Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, №3. С. 195–203.

УДК 517.95
MSC 35J75
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-195-203

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА, РАССМАТРИВАЕМОГО В МОДЕЛЬНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Н. В. Королев, А. А. Ларин

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,
Воронеж, 394064, Россия

E-mail: korolevn33@yandex.ru

Аннотация. В работе решена спектральная задача для сингулярного эллиптического оператора второго порядка в трехмерной модельной области в виде полушара с вырезанным конусом в заданном направлении. Показана перестройка собственных значений, изменение их кратности и трансформация собственных функций при вариации угла раствора конуса.

Ключевые слова: собственные значения, собственные функции, задача Штурма – Лиувилля, функции Лежандра.

Для цитирования: Королев Н. В., Ларин А. А. 2020. Об одной задаче на собственные значения для сингулярного эллиптического оператора, рассматриваемого в модельной трехмерной области. Прикладная математика & Физика. 52(3): 195–203. DOI DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-195-203

ON A PROBLEM OF EIGENVALUES FOR A SINGULAR ELLIPTIC OPERATOR CONSIDERED IN THE MODEL THREE-DIMENSIONAL DOMAIN

N. V. Korolev, A. A. Larin

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

MESC AF «N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy»,
Voronezh, 394064, Russia
E-mail: korolevn33@yandex.ru
Received July 25, 2020

Abstract. In this article, a spectral problem of a special form is solved for the second-order singular elliptic operator in a three-dimensional model domain the form of a hemisphere with a cone cut out in a given direction. The restructuring of the eigenvalues, the change in their multiplicity and the transformation of the eigenfunctions with variation of the cone angle are presented.

Key words: eigenvalues, eigenfunctions, Sturm-Liouville problem, Legendre functions.

For citation: Korolev N. V., Larin A. A. 2020. On a problem of eigenvalues for a singular elliptic operator considered in the model three-dimensional domain. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 195–203 (in Russian).
DOI DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-195-203

---

1. Введение. Важность полных систем собственных функций модельных эллиптических операторов, рассматриваемых в двумерных и трехмерных областях, хорошо известна [7, 10]. Они находят применение в численном анализе, где берутся в качестве систем координатных функций для приближенного нахождения собственных значений и решений краевых задач более общего вида в той же области [8, 1, 12]. Вместе с этим полные системы собственных функций используются для аналитического решения нестационарных задач с тем же эллиптическим оператором [10].

В предлагаемой работе в модельной области пространства E^3 решена задача на собственные значения для сингулярного эллиптического оператора второго порядка, содержащего по одной из переменных дифференциальный оператор Бесселя $\partial^2 u/\partial z^2 + k\,\partial u/(z\,\partial z)$ и имеющего потенциал с особенностью в начале координат. Задача рассматривается в полушаре с удаленной из него конической областью. Найдены в явном виде собственные значения и соответствующие им собственные функции, а также выяснен характер поведения этих функций вблизи начала координат.

2. Постановка задачи. Пусть $B(R_0) = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 < R_0,\ z > 0\}$ – часть шара с центром в точке $O(0, 0, 0)$ радиуса R_0, расположенная в полупространстве $z > 0$ пространства E^3, и пусть K_ω – коническая область, границей которой является часть конуса $x \operatorname{tg}\omega = \sqrt{y^2+z^2}$ при $\omega \in (\pi/2, \pi)$, $x < 0$. Положим $\Omega = B(R_0)\setminus\overline{K}_\omega$ (черта сверху обозначает замыкание множества в E^3), $\Gamma = \partial\Omega$ (рис. 1). Часть границы Γ, для точек которой $z > 0$, обозначим через Γ^+ и пусть $\Gamma_0 = \Gamma\setminus\overline{\Gamma^+}$.

В области Ω рассмотрим задачу на собственные значения (СЗ) вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{k}{z}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{E}{r^2}u = \lambda u, \quad (x,y,z) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\overline{\Gamma^+}} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\Gamma_0} = 0, \tag{3}$$

где k и E – вещественные числа, причем $k > 0$, $E \geq 0$; $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Решения задачи (1) – (3) ищутся в классе функций $C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_0) \cap C(\overline{\Omega})$. Нетрудно видеть, что все СЗ λ этой задачи положительны. Требуется найти данные значения и отвечающие им собственные функции (СФ).

