x, t)| \leq \|\delta\| + \|L[u] - L[u + \delta]\|_0 \leq \\ & \leq \|\delta\| + \|u_{xx}\| \cdot \|k(u) - k(u + \delta)\|_0 + \|\delta\| \cdot \|k(u + \delta)\|_0 + \|u_x\|^2 \cdot \|k'(u) - k'(u + \delta)\|_0 + \\ & + \|\delta\| (2\|u\| + \|\delta\|) \|k'(u + \delta)\|_0 + \|f(u_x + \delta_x, u + \delta) - f(u_x, u)\|_0, \end{aligned}$$

где посредством $\|\cdot\|_0$ обозначена норма в пространстве $C([-K, K] \times [0, T])$ непрерывных функций $u(x, t)$

$$\|u\|_0 = \max_{x \in [-K, K], t \in [0, T]} |u(x, t)|.$$

Норма $\|\delta\|$, также как и нормы разностей $\|k(u) - k(u + \delta)\|_0 \leq \|k'(u)\|_0 \|\delta\|_0$, $\|k'(u) - k'(u + \delta)\|_0 \leq K(u) \|\delta\|_0$, $\|f(u_x + \delta_x, u + \delta) - f(u_x, u)\|_0 \leq L(u_x, u) \|\delta\|_0$ при $\|\delta\|_0 < \varepsilon$, могут быть сделаны сколь угодно малыми, вследствие выполнимости условий Липшица для функций $k'(u)$ и $f(u_x, u)$ с зависящими от u_x и u коэффициентами $K(u)$, $L(u_x, u)$.

Точно так же доказывается утверждение об открытости множества (4). При этом нужно выбрать

$$\min_{x \in [-K, K], t \in [0, T]} \{(\dot{u} - L[u])(x, t)\} = \varepsilon > 0$$

и точно так же выбрать функцию $\delta(x, t)$, чтобы выполнялось неравенство (6). ■

Теорема 2.1. Пусть $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые по $x \in \mathbb{R}$ функции такие, что при $t \geq t_0 \in \mathbb{R}_+$ они удовлетворяют неравенствам

$$\dot{u}^{(1)}(x, t) \leq \left[(k(u^{(1)})u_x^{(1)})_x + f(u_x^{(1)}, u^{(1)}) \right](x, t), \tag{7}$$

$$\dot{u}^{(2)}(x, t) \geq \left[(k(u^{(2)})u_x^{(2)})_x + f(u_x^{(2)}, u^{(2)}) \right](x, t), \tag{8}$$

соответственно. Если имеет место неравенство $u^{(1)}(x, t_0) \leq u^{(2)}(x, t_0)$, $x \in \mathbb{R}$, то для любого $t > t_0$ также имеет место неравенство $u^{(1)}(x, t) \leq u^{(2)}(x, t)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда функция $u^{(1)}(x, t)$ такова, что в (7) реализуется точное неравенство. Допустим противное, что для некоторого $t' > t_0$ существует точка x' , в которой реализуется касание графиков $u^{(1)}(x, t')$ и $u^{(2)}(x, t')$, то есть выполняются равенства $u^{(1)}(x', t') = u^{(2)}(x', t')$ и $u_x^{(1)}(x', t') = u_x^{(2)}(x', t')$. Кроме того, в этом случае должно выполняться неравенство $u_{xx}^{(1)}(x', t') \leq u_{xx}^{(2)}(x', t')$. Не ограничивая общности, будем считать, что точка t' является первой из всех возможных точек такого типа. Следовательно, на основании (7) и (8) имеет место неравенство $\dot{u}^{(2)}(x', t') > \dot{u}^{(1)}(x', t')$, и поэтому, при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $u^{(2)}(x', t' + \varepsilon) > u^{(1)}(x', t' + \varepsilon)$, то есть в точке x' не происходит пересечение графиков $u^{(1)}(x, t')$ и $u^{(2)}(x, t')$ при $t' + \varepsilon$.

Точно также, доказывается, что не происходит пересечение графиков $u^{(1)}(x, t')$ и $u^{(2)}(x, t')$ ни в одной точке $t' > t_0$, если функция $u^{(2)}(x, t)$ такова, что точное неравенство реализуется в (8).

Распространим теперь доказательство на общий случай. Рассмотрим пары функций $\langle u^{(1)}(x, t), u^{(2)}(x, t) \rangle$ из пространства $C_{2,1}([-K, K], [0, T]) \times C_{2,1}([-K, K], [0, T])$, принадлежащие конусу S , в котором выполняется неравенство $u^{(1)}(x, t) \leq u^{(2)}(x, t)$. В этом пространстве множества $S_1 \times C_{2,1}([-K, K], [0, T])$ и $C_{2,1}([-K, K], [0, T]) \times S_2$ открыты, согласно Лемме 2.1. Из первой части доказательства следует, что множество $S \cap (S_1 \times C_{2,1}([-K, K], [0, T])) \cap (C_{2,1}([-K, K], [0, T]) \times S_2)$ не пусто и открыто. Тогда на замыкании этого множества справедливо утверждение теоремы для точек $\langle x, t \rangle \in [-K, K] \times [0, T]$. Переходом к пределу, сначала $K \rightarrow \infty$, а затем $T \rightarrow \infty$ получаем, что утверждение теоремы справедливо для всех пар $\langle u^{(1)}(x, t), u^{(2)}(x, t) \rangle$ функций с указанными в условии теоремы свойствами. ■

Замечание. Представленное доказательство принципа максимума не предполагает единственность решения задачи Коши уравнения (1), что важно в рассматриваемом нами случае вырождающегося уравнения при $u = 0$, когда единственность решения такой задачи может не иметь места.

Далее, будем изучать решения вырождающихся гиперболических уравнений (1), у которых функции $g(u) = f(u_x, u)$, $k'(u)$ удовлетворяют условию Липшица и при этом $k(0) = 0$, $k'(0) > 0$. Класс таких уравнений обозначим посредством \mathfrak{B} . Рассмотрим слабые решения $u(x, t)$ специального типа для таких уравнений, обладающие компактным носителем. Они конструируются следующим образом. Пусть $w(x, t)$ — «точное» решение уравнения (классическое решение), то есть имеет место $\dot{w}(x, t) = (k(w)w_x)_x + g(w)$. Допустим, что $w(x_-(t), t) = w(x_+(t), t) = 0$. Определим

$$u(x, t) = \begin{cases} w(x, t), & x \in [x_-(t), x_+(t)]; \\ 0, & \mathbb{R} \setminus (x_-(t), x_+(t)). \end{cases}$$

Если $u(x, t)$ не является точным решением, то, по крайней мере, в одной из точек $x' = x_{\pm}(t)$ производная $(du/dx)_{\langle x_{\pm}(t), t \rangle}$ не равна нулю.

Очевидно, что функции $u(x, t)$ являются слабыми решениями в случае, если $\lim_{x \rightarrow x_{\pm}(t)} |w_x(x, t)| < \infty$, так как имеет место

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\dot{w} - (k(w)w_x)_x - g(w))(x, t) dx = 0.$$

Класс всех таких слабых решений обозначим посредством \mathfrak{R} . Тогда справедлива

Теорема 2.2. Пусть $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ — принадлежащие классу \mathfrak{R} слабые решения уравнения класса \mathfrak{B} , которые при $t \geq t_0 \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют неравенствам

$$\dot{u}^{(1)}(x, t) \leq \left[(k(u^{(1)})u_x^{(1)})_x + g(u^{(1)}) \right](x, t), \tag{9}$$

$$\dot{u}^{(2)}(x, t) \geq \left[(k(u^{(2)})u_x^{(2)})_x + g(u^{(2)}) \right](x, t), \tag{10}$$

соответственно. Если имеет место неравенство $u^{(1)}(x, t_0) \leq u^{(2)}(x, t_0)$, $x \in \mathbb{R}$, то для любого $t > t_0$ также имеет место неравенство $u^{(1)}(x, t) \leq u^{(2)}(x, t)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть функции $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ класса \mathfrak{R} с носителями $[x_-^{(j)}(t), x_+^{(j)}(t)]$, $j \in \{1, 2\}$ удовлетворяют неравенству $u^{(1)}(x, t_0) \leq u^{(2)}(x, t_0)$ так, что $[x_-^{(1)}(t_0), x_+^{(1)}(t_0)] \subset [x_-^{(2)}(t_0), x_+^{(2)}(t_0)]$. Допустим, что в какой-то момент $t' > t_0$ найдется точка x' , в которой выполняется $u^{(1)}(x', t') = u^{(2)}(x', t')$ и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место $u^{(1)}(x', t' + \varepsilon) > u^{(2)}(x', t' + \varepsilon)$. Причем t' — первая точка среди всех возможных точек такого типа, и поэтому в точке t' имеет место включение $[x_-^{(1)}(t'), x_+^{(1)}(t')] \subset [x_-^{(2)}(t'), x_+^{(2)}(t')]$.

Если x' содержится внутри отрезка $[x_-^{(1)}(t'), x_+^{(1)}(t')]$, то неравенство $u^{(1)}(x', t' + \varepsilon) > u^{(2)}(x', t' + \varepsilon)$ невозможно при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$, согласно доказательству Теоремы 2.1. Рассмотрим случай, когда $x' \in \{x_-^{(1)}(t'), x_+^{(1)}(t')\}$. Положим, для определенности, $x' = x_+^{(1)}(t')$. Если значения обеих функции $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ в окрестности точки $x_+^{(1)}(t')$ представляются точными решениями уравнения, то есть эта точка является крайней точкой носителя точных решений, то для нее опять справедливы рассуждения, приведенные в доказательстве утверждения Теоремы 2.1. Поэтому положим, что, по крайней мере, для одной из функций, точка $x_+^{(1)}(t')$ не является крайней точкой носителя точного решения. По этой причине, $(du^{(j)}/dx)_{\langle x_+^{(1)}(t'), t' \rangle} \neq 0$, $j \in \{1, 2\}$. Тогда имеют место $u^{(1)}(x_+^{(1)}(t'), t') = u^{(2)}(x_+^{(1)}(t'), t') = 0$ и $0 \leq (du^{(1)}/dx)^2_{\langle x_+^{(1)}(t'), t' \rangle} < (du^{(2)}/dx)^2_{\langle x_+^{(1)}(t'), t' \rangle}$. Следовательно, ввиду свойств функции $k(u)$, в этой точке выполняется неравенство

$$\left[\dot{u}^{(1)}(x, t') \right]_{x=x_+^{(1)}} = k'(0) \left[\left(\frac{du^{(1)}}{dx} \right)^2_{\langle x_+^{(1)}(t'), t' \rangle} - \left(\frac{du^{(2)}}{dx} \right)^2_{\langle x_+^{(1)}(t'), t' \rangle} \right] < 0.$$

Поэтому неравенство $u^{(1)}(x_+^{(1)}(t'), t) > u^{(2)}(x_+^{(1)}(t'), t)$, $0 < t - t' < \varepsilon$ также невозможно в этой точке, так как изменение со временем t каждой из функций $u^{(1)}(x, t)$, $u^{(2)}(x, t)$ в точке $x = x_+^{(1)}(t')$ определяется на основе точного решения уравнения (1). ■

Теоремы 1 и 2 допускают очевидные обобщения. Условия Липшидовости функций $k'(u)$, $f(u_x, u)$, $g(u)$ могут быть, без изменения стратегии доказательств теорем, ослаблены заменой на условия Гельдеровости этих функций по своим аргументам с произвольным сколь угодно малым показателем Гельдера и, более того, допустимо дальнейшее ослабление требований, предъявляемым к этим функциям.

3. Асимптотика решений с обострением. В этом разделе мы определим возможный тип асимптотического поведения при $t \rightarrow t_*$ решения $u(x, t)$ уравнения (2), если оно сосредоточено на компактном носителе, расположенном в некотором отрезке $[c_-, c_+]$ и в какой-то точке $x \in [c_-, c_+]$ это решение стремится к бесконечности. При этом значение t_* может быть как конечным, так и бесконечным.

Прежде всего, докажем утверждение, связанное с теоремой о дифференцировании функциональных последовательностей.