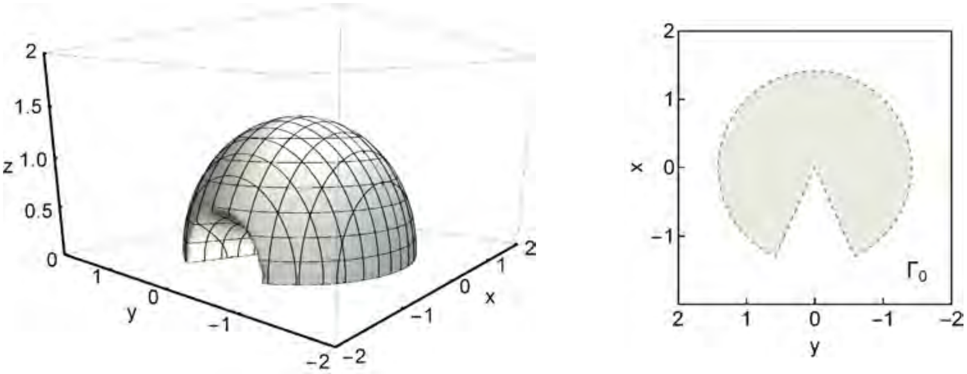

Рис. 1. Модельная трехмерная область Ω (слева) и часть границы Γ_0 в плоскости $z = 0$ (справа) при $\operatorname{tg}\omega = -0.2$ и $R_0 = 2$

Fig. 1. Model three-dimensional domain Ω (left) and part of the boundary Γ_0 in the plane $z = 0$ (right) at $\operatorname{tg}\omega = -0.2$ and $R_0 = 2$

3. Решение спектральной задачи. Перейдём в исследуемой задаче к сферическим координатам по формулам

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\sin\theta\sin\phi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

и положим $v(r,\theta,\phi) = u(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi)$. Тогда граничное условие (3) с учетом явного вида частной производной

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta\sin\phi + \frac{\partial v}{\partial\phi}\,\frac{1}{r}\,\frac{\cos\phi}{\sin\theta} + \frac{\partial v}{\partial\theta}\,\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi$$

переходит в граничное условие

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial\phi}\right|_{\phi=\pi} = 0, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \omega.$$

В результате такого перехода получаем краевую задачу для функции $v(r,\theta,\phi)$ в параллелепипеде $\Pi = \{(r,\theta,\phi) : 0 \leq r \leq R_0,\ 0 \leq \theta \leq \omega,\ 0 \leq \phi \leq \pi\}$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{k+2}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + (k+1)\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2} + k\operatorname{ctg}\phi\,\frac{\partial v}{\partial\phi}\right) - \right.\\ \left. - Ev + \lambda r^2 v\right) = 0, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \omega, \quad 0 < \phi < \pi,\end{gathered} \tag{4}$$

$$v(R_0,\theta,\phi) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \omega, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \tag{5}$$

$$v(r,\omega,\phi) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\phi}(r,\theta,0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial\phi}(r,\theta,\pi) = 0, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \omega. \tag{7}$$

Следуя [9, 11], задачу (4) – (7) будем решать методом разделения переменных, полагая $v(r,\theta,\phi) = R(r)\Phi(\theta,\phi)$. В результате такого разделения переменных приходим к спектральным задачам для радиальной и угловой компонент.

Угловая компонента $\Phi(\theta,\phi)$ является решением задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{gathered}
-\Delta_{\theta\phi}\Phi = \mu\Phi, \quad 0 < \theta < \omega, \quad 0 < \phi < \pi, \\
\Phi(\omega,\phi) = 0, \quad 0 \le \phi \le \pi, \\
|\Phi(\theta,\phi)| \le S(\mu), \quad 0 \le \theta \le \omega, \quad 0 \le \phi \le \pi, \\
\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right|_{\phi=\pi} = 0, \quad 0 < \theta < \omega, \\
\Delta_{\theta\phi} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + (k+1)\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + k\operatorname{ctg}\phi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right),
\end{gathered} \tag{8}$$

где $S(\mu)$ – верхняя грань для модуля функции $\Phi(\theta,\phi)$ на прямоугольнике $[0,\omega]\times[0,\pi]$. Интегрированием по частям легко убедиться, что задача (8) может иметь нетривиальные решения только при $\mu > 0$. Для нахождения радиальных составляющих $R(r)$, отвечающих фиксированному μ, получаем задачу Штурма – Лиувилля вида

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{k+2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{E+\mu}{r^2}\right)R = 0, \quad r > 0, \tag{9}$$

$$R(R_0) = 0, \quad R(r) \in C[\,0,R_0\,]. \tag{10}$$

Для решения задачи (8) также применим метод разделения переменных. Полагая $\Phi(\theta,\phi) = \Psi(\phi)\,\Theta(\theta)$, приходим к следующим двум краевым задачам:

$$\begin{gathered}
-\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} - k\operatorname{ctg}\phi\,\frac{d\Psi}{d\phi} = \nu\Psi, \quad 0 < \phi < \pi, \\
\left.\frac{d\Psi}{d\phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{d\Psi}{d\phi}\right|_{\phi=\pi} = 0,
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + (k+1)\operatorname{ctg}\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta} + \left(\mu - \frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0, \quad 0 < \theta < \omega, \\
\Theta(\omega) = 0, \quad |\Theta(\theta)| \le S(\mu,\nu),
\end{gathered} \tag{12}$$

где $S(\mu,\nu)$ – верхняя грань для модуля функции $\Theta(\theta)$ на отрезке $[\,0,\omega\,]$. Везде далее будем считать, что параметр $k > 1$ и не является нечётным числом.