Лемма 3.1. Пусть $\langle y_n(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ — последовательность непрерывно дифференцируемых функций на $[c_-, c_+] \subset \mathbb{R}$ такая, что последовательность соответствующих производных $\langle y'_n(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ равномерно ограничена $\max_{x \in [c_-, c_+]} |y'_n(x)| < M$ и сходится в каждой точке $x \in [c_-, c_+]$ к ограниченной измеримой функции $v(x)$, $x \in [c_-, c_+]$. Пусть, кроме того, существует точка $c \in [c_-, c_+]$, в которой существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(c) \equiv y(c). \tag{11}$$

Тогда последовательность $\langle y_n(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ равномерно сходится в каждой точке $x \in [c_-, c_+]$ к дифференцируемой функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \equiv y(x) \tag{12}$$

такой, что $y'(x) = v(x)$.

Доказательство. Запишем выражение для функций $y_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ в виде

$$y_n(x) = y_n(c) + \int_c^x v(\xi) d\xi + \int_c^x [y'_n(\xi) - v(\xi)] d\xi.$$

Для любого $\varepsilon > 0$, согласно теореме Егорова (см., например, [23]), найдется такое множество E_ε , для которого выполняется $\text{mes}([c_-, c_+] \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность функций $\langle y'_n(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к функции $v(x)$ равномерно при $x \in E_\varepsilon$. Можно считать, что множество E_ε замкнуто. Из оценки интеграла

$$\left| \int_c^x [y'_n(\xi) - v(\xi)] d\xi \right| \leq \left(\max_{x \in [c_-, c_+]} |v(x)| + M \right) \text{mes}([c_-, c_+] \setminus E_\varepsilon) + \text{mes}(E_\varepsilon) \max_{x \in E_\varepsilon} |y'_n(x) - v(x)|,$$

ввиду (12), после перехода к пределу по $n \rightarrow \infty$, находим, что в каждой точке $x \in [c_-, c_+]$ имеет место неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| y_n(x) - y(c) - \int_c^x v(\xi) d\xi \right| \leq \varepsilon \left(\max_{x \in [c_-, c_+]} |v(x)| + M \right).$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, отсюда следует, что последовательность $\langle y_n(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ равномерно сходится в каждой точке $x \in [a, b]$ к функции

$$y(x) = y(c) + \int_0^x v(\xi) d\xi. \tag{13}$$

Так как при этом последовательность $\langle y'_n(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится равномерно на E_ε , то, применяя теорему о дифференцировании функциональных последовательностей, находим, что $y'(x) = v(x)$ при $x \in E_\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, получаем, что это равенство выполняется везде в $[c_-, c_+]$. ■

Пусть решение $u(x, t)$ уравнения (2) с носителем, расположенным внутри $[c_-, c_+]$, таково, что в некоторых точках этого отрезка оно стремится к бесконечности при $t \rightarrow t_*$ так, что при $t > t_*$ решение $u(x, t)$ уже не имеет смысла. Допустим также, что при $t \rightarrow t_*$ решение $u(x, t)$ имеет асимптотическое поведение равномерное по $x \in [c_-, c_+]$. Это означает, что найдется такая функция $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$, для которой существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow t_*} u(x, t)/\varphi(t)$, представляющий ограниченную измеримую по $x \in [c_-, c_+]$ функцию

$$u(x) = \limsup_{t \rightarrow t_*} \frac{u(x, t)}{\varphi(t)} \geq 0,$$

тождественно не равную нулю. Из определяющих формул (12), (13) следует, что, в случае равномерности асимптотики, имеет место $u(x, t) = u(x)\varphi(t)(1 + o(1))$, где функция $o(t)$ равномерно по $x \in [c_-, c_+]$ стремится к нулю при $t \rightarrow t_*$. Справедлива

Теорема 3.1. Если решение $u(x, t)$ уравнения (2) расположено на компактном носителе в отрезке $[c_-, c_+]$ и обладает равномерным по $x \in [c_-, c_+]$ асимптотическим поведением $u(x, t) = u(x)\varphi(t)(1 + o(1)) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$, то неотрицательная функция $u(x)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(uu_x)_x + \beta u^2 = A^2 u, \quad A = \text{const} \tag{14}$$

так, что $\varphi(t) = \varphi(0)(1 - A^2\varphi(0)t)^{-1}$ и $t_* = [A^2\varphi(0)]^{-1}$.

Доказательство. Из уравнения (2), ввиду допустимости дифференцирования по t асимптотической формулы, следует, что

$$\left[\left(\frac{u(x, t)}{\varphi(t)} \left[\frac{u(x, t)}{\varphi(t)} \right]_x \right)_x - \varphi^{-2}(t)\dot{\varphi}(t)u(x) + \alpha \frac{u(x)}{\varphi(t)} \right] (1 + o(1)) = -\beta u^2(x).$$

Откуда, переходя к пределу $t \rightarrow t_*$, учитывая $u(x) \neq 0$ и независимость правой части равенства от t , а также стремление $\varphi(t)$ к бесконечности, находим, что должны существовать предельные значения

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \left(\frac{u(x, t)}{\varphi(t)} \left[\frac{u(x, t)}{\varphi(t)} \right]_x \right)_x \equiv v(x), \quad \lim_{t \rightarrow t_*} \varphi^{-2}(t)\dot{\varphi}(t) \equiv C = \text{const},$$

для которых должно выполняться равенство $v(x) = Cu(x) - \beta u^2(x)$, а функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять уравнению $\dot{\varphi}(t) = C\varphi^2(t)$. Из последнего уравнения следует, что $\varphi(t) = \varphi(0)(1 - C\varphi(0)t)^{-1}$. Так как, по

построению, $\varphi(t) > 0$, то $\varphi(0) > 0$ и для того, чтобы $\varphi(t)$ стремилась к бесконечности необходимо, чтобы $C = A^2 > 0$. При этом $t_* = [A^2\varphi(0)]^{-1}$.

Ввиду того, что функция $u(x)$, по предположению, ограничена и измерима на $[a, b]$, то таким же свойством должна обладать функция $v(x)$. По этой же причине, применение для любой стремящейся монотонно к t_* последовательности $\langle t_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ при $n \rightarrow \infty$ и соответствующей ей последовательности функций $\langle y_n(x) = [u(x, t_n)/\varphi(t_n)][u_x(x, t_n)/\varphi(t_n)]; n \in \mathbb{N} \rangle$ утверждение Леммы 2.1, заключаем, что к предельной функции $y(x) = u(x) \lim_{n \rightarrow \infty} [u_x(x, t_n)/\varphi(t_n)]$ эта последовательность сходится равномерно и $y'(x) = v(x)$. При этом в качестве точки c в формулировке Леммы 2.1 для функций $y_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ полагаем $c = c_-$, так как, по предположению, $u(c_-, t_n) = 0$.

Так как функция $y(x)$ ограничена и измерима, то таким же свойством обладает функция $y(x)/u(x)$ в точках, где $u(x) \neq 0$. Рассмотрим последовательность функций $\langle [u_x(x, t_n)/\varphi(t_n)]_x; n \in \mathbb{N} \rangle$, стремящуюся к $y(x)/u(x)$ при $n \rightarrow \infty$, и при этом $u(c_-, t_n) = 0$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_x(x, t_n)/\varphi(t_n) = u'(x)$, то, снова применив утверждение Леммы 2.1 для этой последовательности, находим, что $u'(x) = y(x)/u(x)$.

Из рассуждений последних двух абзацев следует, что $[u(x)u'(x)]' = v(x)$. Воспользовавшись равенством $v(x) = Cu(x) - \beta u^2(x)$, получаем формулу (14). ■

Применяя стандартный прием сведения к квадратурам автономного уравнения (14) второго порядка получаем

Следствие. *Класс всех допустимых функций равномерно асимптотически точно приближающих неотрицательные решения $u(x, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$ уравнения (2), сосредоточенные на компактном носителе $\text{supp } u(x, t) \subset [c_-, c_+]$ не пуст, только если $\beta > 0$ и $c_+ - c_- \geq \pi\sqrt{2\beta}$, и он описывается формулой*

$$u(x, t) = \frac{2A^2}{3\beta} (1 - A^2\varphi(0)t)^{-1} \left(1 + \cos(L + (\beta/2)^{1/2}x) \right), \quad (15)$$

где $t_* = [A^2\varphi(0)]^{-1}$ и крайние точки x_{\pm} носителя решения должны удовлетворять условиям $x_- > c_-$, $x_+ < c_+$, где

$$c_-(\beta/2)^{1/2} + L < \pi(2n_- + 1), \quad c_+(\beta/2)^{1/2} + L > \pi(2n_+ + 1), \quad (16)$$

$n_+ > n_-$. При этом необходимо, чтобы $c_+ - c_- \geq \pi(2\beta)^{1/2}$.

□ Формула (15) получается непосредственным вычислением общего решения уравнения. Крайние точки x_{\pm} должны удовлетворять условиям $L + x_{\pm}(\beta/2)^{1/2} = (2n_{\pm} + 1)\pi$. Откуда следуют ограничения (16). При $n_- = 0, n_+ = 1$ получаем $c_+ - c_- > \pi\sqrt{2\beta}$. ■

4. Слабые эталонные решения. Целью этого раздела является построение эталонных слабых решений $u_{\pm}(x, t)$ уравнения (2), на основе которых будут найдены двусторонние оценки времени обострения t_* решений, сосредоточенных на компактном носителе, удовлетворяющем условию $c_+ - c_- > \pi\sqrt{2\beta}$, с $\beta > 0$. При этом функции $u_+(x, t)$ и $u_-(x, t)$ дают, соответственно верхнюю и нижнюю оценки локализованных решений $u(x, t)$.

Определим решения $w(x, t)$ уравнения (2), имеющих вид

$$w(x, t) = a(t) + b(t) \cos \pi L_*^{-1}(x + x_0), \quad (17)$$

с неопределенными функциями $a(t)$ и $b(t)$ и параметром L_* . Подстановка этого выражения в уравнение (2) даёт нам следующее тождество

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) + \dot{b}(t) \cos \pi L_*^{-1}(x + x_0) &= \alpha a(t) + \beta a^2(t) + \pi^2 L_*^{-2} b^2(t) + \\ &+ (ab(t) + 2\beta a(t)b(t) - \kappa \pi^2 L_*^{-2} a(t)b(t)) \cos \pi L_*^{-1}(x + x_0) + (\beta - 2\pi^2 L_*^{-2}) b^2(t) \cos^2 \pi L_*^{-1}(x + x_0). \end{aligned}$$

Гармонический баланс относительно переменной x , с необходимостью, приводит к равенству $L_* = \pi(\beta/2)^{1/2}$ и консервативной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $a(t)$, $b(t)$,

$$\dot{a} = \alpha a + \beta \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right), \quad \dot{b} = ab + \frac{3}{2} \beta ab. \quad (18)$$

Таким образом, семейство эталонных решений $w(x, t)$ полностью описывается: $a(0), b(0)$ — начальными данными решений системы (18) и координатой x_0 . Общий вид фазовой плоскости системы в зависимости от знака α представлен на рис. 1.

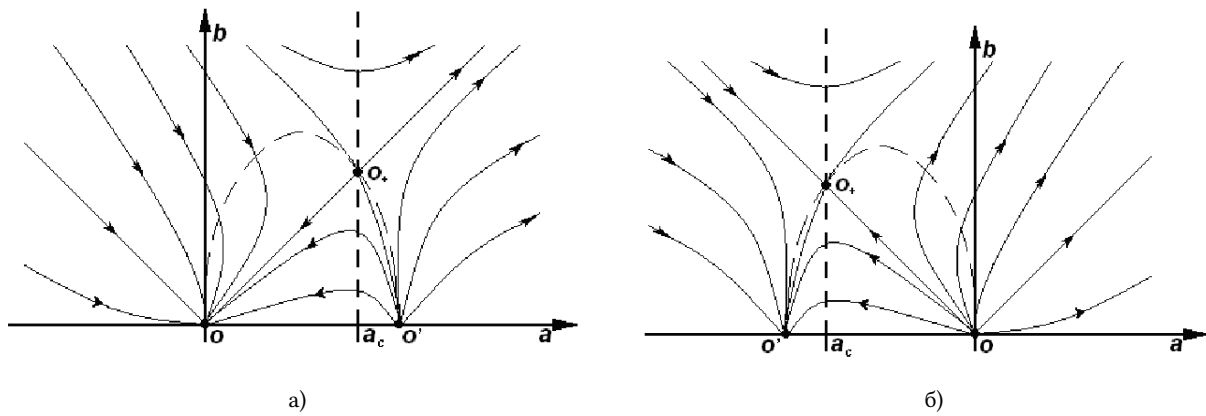


Рис. 1. Фазовая плоскость динамической системы $\langle a(t), b(t) \rangle$
 Fig. 1. Phase plane of the dynamical system $\langle a(t), b(t) \rangle$