Решение задачи (11) известно [5]. При выполнении условия $k > 1$ нетривиальные решения существуют только при значениях $\nu = \nu_n = n(n+k)$, $n = 0,1,\ldots$, при этом соответствующие СФ $\Phi_n(\phi)$ с точностью до постоянных множителей имеют вид

$$\Psi_n(\phi) = (\sin\phi)^{(1-k)/2}\mathrm{P}^{(1-k)/2}_{n+(k-1)/2}(\cos\phi), \quad n = 0,1,\ldots. \tag{13}$$

Символом вида $\mathrm{P}^q_t(\cos\phi)$ в формуле (13) обозначена функция Лежандра первого рода от аргумента $\cos\phi$, определённая на разрезе [2]. В работе [5] также показано, что функции $\Phi_n(\phi)$ являются алгебраическими многочленами от $\cos\phi$.

Рассмотрим теперь задачу (12) при фиксированном ν_n. Делая замену переменной $t = \cos\theta, \cos\omega \le t \le 1$ и вводя новую функцию с помощью соотношения $\Theta(\theta) = \Theta(\arccos t) = \tilde{\Theta}(t)$, получаем для функции $\tilde{\Theta}(t)$ краевую задачу

$$(1-t^2)\frac{d^2\tilde{\Theta}}{dt^2} - (k+2)\,t\,\frac{d\tilde{\Theta}}{dt} + \left(\mu - \frac{\nu_n}{1-t^2}\right)\tilde{\Theta} = 0, \quad \cos\omega \le t < 1,$$

$$\tilde{\Theta}(\cos\omega) = 0, \quad |\tilde{\Theta}(t)| \le S(\mu,\nu), \quad \cos\omega \le t \le 1,$$

где $S(\mu,\nu)$ – верхняя грань для модуля функции $\tilde{\Theta}(t)$ на отрезке $[\,\cos\omega,1\,]$. Определим новую функцию по формуле $\tilde{\Theta}(t) = (1-t^2)^{-k/4}\,T(t)$ и представим параметр μ в виде $\mu = \alpha(\alpha+k+1)$ при условии $\alpha > 0$. Тогда функция $T(t)$ должна удовлетворять уравнению для присоединённых функций Лежандра [2]

$$(1-t^2)\frac{d^2T}{dt^2} - 2t\,\frac{dT}{dt} + \left(\left(\alpha + \frac{k}{2}\right)\left(\alpha + \frac{k}{2} + 1\right) - \frac{(n+k/2)^2}{1-t^2}\right)T = 0. \tag{14}$$

Общее решение (14) ищем в виде:

$$T(t) = D_1\,\mathrm{P}^{\pm(n+k/2)}_{\alpha+k/2}(t) + D_2\,\mathrm{Q}^{\pm(n+k/2)}_{\alpha+k/2}(t), \tag{15}$$

где D_1, D_2 – произвольные постоянные; $\mathrm{P}^{\pm(n+k/2)}_{\alpha+k/2}(t)$ и $\mathrm{Q}^{\pm(n+k/2)}_{\alpha+k/2}(t)$ – функции Лежандра первого и второго рода, определенные на разрезе, линейно независимые на отрезке $[\cos\omega, 1]$. Поскольку функции $\Theta(\theta)$ и $T(t)$ связаны соотношением $\Theta(\theta) = (\sin\theta)^{-k/2}\,T(\cos\theta)$, то общее решение уравнения (12) будет иметь вид

$$\Theta(\theta) = D_1(\sin\theta)^{-k/2}\mathrm{P}^{\pm(n+k/2)}_{\alpha+k/2}(\cos\theta) + D_2(\sin\theta)^{-k/2}\,\mathrm{Q}^{\pm(n+k/2)}_{\alpha+k/2}(\cos\theta). \tag{16}$$

Из двух функций Лежандра первого рода в представлении (16) возьмём функцию с отрицательным верхним индексом, поскольку

$$\mathrm{P}^{-n-k/2}_{\alpha+k/2}(\cos\theta) \sim \frac{(\sin(\theta/2))^{n+k/2}}{\Gamma(n+k/2+1)} \quad \text{при} \quad \theta \to 0.$$

В случае функции Лежандра второго рода оставим в (16) функцию с положительным верхним индексом, т. к.