Эталонные решения для оценки точных неотрицательных решений $u(x, t)$ с компактным носителем уравнения (2) строятся на основе Теоремы 2.2. Прежде всего, заметим, что производная $w_x(x, t)$ ограничена, что позволяет использовать функцию $w(x, t)$ для построения слабых решений класса \mathfrak{R} . Введем эталонные решения $u^{(j)}(x, t) = a_j(t) + b_j(t) \cos \pi L_*^{-1}(x + x_0^{(j)})$, $j \in \{1, 2\}$ с компактным носителем, согласно формуле (9), которые являются непрерывными неотрицательными функциями с носителями $[x_-^{(j)}(t), x_+^{(j)}(t)]$. На пары коэффициентов накладываются дополнительные условия $|a_j(t)| \leq b_j(t)$, $b_j(t) > 0$, $j \in \{1, 2\}$ для того чтобы существовала область значений координаты x , где, согласно построению, эталонные решения положительны и можно обеспечить их непрерывность. При выполнении указанных неравенств, $u^{(j)}(x, t) > 0$ в точке $-x_0^{(j)}$, $u^{(1,2)}(-x_0^{(j)}) = a_j(t) + b_j(t) > 0$, и для графиков функций $w(x, t)$, с парами коэффициентов $\langle a_j(t), b_j(t) \rangle$, имеются точки пересечения с уровнем $u = 0$, т. е. имеются решения уравнения $a_j(t) + b_j(t) \cos \pi L_*^{-1}(x + x_0^{(j)}) = 0$, в частности, при $t = 0$. В этом случае границы носителей определяются как решения уравнения $a_j(t) + b_j(t) \cos \pi L_*^{-1}(x_{\pm}^{(j)} + x_0^{(j)}) = 0$, $j \in \{1, 2\}$ на части фазовой плоскости $\langle a, b \rangle$, ограниченной неравенством $b \geq |a|$.

Будем считать, что решение $u(x, t)$ обладает компактным носителем, начальный размер которого r меньше L_* . Тогда найдутся такие: точка $x_0^{(1)}$ и значения параметров $a_1(0)$, $b_1 > 0$, $|a_1| \leq b_1$, для которых имеет место неравенство $u^{(1)}(x, 0) \leq u(x, 0)$. Выбором параметров $x_0^{(1)}$, $a_1(0)$, $b_1(0)$ среди совокупности всех допустимых для них значений можно добиться, чтобы функция $u^{(1)}(x, 0)$ аппроксимировала функцию $u(x, 0)$ снизу наиболее оптимальным образом.

Точно также построим эталонное решение $u^{(2)}(x, t)$ с набором параметров $a_2(0)$, $b_2(0)$, $x_0^{(2)}$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $u^{(2)}(x, 0) \geq u(x, 0)$, но его носитель не превосходил L_* . Выбрав параметры $a_j(0)$, $b_j(0)$, $x_0^{(j)}$, мы, тем самым, зафиксировали решения $\langle a_j(t), b_j(t) \rangle$, $j \in \{1, 2\}$ динамической системы $\langle a(t), b(t) \rangle$, для которых выбранные значения являются начальными данными. В результате, аппроксимируемое точное решение уравнения (2) подчинено, в силу Теоремы 2.2, неравенствам $u^{(1)}(x, t) \leq u(x, t) \leq u^{(2)}(x, t)$.

Пусть это решение обладает обострением режима с временем обострения $t_* < \infty$. Заметим, что при $\alpha \geq 0$ любое эталонное решение обладает обострением режима. Если же $\alpha < 0$, и, в этом случае, параметры $\langle a_-(0), b_-(0) \rangle$ могут быть выбраны так, что эталонное решение $u^{(1)}(x, t)$ также обладает обострением режима с некоторым временем обострения $t_*^{(1)}$, то, в силу указанного неравенства, $t_*^{(1)} \geq t_*$. Кроме того, обострением режима обладает эталонное решение $u_2(x, t)$ с временем обострения $t_*^{(2)}$, которое удовлетворяет неравенству $t_*^{(2)} \leq t_*$.

В силу неравенства $u^{(1)}(x, t) \leq u(x, t) \leq u^{(2)}(x, t)$, зависящий от времени размер носителя $r(t)$ решения $u(x, t)$ также подчинен неравенствам $r_1(t) \leq r(t) \leq r_2(t) \leq L_*$, где $r_j(t)$ – размеры носителей эталонных решений $j \in \{1, 2\}$. Поэтому имеет место $r(t_*) \leq L_*$. Принимая во внимание Теорему 3.1, можно утверждать, что предельные значения всех носителей совпадают и равны L_* .

Таким образом, мы получаем возможность оценивать время обострения и размер области локализации произвольного решения уравнения (2) с компактным носителем, не превосходящим L_* .

5. Оценки времени обострения режима. Проанализируем поведение траекторий системы на фазовой плоскости $\langle a, b \rangle$. Система имеет особые точки, координаты $\langle a, b \rangle$ которых являются решениями системы уравнений $\alpha a + \beta(a^2 + b^2/2) = 0$, $(\alpha + 3\beta a/2)b = 0$.

Точка пересечения $\langle a_c, 0 \rangle$, $a_c = -2\alpha/3\beta$ прямых $b = 0$, $a = a_c$ лежит внутри эллипса, определяемого первым уравнением, так как эллипс пересекает ось a в точках 0 и $-\alpha/\beta$, и поэтому система имеет

четыре особые точки $O = \langle 0, 0 \rangle$, $O' = \langle -\alpha/\beta, 0 \rangle$, $O_{\pm} = \langle a_c, \pm a_c \rangle$. Матрица системы, линеаризованной в произвольной точке $\langle a, b \rangle$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta a & \beta b \\ 3\beta b/2 & \alpha + 3\beta a/2 \end{pmatrix}.$$

Она диагональна в точках O , O' , где $b = 0$, и, следовательно, имеет пары собственных значений $\langle \alpha + 2\beta a, \alpha + 3\beta a/2 \rangle$. В точке O они равны $\langle \alpha, \alpha \rangle$, а в точке $O' = \langle -\alpha, -\alpha/2 \rangle$. Таким образом, точки O, O' являются узлами, устойчивость которых регулируется знаком α . В точках же O_{\pm} матрица недиагональна –

$$\begin{pmatrix} -\alpha/3 & 2\alpha/3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы в этих точках равны $\langle \alpha, -2\alpha/3 \rangle$. Так как они имеют разные знаки, то точки O_{\pm} являются седловыми, в которых ориентация седла (набор направлений на дугах сепаратрисы, выходящих из этих точек) также определяется знаком α . Она изображена на рис. 1а, 1б. Точки поворота траектории системы на фазовой плоскости в направлении оси b могут лежать только на прямой $a = a_c$, а прямая $b = 0$ может быть только асимптотой траекторий. Точки поворота в направлении оси a лежат на эллипсе. Система обладает решениями с траекториями $b = \pm a$, так как при подстановках $b = \pm a$ оба уравнения системы (18) совпадают. Тогда траектории, проходящие через какую-либо точку $\langle a, b \rangle$ с $b > |a|$, полностью содержатся в квадранте, ограниченном этим неравенством. Лучи $a = b, a \geq 0$ и $a = -b, a \leq 0$, являющиеся траекториями системы. Они содержат особую точку O с $a = 0$, которая является неустойчивым узлом при $\alpha > 0$. Наоборот, при $\alpha < 0$, эта особая точка является устойчивым узлом с $a = 0$. Кроме того, при $\alpha < 0$, луч $a = b$ содержит седловую точку O_+ с $a = 2|\alpha|/3\beta = -a_c$, а, при $\alpha > 0$, седловую точку O_+ содержит луч $a = -b$. Этот анализ показывает, что векторное поле системы на плоскости $\langle a, b \rangle$ имеет вид, изображенный на рис. 1а при $\alpha < 0$ и на рис. 1б при $\alpha > 0$.

В общем случае система (18) интегрируется подстановкой $a(t) = e^{\alpha t} A(t)$, $b(t) = e^{\alpha t} B(t)$, посредством которой она сводится к системе

$$\dot{A} = \beta e^{\alpha t} \left(A^2 + \frac{1}{2} B^2 \right), \quad \dot{B} = \frac{3}{2} \beta e^{\alpha t} AB, \quad (19)$$

имеющей масштабно инвариантные траектории. Последнее свойство позволяет определить траектории системы (18) сведением к однородному уравнению

$$\frac{dA}{dB} = \frac{2A^2 + B^2}{3AB}. \quad (20)$$

Для построения эталонных решений $u_j(x, t)$, $j \in \{1, 2\}$ необходимо определить решения $\langle a(t), b(t) \rangle$ системы (18), которые подчинены условию $b(t) > |a(t)|$. Тогда соответствующие им пары функций $\langle A(t), B(t) \rangle$ также должны быть подчинены условию $B(t) > |A(t)|$. Траектории, определяемые уравнением (20), не зависят от постоянных α, β . При $A > 0$ из (20) следует, что A возрастает с увеличением B , т. е. траектория, начинаясь в правой полуплоскости, остается в ней. Если же $A < 0$, то из (20) следует, что функция B от A является убывающей. Если траектория находится в квадранте $\{\langle A, B \rangle : B > |A|\}$, то она не может пересечь прямую $B = 0$. Она может только попасть в точку $\langle 0, 0 \rangle$, либо пересечь прямую $A = 0$ под прямым углом (т. к. $dB/dA = 0$) и перейти в правую полуплоскость. Покажем, что реализуется второй случай.

Уравнение (20) интегрируется стандартной подстановкой $w(B) = A/B$ так, что для функции $w(B)$ получается следующее уравнение, $B(dw/dB) = (1 - w^2)/3w$. Посредством разделения переменных, получаем семейство его решений

$$|1 - w^2| = (b_0/B)^{2/3} \quad (21)$$

с произвольной постоянной $b_0 > 0$.

Точка $\langle 0, b_0 \rangle$, в которой выполняется $w(B) = 0$, является точкой пересечения траекторией прямой $A = 0$. Значение $b_0 = 0$ соответствует вырожденному случаю – траектории, состоящей из полупрямых $B = -A$ при $A < 0$ и $B = A$ при $A > 0$. При $w(B) < 1$ имеем следующую формулу для траекторий на плоскости $\langle A, B \rangle$, лежащих в квадранте $\{\langle A, B \rangle : B > |A|\}$,

$$A = \pm B \left(1 - (b_0/B)^{2/3} \right)^{1/2}, \quad (22)$$

где знаки (+) и (–) соответствуют частям траектории, лежащим, соответственно, в правой и левой полуплоскостях. Из (22) следует, что имеет место асимптотическая эквивалентность $B \sim \pm A$ при $B \rightarrow \infty$.

Наряду с траекториями (22), существуют траектории, которые описываются формулой (21) при $w^2 > 1$,

$$A = \pm B \left(1 + (b_0/B)^{2/3}\right)^{1/2}.$$

Однако для таких траекторий $|A| > B$, $B > 0$ и, следовательно, они расположены вне области $\{\langle A, B \rangle : B > |A|\}$, которая представляет интерес при конструировании эталонных функций $u^{(j)}(x, t)$.