$$\mathrm{Q}^{n+k/2}_{\alpha+k/2}(\cos\theta) \sim 2^{(2n+k)/4-1}\,\Gamma\!\left(n+\frac{k}{2}\right)\cos\!\left(\pi n + \frac{\pi k}{2}\right)(1-\cos\theta)^{-(2n+k)/4} \ \text{ при } \ \theta \to 0,$$

и поскольку k не является нечетным числом, то $\mathrm{Q}^{n+k/2}_{\alpha+k/2}(\cos\theta) \to \infty$ при $\theta \to 0$ [2]. Ввиду неограниченности функций $(\sin\theta)^{-k/2}\,\mathrm{Q}^{n+k/2}_{\alpha+k/2}(\cos\theta)$ в окрестности точки $\theta = 0$ получаем, что постоянная $D_2 = 0$. Таким образом, ограниченные решения уравнения (12) с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$\Theta_n(\theta) = (\sin\theta)^{-k/2}\mathrm{P}^{-n-k/2}_{\alpha+k/2}(\cos\theta).$$

Учитывая краевое условие (12), находим требуемые значения параметра α как положительные решения уравнения

$$\mathrm{P}^{-n-k/2}_{\alpha+k/2}(\cos\omega) = 0. \tag{17}$$

Пусть $\alpha = \alpha_{n,m}$, $m = 1, 2, \ldots$ – все его положительные решения, занумерованные, для определенности, в порядке возрастания [3, 7]. Тогда любое решение задачи Штурма – Лиувилля (12) с точностью до постоянного множителя может быть записано в виде

$$\Theta_{n,m}(\theta) = (\sin\theta)^{-k/2}\mathrm{P}^{-n-k/2}_{\alpha_{n,m}+k/2}(\cos\theta), \quad \mu_{n,m} = \alpha_{n,m}(\alpha_{n,m}+k+1), \tag{18}$$

а, следовательно, решения задачи (8) даются формулами

$$\begin{gathered}\Phi_{n,m}(\theta,\phi) = (\sin\phi)^{(1-k)/2}(\sin\theta)^{-k/2}\mathrm{P}^{(1-k)/2}_{n+(k-1)/2}(\cos\phi)\mathrm{P}^{-n-k/2}_{\alpha_{n,m}+k/2}(\cos\theta),\\ \phi \in (0,\pi), \theta \in (0,\omega\,],\\ \mu_{n,m} = \alpha_{n,m}(\alpha_{n,m}+k+1), \quad n = 0,1,\ldots, \quad m = 1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{19}$$

Для $\phi = 0$, $\phi = \pi$ и $\theta = 0$ функции $\Phi_{n,m}(\theta,\phi)$ доопределяются по непрерывности.

Решим теперь задачу (9) – (10) для каждого найденного $\mu_{n,m}$. Переходя в уравнении (9) к новой функции с помощью соотношения

$$R(r) = \overline{R}(r)\,r^{-(k+1)/2}$$

и производя затем при фиксированном λ замену переменной $z = \sqrt{\lambda}\,r$, получаем, что функция $Y(z) = \overline{R}(z/\sqrt{\lambda})$ удовлетворяет уравнению Бесселя [Лебедев, 1963] вида

$$Y'' + \frac{1}{z}\,Y' + \left(1 - \frac{E + (\alpha_{n,m} + (k+1)/2)^2}{z^2}\right)Y = 0.$$

Граничное условие (10) позволяет записать решения $Y(z)$ через функцию Бесселя первого рода $J_{s(n,m)}(z)$ порядка

$$s(n,m) = \sqrt{E + (\alpha_{n,m} + (k+1)/2)^2}, \tag{20}$$

а значит, радиальные составляющие $R(r)$ решения $v(r,\theta,\phi)$ с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$R_{n,m}(r) = r^{-(k+1)/2}J_{s(n,m)}(\sqrt{\lambda}\,r).$$

Из граничного условия (10) находим СЗ искомой задачи

$$\lambda_{n,m,l} = \left(\frac{\beta_{s(n,m),l}}{R_0}\right)^2, \tag{21}$$

где $\beta_{s(n,m),l}$ – l–й положительный корень уравнения $J_{s(n,m)}(\beta) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots$. Поэтому радиальные составляющие решений $v(r, \theta, \phi)$ определяются формулой

$$R_{n,m,l}(r) = r^{-(k+1)/2} J_{s(n,m)}\left(\frac{\beta_{s(n,m),l}}{R_0}\, r\right), \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Собственные значения спектральной задачи* (1) – (3) *определяются формулой* (21)*, а соответствующие им собственные функции, записанные в сферической системе координат, имеют вид*

$$u_{n,m,l}(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi) = D_{n,m,l}\, R_{n,m,l}(r)\, \Phi_{n,m}(\theta,\phi), \tag{23}$$

где $D_{n,m,l}$ *– произвольные ненулевые постоянные; функции* $R_{n,m,l}(r)$ *и* $\Phi_{n,m}(\theta,\phi)$ *определяются формулами* (22) *и* (19)*, соответственно.*

Отметим, что при $t \to 0$ справедливо соотношение $J_\rho(t) \sim t^\rho\, 2^{-\rho}\, (\Gamma(1+\rho))^{-1}$, $\rho > 0$, $t > 0$ [6]. Положим

$$\epsilon(n,m) = \sqrt{E + (\alpha_{n,m} + (k+1)/2)^2} - (k+1)/2, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Из (22) теперь следует, что при $r \to 0$ каждая собственная функция $u_{n,m,l}(x, y, z)$ представляет собой величину $O(r^{\epsilon(n,m)})$ и положительный показатель $\epsilon(n,m)$ тем больше, чем больше параметр E.

Утверждение теоремы справедливо и в том случае, когда спектральная задача рассматривается в области $\Omega = B(R_0) \cap K_\omega$, где K_ω – коническая область, границей которой является часть конуса $x \operatorname{tg}\omega = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x > 0$, $\omega \in (0, \pi/2)$. Вид СЗ и СФ сохраняется.

Рассмотрим теперь спектральную задачу того же вида в четверти шара, т. е. в пространственной области $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2,\ z > 0,\ x > 0\}$, являющейся пересечением полушара $B(R_0)$ с полупространством $x > 0$. В этом случае краевое условие $\Theta(\pi/2) = 0$ в задаче (12) приводит к нахождению положительных корней уравнения

$$\mathrm{P}^{-n-k/2}_{\alpha+k/2}(0) = 0. \tag{24}$$

Известно [13], что при любых μ и ν справедливо соотношение

$$\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(0) = \frac{2^\mu \sqrt{\pi}}{\Gamma((1-\mu-\nu)/2)\Gamma(1+(\nu-\mu)/2)}, \tag{25}$$

правая часть которого обращается в нуль, если аргумент хотя бы одной из гамма-функций, записанных в знаменателе, совпадает с каким-либо полюсом гамма-функции. Учитывая (25), получаем, что уравнение (24) равносильно уравнению

$$\frac{2^{-n-k/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma((1+n-\alpha)/2)\Gamma(1+(\alpha+n+k)/2)} = 0,$$

из которого следует, что

$$\alpha = \alpha_{n,m} = n + 2m + 1, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{26}$$

Таким образом, в задаче для четверти шара вид корней $\alpha_{n,m}$ можно уточнить. Все они определяются соотношением (26), при этом формулы (19), (21) – (23) сохраняются. Все СЗ $\lambda_{n,m,l}$, отвечающие индексам n, m, таким, что $n + 2m \geq 2$, являются кратными.

4. Обсуждение результатов. Нахождение СЗ и СФ спектральной задачи (1) – (3) начинается с численного решения уравнения (17). Параметры в уравнении (1) приняты следующие: $k = 2$ и $E = 1$. На рис. 2 представлены корни $\alpha_{n,m}$ при фиксированных значениях $\omega = \pi/2$ (пунктирные линии) и $\omega = 7\pi/10$ (сплошные линии). С ростом ω величина корней уменьшается при сохранении их взаимного расположения для фиксированного n. Результаты численного счета совпадают с уточнением (26) в случае модельной области в виде четверти шара. Очевидно, $\alpha_{n,m}$ оказываются кратными. Аналогичное свойство корней было установлено для двумерной модельной области с углом раствора $\omega = \pi/2$. Отличительной особенностью задачи в трехмерной области от двумерного случая является, во-первых, вырождение некоторых корней $\alpha_{n,m}$ при $\omega \to \pi$, для которых положительные приращения индексов удовлетворяют условиям $\Delta n = \Delta m = 1$ и $n + m > 1$ (рис. 3). Во-вторых, зависимости $\alpha_{n,m}(\omega)$ нельзя аппроксимировать функцией $\pi l/\omega - 1$ [4].

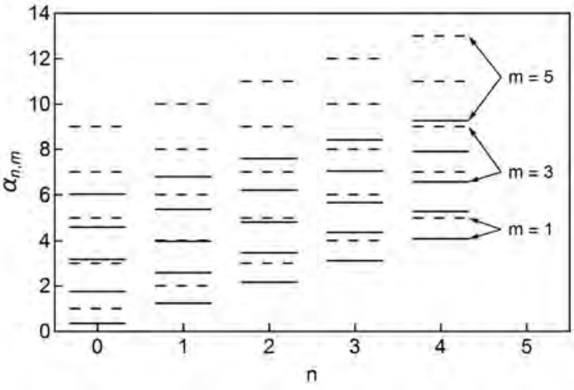

Рис. 2. Корни $\alpha_{n,m}$ уравнения (17) для первых 5 значений по n и m
Fig. 2. Roots $\alpha_{n,m}$ of equation (17) for first 5 values of n and m

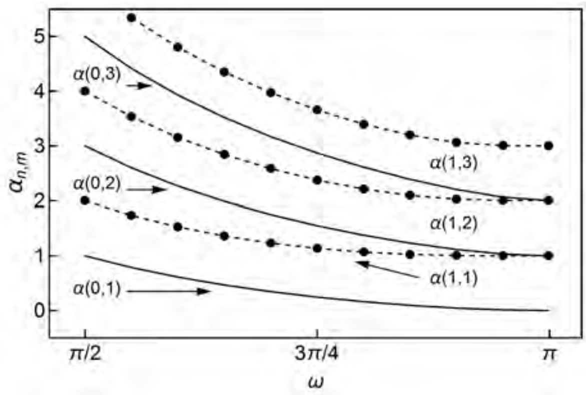

Рис. 3. Корни $\alpha_{n,m}$ уравнения (17) как функции угла ω
Fig. 3 Roots $\alpha_{n,m}$ of equation (17) versus angle ω

На основе полученных $\alpha_{n,m}$ с учетом (20) выполнено численное решение трансцендентного уравнения $J_{s(n,m)}(\beta) = 0$, корни которого необходимы для вычисления СЗ (21). На рис. 4 представлен спектр рассматриваемой задачи $\lambda_{n,m,l}$ при различных значениях угла ω. Установленные закономерности указывают на вырождение СЗ при $\omega \to \pi$, для которых выполняются условия $\Delta n = \Delta m = 1, 2\dots$ и $\Delta l = 0$, где Δl – приращение индекса l при фиксированных n и m. Это можно наблюдать на примере $\lambda_{1,1,1}$ и $\lambda_{0,2,1}$, $\lambda_{0,4,1}$ и $\lambda_{2,2,1}$ и т. п. В случаях, когда $\Delta n = \Delta m = \Delta l$, СЗ становятся вырожденными только при одном фиксированном значении угла ω. Например, при ω близких к $\pi/2$ ($\omega > \pi/2$), выполняется неравенство $\lambda_{1,2,1} > \lambda_{0,1,1}$, при $\omega \approx 0.51884\,\pi$ СЗ вырождаются, а далее с ростом ω получаем $\lambda_{1,2,1} < \lambda_{0,1,1}$. Аналогично СЗ $\lambda_{0,1,3}$ и $\lambda_{1,2,2}$ вырождаются при $\omega \approx 0.58718\,\pi$.

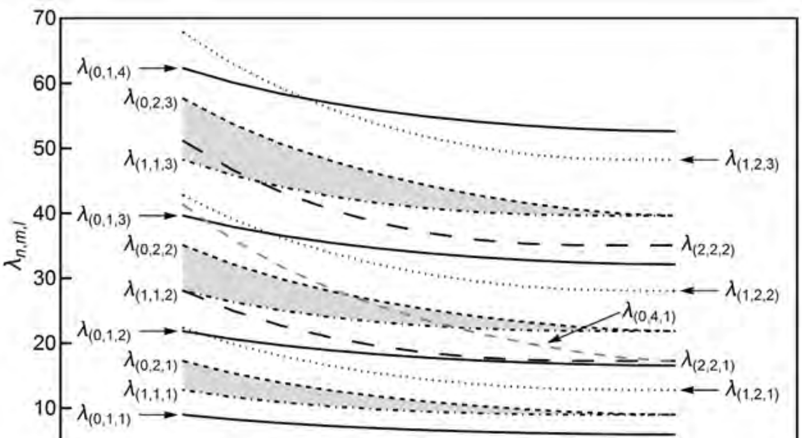

Рис. 4. Собственные значения $\lambda_{n,m,l}$ как функции угла ω
Fig. 4. Eigenvalues $\lambda_{n,m,l}$ versus angle ω

В остальных случаях сочетания индексов СЗ n, m и l рост индекса m приводит к многократному вырождению для пар СЗ при изменении угла ω. Для примера на рис. 4 представлен график зависимости $\lambda_{0,4,1}(\omega)$, который пересекает аналогичные кривые для $\lambda_{0,1,3}$, $\lambda_{0,2,2}$, $\lambda_{1,1,2}$ и $\lambda_{2,2,1}$ при $\omega \approx 0.58718$, 0.66603, 0.77547 и π, соответственно. Данная особенность перестройки СЗ указывает на то, что конфигурация спектра задачи (1)–(3) существенным образом зависит от угла раствора конической области K_ω.

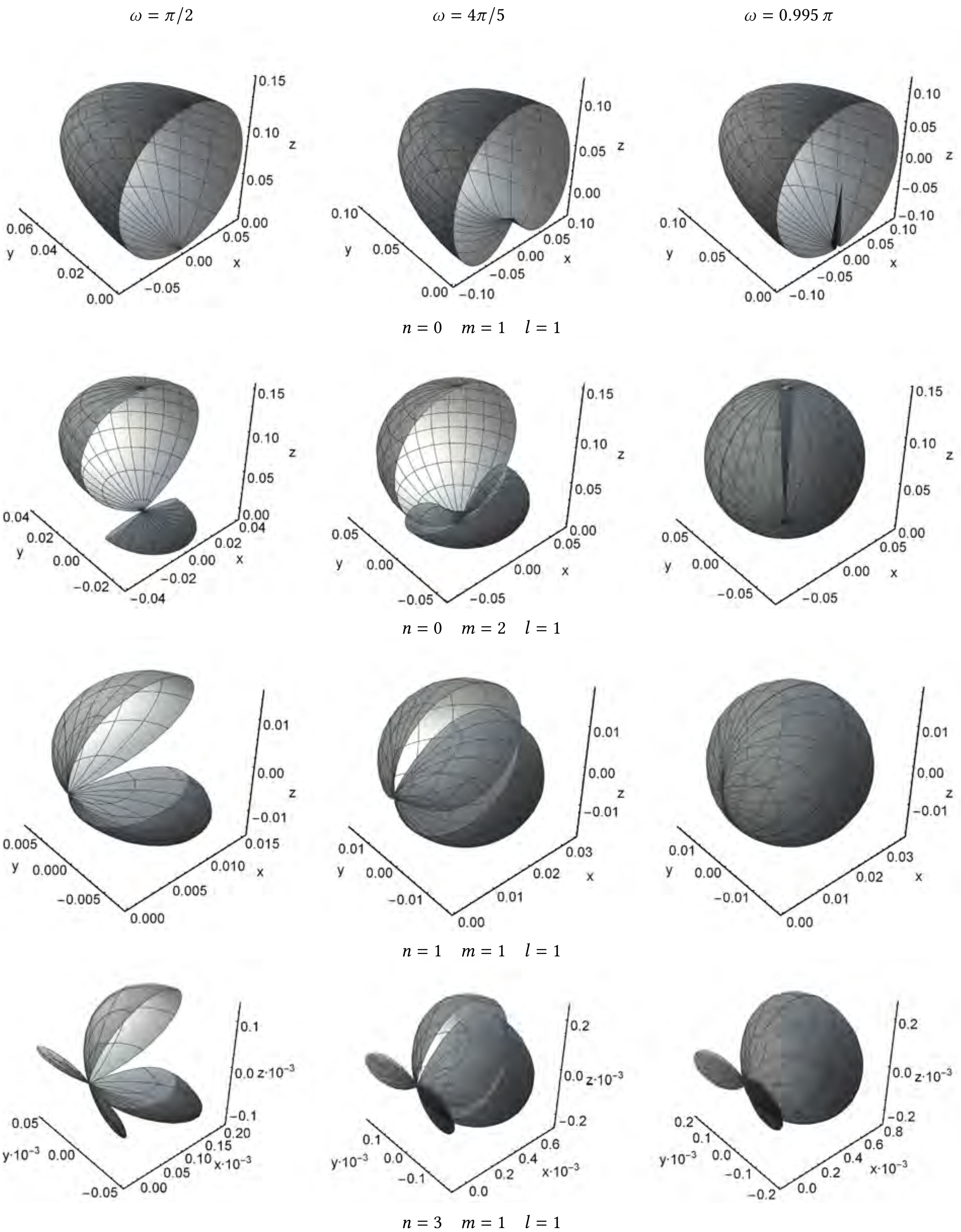

Рис. 5. Собственные функции (23) при различных индексах n, m и l

Fig. 5. Eigenfunctions (23) for various indexes n, m and l

На рис. 5 представлены графики СФ (23) в сферической системе координат, где значения на координатных осях соответствуют $x = u_{n,m,l} \sin\theta \cos\phi$, $y = u_{n,m,l} \sin\theta \sin\phi$ и $z = u_{n,m,l} \cos\theta$; $D_{n,m,l} = 1$. Угол $\theta = 0$ соответствует «северному полюсу» графика, $\theta = \omega$ – «южному». По столбцам углы ω принимают значения: $\pi/2$, $4\pi/5$ и 0.995π. Значения индексов n, m и l приведены на рисунке. Форма СФ определяется, как и в случае двумерной модельной области, угловой компонентой, тогда как радиальная компонента влияет только на величину $u_{n,m,l}$. На полуинтервале $\omega \in [\pi/2, \pi)$ наблюдается трансформация СФ для всех $\lambda_{n,m,l}$ к случаю, который получается при рассмотрении в качестве модельной области полушара $\Omega = B(R_0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0,\ z > 0\}$ с граничным условием Неймана (3) на участке границы Γ_0.

5. Заключение. В работе выполнено исследование спектральной задачи для сингулярного эллиптического дифференциального оператора второго порядка специального вида в трехмерной модельной области в виде полушара с вырезанным конусом K_ω. Установлены особенности перестройки спектра дифференциального оператора при изменении угла раствора ω конической области. В частности, определены случаи вырождения собственных значений в зависимости от сочетания индексов (n, m, l) и величины угла ω. Получен явный вид собственных функций и показана их трансформация при изменении модельной области.

Список литературы

1. Бабенко К. И. 1986. Основы численного анализа. М., Наука, 744.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции Т. 1. М., Наука, 296.
3. Гобсон Е. В. 1952. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 476.
4. Королев Н. В., Ларин А. А. 2020. Об одной спектральной задаче в плоском угле для сингулярного эллиптического дифференциального оператора второго порядка. Прикладная математика и физика, 52(2): 86–92. DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-2-86-92.
5. Ларин А. А., Кириллов В. П. 2017. Задача на собственные значения для одного обыкновенного дифференциального оператора с сингулярным коэффициентом. Сборник трудов X международной конференции «ПМТУКТ–2017». Воронеж, Научная книга, 221–225.
6. Лебедев Н. Н. 1963. Специальные функции и их приложения. М., ФизМатГиз, 358.
7. Михлин С. Г. 1966. Численная реализация вариационных методов. М., Наука, 432.
8. Михлин С. Г. 1970. Вариационные методы в математической физике. М., Наука, 512.
9. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. 1984. Специальные функции математической физики. М., Наука, 344.
10. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. 1993. Лекции по математической физике. М., МГУ, 352.
11. Титчмарш Э. Ч. 1961. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка Ч. 2. М., ИЛ, 554 с.
12. Grisvard P. 1985. Elliptic problems in nonsmooth domains. London, Pitman Publishing Limited, 410.
13. Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. 2010. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge, Cambridge University Press, 951.

References

1. Babenko K. I. 1986. Osnovy chislennogo analiza [Numerical Analysis Basics]. M., Nauka, 744.
2. Bateman H., Erdelyi A. 1953. Higher transcendental functions V. 1. New York, McGraw-Hill, 325. (in Russian)
3. Hobson E. W. 1931. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge, Cambridge University Press, 500. (in Russian)
4. Korolev N. V., Larin A. A. 2020. Ob odnoy spektral'noy zadache v ploskom ugle dlya singulyarnogo ellipticheskogo differentsial'nogo operatora vtorogo poryadka [On a spectral problem in a plane angle for a singular second-order elliptic differential operator]. Prikoadnaya matematika & fizika, 52(2): 86–92. DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-2-86-92.

5. Larin A. A., Kirillov V. P. 2017. Zadacha na sobstvennye zhacheniya dlya odnogo obyknovennogo differencial'nogo operatora s singulyarnym koefficientom [Eigenvalue problem for one ordinary differential operator with a singular coefficient]. Sbornik trudov X mezhdunarodnoy kon-ferentsii «PMTUKT–2017». Voronezh, Nauchnaya kniga, 221–225.

6. Lebedev N. N. 1963. Spetsial'nye funkcii i ikh prilozheniya [Special functions and their applications]. M., FizMatGiz, 358.

7. Mikhlin S. G. 1966. Chislennaya realizatsiya variacionnykh metodov [Numerical implementation of variational methods]. M., Nauka, 432.

8. Mikhlin S. G. 1970. Variacionnye metody v matematicheskoy fizike [Variational methods in mathematical physics]. M., Nauka, 512.

9. Nikiphorov A. F., Uvarov V. B. 1984. Special'nye funkcii matematicheskoi fiziki [Special functions of mathematical physics]. M., Nauka, 344.

10. Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., Kravtsov V. V. 1993. Lektsii po matematicheskoy fizike [Lectures on Mathematical Physics]. M., MGU, 352.

11. Titchmarsh E. C. 1958. Eigenfunction expansions associated with second-order equations Ch. 2. Oxford, Clarendon Press, 404.

12. Grisvard P. 1985. Elliptic problems in nonsmooth domains. London, Pitman Publishing Limited, 410.

13. Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. 2010. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge, Cambridge University Press, 951.

Получена 25.07.2020

Королев Никита Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации

http://orcid.org/0000-0001-7670-0466
ул. Старых Большевиков, 54а, Воронеж, 394064, Россия
E-mail: korolevn33@yandex.ru

Ларин Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации

http://orcid.org/0000-0002-8064-1232
ул. Старых Большевиков, 54а, Воронеж, 394064, Россия
E-mail: dohiorv@yandex.ru