Зависимость от времени для интересующих нас решений системы находится подстановкой формулы (22) во второе из уравнений системы (19)

$$\dot{B} = \pm \frac{3}{2} \beta e^{\alpha t} \cdot B^2 \left(1 - (b_0/B)^{2/3}\right)^{1/2}.$$

В результате получаем уравнение для определения неявным образом функции $B(t)$

$$\begin{aligned} \pm b_0^{-1} \int_{b_0/B}^{b_0/b(0)} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{2/3}}} &= \frac{3\beta}{2\alpha} (e^{\alpha t} - 1). \\ \left(\arcsin (b_0/b(0))^{1/3} - \arcsin (b_0/B)^{1/3}\right) + \\ + \left((b_0/b(0))^{1/3} \sqrt{1 - (b_0/b(0))^{2/3}} - (b_0/B)^{1/3} \sqrt{1 - (b_0/B)^{2/3}}\right) &= \pm (\beta b_0/\alpha) (e^{\alpha t} - 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Выражая в этом уравнении параметр b_0 через начальные данные $a(0)$, $b(0)$, $(b_0/b(0))^{1/3} = \left[1 - \left(a(0)/b(0)\right)^2\right]^{1/2}$, находим уравнение для неявной функции $B(t)$

$$\begin{aligned} \left[\arcsin \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} - \arcsin \left(\frac{b(0)}{B}\right)^{1/3} \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2}\right] + \\ + \frac{|a(0)|}{b(0)} \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} - \left(\frac{b(0)}{B}\right)^{1/3} \left[\left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{b(0)}{B}\right)^{2/3} \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)\right)\right]^{1/2} = \\ = \pm (\beta b(0)/\alpha) (e^{\alpha t} - 1) \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть $a(0) > 0$. Тогда $A(0) > 0$ и из первого уравнения (19) следует, что $\dot{A}(t) > 0$, т. е. $A(t) > 0$ в последующие моменты времени – движение происходит по части траектории на плоскости $\langle A, B \rangle$, расположенной в правой полуплоскости. Тогда в (24) нужно выбрать знак (+). Устремляя в этом случае $B \rightarrow \infty$ в левой части формулы и полагая $t = t_*$ – в правой, находим формулу для времени обострения

$$t_* = \alpha^{-1} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{\beta b(0)} \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{-3/2} \left[\arcsin \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{a(0)}{b(0)} \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2}\right]\right), \quad (25)$$

выражающее его через начальные данные. Выражения для $t_*^{(j)}$, $j \in \{1, 2\}$ в этой и последующих формулах получаются посредством подстановок $a(0) \Rightarrow a_j(0)$ и $b(0) \Rightarrow b_j(0)$.

При $\alpha > 0$ выражение под знаком логарифма, заведомо, положительно, и время обострения определено для всех начальных данных. При $\alpha < 0$, для существования времени обострения, из требования положительности выражения под знаком логарифма, возникает ограничение, которое выражается следующим неравенством

$$\arcsin \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{a(0)}{b(0)} \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} < \frac{\beta b(0)}{|\alpha|} \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{3/2}.$$

Равенство нулю указанного выражения дает нам уравнение сепаратрисы на рис. 1б, разделяющей на плоскости $\langle a, b \rangle$, области с начальными данными, которые приводят к обострению режима с областью, в которой движение системы (18) ограничено. Это уравнение при $a(0) > 0$ имеет вид

$$\arcsin \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right] + \frac{a(0)}{b(0)} \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right] = \frac{\beta b(0)}{|\alpha|} \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{3/2}.$$

Введем функцию C_+ от начальных данных,

$$C_+ = \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{-3/2} \left[\arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2} + \frac{a(0)}{b(0)} \sqrt{1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2}\right]$$

Тогда формула (25) принимает вид

$$t_* = \alpha^{-1} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{\beta b(0)} C_+ \right).$$

В частности, при $\alpha \rightarrow 0$, $t_* = C_+ / \beta b(0)$.

Пусть, теперь, $a(0) < 0$, когда каждая траектория системы (18) состоит из двух частей, лежащих в левой и правой полуплоскостях на фазовой плоскости $\langle a, b \rangle$. Рассмотрим фиксированную траекторию при значениях t настолько больших, когда можно считать, что пересечение прямой $a = 0$ уже произошло. Если положить $B = b_0$ в формуле (23) со знаком $(-)$, то для левой части траектории найдем

$$\arcsin (b_0/b(0))^{1/3} - \pi/2 + (b_0/b(0))^{1/3} \sqrt{1 - (b_0/b(0))^{2/3}} = -(\beta b_0/\alpha) (e^{\alpha t_0} - 1), \quad (26)$$

где t_0 – момент времени пересечения прямой $a = 0$. Наоборот, заменив в (23) со знаком $(+)$ начальное условие $b(0)$ на b_0 ,

$$\left(\pi/2 - \arcsin (b_0/B)^{1/3} \right) - (b_0/B)^{1/3} \sqrt{1 - (b_0/B)^{2/3}} = (\beta b_0/\alpha) (e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}). \quad (27)$$

После перехода к пределу в этой формуле $B \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow t_*$, получим уравнение для определения времени обострения режима, $\pi/2 = (\beta b_0/\alpha) (e^{\alpha t_*} - e^{\alpha t_0})$. Из формул (26), (27) находим, выразив параметр b_0 в терминах начальных данных с учетом $a(0) < 0$,

$$\frac{\beta b(0)}{\alpha} (e^{\alpha t_*} - 1) \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^2 \right)^{3/2} = \pi - \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^2} + \frac{a(0)}{b(0)} \sqrt{1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^2}. \quad (28)$$

Введя функцию

$$C_- = \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^2 \right)^{-3/2} \left[\pi - \arcsin \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{a(0)}{b(0)} \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^2 \right]^{1/2} \right],$$

представим формулу для времени обострения в следующем виде

$$t_* = \alpha^{-1} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{\beta b(0)} C_- \right). \quad (27)$$

Эта функция положительна, так как последнее слагаемое в квадратных скобках не превосходит по модулю единицу. Поэтому при $\alpha > 0$ конечное время обострения всегда существует. Если же $\alpha < 0$, то для существования времени t_* необходимо, чтобы выражение под знаком логарифма было положительно, т. е. выполнялось условие $C_- < \beta b_0/|\alpha|$. При переходе к пределу $\alpha \rightarrow 0$ получается аналогичная формула $t_* = C_- / \beta b(0)$. Уравнение для сепаратрисы в области $a(0) < 0$ имеет вид

$$\frac{\beta b(0)}{|\alpha|} \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^2 \right)^{3/2} = \pi - \arcsin \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{a(0)}{b(0)} \left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

6. Заключение. Как уже было сказано во Введении, основная направленность работ по изучению дифференциальных уравнений, решения которых могут испытывать обострение режима, связана с определением условий его возникновения. Тем не менее желательным является получение более детальной информации о решениях начально-краевых задач для таких уравнений. При этом следует заметить, что в приложениях в тех областях, где эти уравнения применяются для описания эволюционных неустойчивостей с обострением режима, а именно, в физике плазмы [4], а также в физике полупроводниковых материалов [20], [21], подробная информация о начальных состояниях, как правило, отсутствует. Используются данные о значениях по порядку величины для грубых характеристик начальных условий $u(x, 0)$. В такой ситуации важно уметь решать начально-краевые задачи, хотя бы в виде асимптотических разложений, со случайными начальными условиями, принимающими значения в достаточно обширном множестве возможных случайных реализаций. При этом, конечно же, нельзя ограничиваться решениями с компактным носителем ограниченного размера. Необходимо проведение исследований решений среди множества функций, достаточно быстро стремящихся к некоторым положительным постоянным на границах разрешенной области. Наконец, естественно обобщать результаты анализа решений эволюционных уравнений, аналогичных (2), в многомерном случае, в особенности для размерностей 2 и 3, что связано с постановками задач математической физики, связанных с конкретными приложениями.

В настоящей работе найдены двусторонние оценки, функционально зависящие от начальных данных, времени обострения режима для решений с компактным носителем, имеющим размер так называемой

фундаментальной длины [17]. Предположение о компактности носителя решения позволило исключить из рассмотрения влияние граничных условий и сосредоточиться на установлении зависимости времени обострения от начальных данных. Полученные результаты можно рассматривать как важный шаг при решении сформулированных общих проблем теории уравнений с обострением режима.

В заключение заметим, что в работе анализировался случай $\beta > 0$. Однако противоположный случай также может представлять интерес. В этом случае проявляется не обострение режима, а такая эволюция, при которой за конечное время решения превращаются в нулевое решение. Предлагаемый нами метод оценивая времени исчезновения решений остается без изменений.

References

1. Andreucci D., Tedeev A. F. 2005. Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations. *Advances in Differential Equations*. 10(1): 89–120.
2. Barenblatt G. I. 1956. Automodel solutions of Cauchy problem of nonlinear parabolic equation of the gas nonstationary filtration in porous medium. *Applied mathematics and Mechanics*. 20(6): 761–763.
3. Carrillo J. 1999. Entropy solutions for nonlinear degenerate problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 147: 269–361.
4. Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. 1995. *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Mathematics and Its Applications (MAIA, volume 348)*, 324.
5. Galaktionov V. A., Samarskii A. A. 1983. Methods of constructing approximate self-similar solutions of nonlinear heat equations. I. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 46(3): 291–321.
6. Galaktionov V.A., Samarskii A.A. 1983. Methods of constructing approximate self-similar solutions of nonlinear heat equations. II. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 46(4): 439–458.
7. Kalashnikov A. S. 1986. On the dependence of properties of solutions of parabolic equations in unbounded domains on the behavior of the coefficients at infinity. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 53(2): 399–410.
8. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. 1961. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis II*. New York, Graylock Press, 486.
9. Kruzkov S. N. 1969. Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for first order nonlinear equations. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 187: 29–32.
10. Leibenzon L. S. 1930. *The Motion of a Gas in a Porous Medium*. M., Russian Academy of Sciences, 348.
11. Mikhailov A. P. 2002. Classification of unbounded solutions to a quasilinear transport equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 42(6): 802–813.
12. Panov E. Yu. 2019. To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations. arXiv:1910.08739v1 [math.AP] 19 Oct 2019.
13. Panov E. Yu. 2020. To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 66(2): 292–313.
14. Panov E. Yu. 2020. To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. DOI: 10.1002/mma.6262.
15. Potemkina E.V. 1996. Peaking modes in the Cauchy problem for the inhomogeneous heat equation. *Russian Mathematical Surveys*, 51(6): 1223–1224.
16. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. 1979. Localization of the diffusion processes in media with constant properties. *Proceedings of the Academy of Sciences*, 247(2): 349–353.
17. Samarskii A. A., Zmitrenko N. V., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. 1975. Effect of the met as table localization of heat in a medium with nonlinear heat conduction. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 223(6): 1344–1347.
18. Samarskii A. A., Sobol' I. M. 1963. Examples of the numerical calculation of temperature waves. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 3(4): 945–970.
19. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. 2011. *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*. Berlin, Walter de Gruyter, 554.
20. Tedeev A. F. 2004. Conditions for the time-global existence and nonexistence of a compact support of solutions of the Cauchy problem for quasilinear degenerate parabolic equations. *Siberian Mathematical Journal*, 45(1): 155–164.
21. Virchenko Yu. P., Vodyanitskii A. A. 1996. Semiconductors materials heat breakdown under action of the penetrating electromagnetic radiation. II. One-dimensional model analysis. *Functional Materials*, 3(3): 312–319.
22. Virchenko Yu. P., Vodyanitskii A. A. 2002. Heat localization and formation of secondary breakdown structure in semiconductor materials. II. Mathematical analysis of the model. *Functional Materials*, 9(4): 601–607.
23. Volosov K. A., Danilov V. G., Maslov V. P. 1988. Structure of a weak discontinuity of solutions of quasilinear degenerate parabolic equations. *Mathematical Notes*, 43(6): 479–485.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.06.2023

Поступила после рецензирования 11.08.2023

Принята к публикации 17.08.2023

Received June 30, 2023

Revised August 11, 2023

Accepted August 17, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Ченцова Виктория Викторовна – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri P. Virchenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Software Department, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Victoria V. Chentsova – Graduate student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia