Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 4. С. 313–329.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 4. P. 313–329.

УДК 517.9
MSC [2010] 34H05, 34B08, 34E15
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-313-329

Новый алгоритм построения асимптотического решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния

[1,2] **Курина Г. А.**, [3] **Хоай Н. Т.**
(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком)

[1] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1

[2] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 44/2
kurina@math.vsu.ru

[3] Научный Университет, Вьетнамский Национальный Университет,
Вьетнам, г. Ханой, Нгуен Трай, 334
nguyenthihoai@hus.edu.vn

Посвящается светлой памяти А. Б. Васильевой (1926 - 2018) и В. Ф. Бутузова (1939 - 2021)

Аннотация. В работе рассматривается новый метод построения асимптотических приближений любого порядка для решения задачи, полученной из условий оптимальности для сингулярно возмущенных задач оптимального управления со слабым управлением и пересекающимися в одной внутренней точке траекториями вырожденного уравнения состояния для медленной переменной при наличии двух различных решений вырожденного уравнения состояния для быстрой переменной относительно этой переменной. Асимптотика содержит регулярные функции и пограничные функции четырех типов, две из которых существенны в окрестности точки пересечения. Предлагаемый метод построения асимптотики основан на решении задач с фиксированным условием в начале или в конце рассматриваемого промежутка для аргумента.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярные возмущения, критический случай

Благодарности: Работа Г. А. Куриной поддержана РНФ, грант 21-11-00202. Статья написана во время работы авторов во Вьетнамском институте перспективных исследований в области математики (VIASM). Авторы благодарят VIASM за создание плодотворной исследовательской среды во время визита.

Для цитирования: Курина Г. А., Хоай Н. Т. 2023. Новый алгоритм построения асимптотического решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 313–329. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-313-329

Original Research

A New Algorithm of Constructing Asymptotic Solution of Singularly Perturbed Optimal Control Problems with Intersecting Trajectories of Degenerate State Equation

Galina A. Kurina, **Nguyen T. Hoai**
(*Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak*)

[1] Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018, Russia

[2] Federal Research Center "Computer Science and Control"of Russian Academy of Sciences,
44/2 Vavilova st., Moscow, 119333, Russia
kurina@math.vsu.ru

[3] University of Science, Vietnam National University,
334, Nguyen Trai, Hanoi, Vietnam
nguyenthihoai@hus.edu.vn

Abstract. The paper deals with a new method of constructing asymptotic approximations of any order to a solution of a two-point boundary value problem following from control optimality conditions for singularly perturbed optimal control problems with a weak control in a critical case. Namely, differential state equations contain a small parameter before a derivative for fast variables. If this parameter is equal to zero, then the degenerate state equation for the fast variable has two different solutions with respect to this fast variable and some corresponding trajectories for slow variables intersect each other at one internal point. The asymptotics contains regular functions, depending on the original argument, and boundary functions of four types, two of them are essential in a vicinity of the intersection point. The suggested new method of asymptotics construction is based on solving equations with a fixed value in the initial point or in the end point of the considered interval for the independent variable. Solutions of boundary value problems are not used.

Keywords: Optimal Control, Singular Perturbations, Critical Case

Acknowledgements: The work of Galina Kurina was supported by the Russian Science Foundation, Project No. 21-11-00202.

For citation: Kurina G. A., Hoai N. T. 2023. A New Algorithm of Constructing Asymptotic Solution of Singularly Perturbed Optimal Control Problems with Intersecting Trajectories of Degenerate State Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 313–329. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-313-329

1. Введение. В зависимости от типа задачи и целей исследования для изучения сингулярно возмущенных задач используются разные методы (см., например, [1, 2, 3, 4, 5]). Иногда разные методы комбинируют друг с другом. В частности, найденные асимптотические приближения решения могут быть использованы в итерационных методах в качестве начальных приближений.

При асимптотическом анализе сингулярно возмущенных задач с малым параметром при производной часто предполагается, что вырожденное уравнение (при нулевом значении параметра) однозначно разрешимо относительно быстрой переменной (стандартный или некритический случай). Такая же ситуация имеет место в теории сингулярно возмущенных задач оптимального управления (см. обзоры [6, 7, 8]).

Если же вырожденное уравнение не разрешимо однозначно относительно быстрой переменной, задача усложняется (нестандартный или критический случай). Такое классическое определение критического случая дано, например, в [9]. Критический случай изучался и для задач оптимального управления, например, в [10, 11].

Траектории вырожденной задачи могут быть пересекающими, как в химической кинетике при моделировании быстрых бимолекулярных реакций [12, 13]. Асимптотическое поведение решений различных типов начальных и краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений с пересекающимися траекториями вырожденной задачи изучалось, например, в [1, 12, 13, 14, 15].

Насколько нам известно, сингулярно возмущенные задачи оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния впервые изучались в [16]. В этой работе медленные и быстрые переменные состояния, а также управление были скалярными, и только асимптотическое приближение нулевого порядка к оптимальному управлению и первого порядка к оптимальной траектории были построены при помощи так называемого метода прямой схемы, состоящего из непосредственной подстановки постулируемого асимптотического разложения решения в условие задачи и получении серии задач для нахождения членов асимптотики. Задача из [16] рассматривалась также в [17]. В отличие от [16], в [17] для построения асимптотического решения исследуемой задачи оптимального управления используется асимптотическое решение двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления. Предлагаемый в [17] алгоритм построения асимптотики основан на решении краевых задач. Следует отметить, что статья [17] опубликована в трудах конференции, поэтому изложение достаточно краткое, например, подробно обсуждается только построение асимптотического приближения первого порядка.

Задача вариационного исчисления с контрастной структурой типа ступеньки, в асимптотике решения которой присутствуют пограничные функции, существенные в окрестности внутренней точки, изучалась в [18].

В настоящей статье мы рассматриваем обобщение на случай многомерной медленной переменной задачи из [16] и [17], где вырожденное уравнение состояния для быстрой переменной имеет два решения и некоторые соответствующие им траектории состояния для медленной переменной пересекаются в одной внутренней точке. В отличие от [16] и [17], будет представлено детальное изложение алгоритма построения асимптотического решения любого порядка краевой задачи, вытекающей из условий оптимальности управления. Асимптотика содержит регулярные функции, зависящие от исходного аргумента, и пограничные функции четырех типов, два из которых существенны в окрестности точки пересечения. Алгоритм асимптотического решения, предложенный в этой статье, проще, чем алгоритм в [17], основанный на решении краевых задач, поскольку в новом алгоритме используются решения уравнений с заданным условием в начале или в конце рассматриваемого промежутка независимой переменной. В статье также приводится пример, подробно иллюстрирующий построение асимптотического решения первого порядка с помощью предложенного алгоритма.

Асимптотическое решение краевой задачи было построено в [1] при условиях, аналогичных предположениям в этой статье, но быстрая переменная там является скалярной в отличие от рассматриваемой здесь двухточечной краевой задачи с двумя быстрыми переменными. Алгоритм построения асимптотики в настоящей статье отличается от [1], где сначала рассматривается асимптотика вспомогательной задачи, содержащей пограничные функции двух типов, существенные в окрестности внутренней точки пересечения.

На протяжении всей статьи $\varepsilon > 0$ – малый параметр, штрих означает транспонирование, а коэффициент при ε^i в разложении любой функции, например, f по целым неотрицательным степеням ε обозначается f_i.

2. Постановка задачи. Рассматриваем следующую задачу

$$P_\varepsilon\colon J_\varepsilon(u) = \int_0^T \left(F(t,\varepsilon)x + S(t,\varepsilon)y + \frac{1}{2}\varepsilon R(t,\varepsilon)u^2 \right) dt \to \min_u, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + B(t,\varepsilon)y + \varepsilon C(t,\varepsilon)u + f(t,\varepsilon), \\ \varepsilon\frac{dy}{dt} = G(x,y,t,\varepsilon) + \varepsilon D(t,\varepsilon)u, \end{gathered} \tag{2}$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \qquad x(T,\varepsilon) = x^T. \tag{3}$$

Здесь $t \in [0,T]$, $T > 0$ – фиксировано, $x = x(t,\varepsilon) \in \boldsymbol{R}^m$, $y = y(t,\varepsilon) \in \boldsymbol{R}$, $u = u(t,\varepsilon) \in \boldsymbol{R}$, $R(t,0) > 0$, все функции в (2), (3) имеют подходящий размер и достаточно гладкие относительно своих аргументов.

Если $\varepsilon = 0$, мы получаем из (3) вырожденное уравнение состояния

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = A_0(t)x + B_0(t)y + f_0(t), \\ 0 = G_0(x,y,t). \end{gathered} \tag{4}$$

Предположим, что выполняются шесть условий (I — VI).

I. Уравнение (4) имеет два решения относительно быстрой переменной: $y = y^1(x,t)$ и $y = y^2(x,t)$.

II. Задачи

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + B_0(t)y^1(x,t) + f_0(t), \qquad x(0) = x^0,$$
$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + B_0(t)y^2(x,t) + f_0(t), \qquad x(T) = x^T$$

имеют единственные решения $x^1(t)$ и $x^2(t)$ соответственно.

III. Кривые $x^1(t)$ и $x^2(t)$ пересекаются друг с другом в одной фиксированной точке $t = t_1 \in (0,T)$.

IV. $G_{y0}(x^1(t), y^1(x^1(t),t),t) > 0$ для $t \in [0,t_1]$ и $G_{y0}(x^2(t), y^2(x^2(t),t),t) < 0$ для $t \in [t_1,T]$.

V. Для любого y_0 решение задачи

$$\frac{d\Pi\tilde{y}}{d\tau_1} = G(x^2(t_1), \Pi\tilde{y}, t_1, 0), \qquad \tau_1 \geq 0, \qquad \Pi\tilde{y}(0) = y_0$$

удовлетворяет условию $\Pi\tilde{y}(\tau_1) \to y^2(x^2(t_1),t_1)$ при $\tau_1 \to +\infty$, и решение задачи

$$\frac{dQ\tilde{y}}{d\tau_1} = G(x^1(t_1), Q\tilde{y}, t_1, 0), \qquad \tau_1 \leq 0, \qquad Q\tilde{y}(0) = y_0$$

удовлетворяет условию $Q\tilde{y}(\tau_1) \to y^1(x^1(t_1),t_1)$ при $\tau_1 \to -\infty$.

VI. При достаточно малых ε задача P_ε имеет единственное решение, удовлетворяющее условию оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, состоящего из (3), (3) и соотношений, содержащих сопряженные переменные φ и ψ,

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi}{dt} = -A(t,\varepsilon)'\varphi - G_x(x,y,t,\varepsilon)'\psi + F(t,\varepsilon)', \\ \varepsilon\frac{d\psi}{dt} = -B(t,\varepsilon)'\varphi - G_y(x,y,t,\varepsilon)\psi + S(t,\varepsilon), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} R(t,\varepsilon)u = C(t,\varepsilon)'\varphi + D(t,\varepsilon)\psi, \\ \psi(0,\varepsilon) = 0, \qquad \psi(T,\varepsilon) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

(см., например, [19]).

При достаточно малых ε оптимальное управление определяется выражением

$$u = R(t,\varepsilon)^{-1}(C(t,\varepsilon)'\varphi + D(t,\varepsilon)\psi). \tag{7}$$

Некоторые достаточные условия принципа максимума Понтрягина приведены в [20].

Для построения асимптотики еще потребуется дополнительное условие VII, которое будет сформулировано позже.

3. Формализм построения асимптотики. Подставляя $u(t,\varepsilon)$ из (7) в (3), получаем двухточечную краевую задачу (3), (3), (5), (6) для определения функции $v(t,\varepsilon) = (x(t,\varepsilon)', \varphi(t,\varepsilon)', y(t,\varepsilon)\ , \psi(t,\varepsilon))'$. Асимптотическое решение полученной задачи будет построено в виде $v(t,\varepsilon) = \overset{(1)}{v}(t,\varepsilon)$ при $t \in [0,t_1]$ и $v(t,\varepsilon) = \overset{(2)}{v}(t,\varepsilon)$ для $t \in [t_1, T]$, где

$$\overset{(j)}{v}(t,\varepsilon) = \overset{(j)}{\bar{v}}(t,\varepsilon) + \overset{(j)}{\Pi} v(\tau_{j-1},\varepsilon) + \overset{(j)}{Q} v(\tau_j,\varepsilon), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1,2. \tag{8}$$

Здесь $\overset{(j)}{\bar{v}}(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(j)}{\bar{v}}_i(t)$, $\overset{(j)}{\Pi} v(\tau_{j-1},\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(j)}{\Pi}_i v(\tau_{j-1})$, $\overset{(j)}{Q} v(\tau_j,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(j)}{Q}_i v(\tau_j)$, $t_0 = 0$, $t_2 = T$, $\tau_j = (t - t_j)/\varepsilon$, $j = 0,1,2$. Черта означает регулярные функции, зависящие от t. Символы $\overset{(j)}{\Pi}$ и $\overset{(j)}{Q}$ обозначают пограничные функции экспоненциального типа существенные вблизи левого и правого концов отрезка $[t_{j-1}, t_j]$, зависящие от τ_{j-1} и τ_j соответственно, $j = 1,2$. Такие функции будем называть П-функциями и Q-функциями. Для построения асимптотического решения на $[0,t_1]$ будем использовать функцию $y^1(x,t)$, а на $[t_1,T]$ – $y^2(x,t)$.

Система (3), (3), (5)—(7) может быть записана в виде двух систем P_1 и P_2 (P_1 соответствует $j = 1$, P_2 соответствует $j = 2$)

$$\begin{aligned}
\frac{d\overset{(j)}{x}}{dt} &= A(t,\varepsilon)\overset{(j)}{x} + B(t,\varepsilon)\overset{(j)}{y} + \varepsilon W_1(t,\varepsilon)\overset{(j)}{\varphi} + \varepsilon W_2(t,\varepsilon)\overset{(j)}{\psi} + f(t,\varepsilon),\\
\frac{d\overset{(j)}{\varphi}}{dt} &= -A(t,\varepsilon)'\overset{(j)}{\varphi} - G_x(\overset{(j)}{x},\overset{(j)}{y},t,\varepsilon)'\overset{(j)}{\psi} + F(t,\varepsilon)',\\
\varepsilon\frac{d\overset{(j)}{y}}{dt} &= G(\overset{(j)}{x},\overset{(j)}{y},t,\varepsilon) + \varepsilon W_2(t,\varepsilon)'\overset{(j)}{\varphi} + \varepsilon W_3(t,\varepsilon)\overset{(j)}{\psi},\\
\varepsilon\frac{d\overset{(j)}{\psi}}{dt} &= -B(t,\varepsilon)'\overset{(j)}{\varphi} - G_y(\overset{(j)}{x},\overset{(j)}{y},t,\varepsilon)\overset{(j)}{\psi} + S(t,\varepsilon),\\
& t \in [t_{j-1}, t_j], \ j = 1,2,
\end{aligned} \tag{9}$$

($W_1(t,\varepsilon) = C(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)'/R(t,\varepsilon)$, $W_2(t,\varepsilon) = C(t,\varepsilon)D(t,\varepsilon)/R(t,\varepsilon)$, $W_3(t,\varepsilon) = D(t,\varepsilon)^2/R(t,\varepsilon)$) со следующими условиями при $t = 0$ для системы P_1

$$\overset{(1)}{x}(0,\varepsilon) = x^0, \quad \overset{(1)}{\varphi}(0,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \overset{(1)}{\varphi}_i, \quad \overset{(1)}{y}(0,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \overset{(1)}{y}_i, \quad \overset{(1)}{\psi}(0,\varepsilon) = 0, \tag{10}$$

и условиями при $t = T$ для системы P_2

$$\overset{(2)}{x}(T,\varepsilon) = x^T, \quad \overset{(2)}{\varphi}(T,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \overset{(2)}{\varphi}_i, \quad \overset{(2)}{y}(T,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \overset{(2)}{y}_i, \quad \overset{(2)}{\psi}(T,\varepsilon) = 0, \tag{11}$$

где значения $\overset{(j)}{\varphi}_i$, $\overset{(j)}{y}_i$, $j = 1,2$ и $i = 0,1,2,\ldots$, пока неизвестны.

В дальнейшем также будем использовать условие непрерывности решения в точке t_1, т.е.

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{x}(t_1,\varepsilon) &= \overset{(2)}{x}(t_1,\varepsilon), & \overset{(1)}{\varphi}(t_1,\varepsilon) &= \overset{(2)}{\varphi}(t_1,\varepsilon),\\
\overset{(1)}{y}(t_1,\varepsilon) &= \overset{(2)}{y}(t_1,\varepsilon), & \overset{(1)}{\psi}(t_1,\varepsilon) &= \overset{(2)}{\psi}(t_1,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{12}$$

Введем следующие обозначения

$$H(\overset{(1)}{x}(t_1,\varepsilon), \overset{(2)}{x}(t_1,\varepsilon)) = \overset{(1)}{x}(t_1,\varepsilon) - \overset{(2)}{x}(t_1,\varepsilon) = 0,$$

$$K(\overset{(1)}{\varphi}(t_1,\varepsilon), \overset{(2)}{\varphi}(t_1,\varepsilon)) = \overset{(1)}{\varphi}(t_1,\varepsilon) - \overset{(2)}{\varphi}(t_1,\varepsilon) = 0,$$

$$M(\overset{(1)}{\psi}(t_1,\varepsilon),\overset{(2)}{\psi}(t_1,\varepsilon)) = \overset{(1)}{\psi}(t_1,\varepsilon) - \overset{(2)}{\psi}(t_1,\varepsilon) = 0.$$

Подставив разложение (7) в выражения для H, K, M, получаем коэффициенты при ε^i $(i \geq 0)$ в разложениях этих выражений

$$\begin{aligned} H_i &= \overset{(1)}{\overline{x}}_i(t_1) + \overset{(1)}{Q}_i x(0) - \overset{(2)}{\overline{x}}_i(t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_i x(0) = 0,\\ K_i &= \overset{(1)}{\overline{\varphi}}_i(t_1) + \overset{(1)}{Q}_i \varphi(0) - \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_i(t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_i \varphi(0) = 0,\\ M_i &= \overset{(1)}{\overline{\psi}}_i(t_1) + \overset{(1)}{Q}_i \psi(0) - \overset{(2)}{\overline{\psi}}_i(t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_i \psi(0) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Аналогично [1], функция $\overset{(j)}{g}(\overset{(j)}{v}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ представляется в виде

$$\overset{(j)}{\overline{g}}(t,\varepsilon) + \overset{(j)}{\Pi} g(\tau_{j-1},\varepsilon) + \overset{(j)}{Q} g(\tau_j,\varepsilon),$$

где

$$\overset{(j)}{\overline{g}}(t,\varepsilon) = \overset{(j)}{g}(\overset{(j)}{\overline{v}}(t),t,\varepsilon),$$

$$\overset{(j)}{\Pi} g(\tau_{j-1},\varepsilon) = \overset{(j)}{g}(\overset{(j)}{\overline{v}}(t_{j-1}+\varepsilon\tau_{j-1},\varepsilon) + \overset{(j)}{\Pi} v(\tau_{j-1},\varepsilon), t_{j-1}+\varepsilon\tau_{j-1},\varepsilon) - \overset{(j)}{g}(\overset{(j)}{\overline{v}}(t_{j-1}+\varepsilon\tau_{j-1},\varepsilon), t_{j-1}+\varepsilon\tau_{j-1},\varepsilon),$$

$$\overset{(j)}{Q} g(\tau_j,\varepsilon) = \overset{(j)}{g}(\overset{(j)}{\overline{v}}(t_j+\varepsilon\tau_j,\varepsilon) + \overset{(j)}{Q} v(\tau_j,\varepsilon), t_j+\varepsilon\tau_j,\varepsilon) - \overset{(j)}{g}(\overset{(j)}{\overline{v}}(t_j+\varepsilon\tau_j,\varepsilon), t_j+\varepsilon\tau_j,\varepsilon).$$

Далее будем обозначать через $\overset{(j)}{\overline{G}}(t), \Pi\overset{(j)}{G}(\tau_{j-1}), Q\overset{(j)}{G}(\tau_{j-1})$ значения функции $G(z,t,\varepsilon)$ $(z = (x', y)')$, при $\varepsilon = 0$ и $z = \overset{(j)}{\overline{z}}_0(t), t \in [t_{j-1}, t_j], z = \overset{(j)}{\overline{z}}_0(t_{j-1}) + \overset{(j)}{\Pi}_0 z(\tau_{j-1}), t = t_{j-1}, z = \overset{(j)}{\overline{z}}_0(t_j) + \overset{(j)}{Q}_0 z(\tau_j), t = t_j$ соответственно.

Члены разложения с отрицательными индексами будем считать равными нулю.

Подставим разложение (7) в систему (9), равенства (10), (11) и третье равенство в (12), затем, учитывая экспоненциальный характер пограничных функций, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от регулярных и разных пограничных функций. Вводя обозначение $y_i = \overset{(1)}{\overline{y}}_i(t_1) + \overset{(1)}{Q}_i y(0) = \overset{(2)}{\overline{y}}_i(t_1) + \overset{(2)}{\Pi}_i y(0)$, где y_i пока неизвестно, в результате получаем соотношения для определения членов асимптотики.

Итак, функции $\overset{(j)}{\overline{v}}_i(t), t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2$ являются решением задач

$$\frac{d\overset{(j)}{\overline{x}}_i}{dt} = A_0(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_i + B_0(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_i + \begin{cases} f_0(t), \quad i = 0 \\ W_{10}(t)\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_{i-1} + W_{20}(t)\overset{(j)}{\overline{\psi}}_{i-1} + \overset{(j)}{\overline{\xi}}_i(t), \quad i \geq 1, \end{cases} \tag{14}$$

$$\frac{d\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_i}{dt} = -A_0(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_i - \overset{(j)}{\overline{G}}_x(t)'\overset{(j)}{\overline{\psi}}_i + \begin{cases} F_0(t)', \quad i = 0, \\ -A_1(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_{i-1} - (\overset{(j)}{\overline{G}}_{xx}(t)'\overset{(j)}{\overline{x}}_1 + \overset{(j)}{\overline{G}}_{xy}(t)'\overset{(j)}{\overline{y}}_1 + \\ + \overset{(j)}{\overline{G}}_{x\varepsilon}(t)')\overset{(j)}{\overline{\psi}}_{i-1} + F_i(t)' = \overset{(j)}{\Phi}_i(t), \quad i = 1, \\ \overset{(j)}{\Phi}_i(t) - (\overset{(j)}{\overline{G}}_{xx}(t)'\overset{(j)}{\overline{x}}_i + \overset{(j)}{\overline{G}}_{xy}(t)'\overset{(j)}{\overline{y}}_i)\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 + \overset{(j)}{\overline{\zeta}}_i(t), \quad i > 1, \end{cases} \tag{15}$$

$$0 = \begin{cases} \overset{(j)}{\overline{G}}(t), \\ \overset{(j)}{\overline{G}}_x(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_i + \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_i + W_{20}(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_{i-1} + W_{30}(t)\overset{(j)}{\overline{\psi}}_{i-1} + \overset{(j)}{\overline{\eta}}_i(t), \quad i > 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$0 = -B_0(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_i - \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)\overset{(j)}{\overline{\psi}}_i + \begin{cases} S_0(t), \quad i = 0, \\ -B_1(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_{i-1} - (\overset{(j)}{\overline{G}}_{yx}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_1 + \overset{(j)}{\overline{G}}_{yy}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_1 + \\ + \overset{(j)}{\overline{G}}_{y\varepsilon}(t))\overset{(j)}{\overline{\psi}}_{i-1} + S_i(t) - \frac{d\overset{(j)}{\overline{\psi}}_{i-1}}{dt} = \overset{(j)}{\Psi}_i(t), \quad i = 1, \\ \overset{(j)}{\Psi}_i(t) - (\overset{(j)}{\overline{G}}_{yx}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_i + \overset{(j)}{\overline{G}}_{yy}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_i)\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 + \overset{(j)}{\overline{\theta}}_i(t), \quad i > 1, \end{cases} \tag{17}$$

$$\overset{(1)}{\overline{x}}_i(0) + \overset{(1)}{\Pi}_i x(0) = \begin{cases} x^0, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases} \qquad \overset{(1)}{\overline{\varphi}}_i(0) + \overset{(1)}{\Pi}_i \varphi(0) = \overset{(1)}{\varphi}_i,$$
$$\overset{(2)}{\overline{x}}_i(T) + \overset{(2)}{Q}_i x(0) = \begin{cases} x^T, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases} \qquad \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_i(T) + \overset{(2)}{Q}_i \varphi(0) = \overset{(2)}{\varphi}_i, \tag{18}$$

где $\overset{(j)}{\overline{\xi}}_i(t)$, $\overset{(j)}{\overline{\zeta}}_i(t)$, $\overset{(j)}{\overline{\eta}}_i(t)$, $\overset{(j)}{\overline{\theta}}_i(t)$ – известные функции, зависящие от регулярных членов асимптотики (7) для x, y порядка меньше i и φ, ψ порядка меньше $i-1$.

Пограничные функции существенные вблизи левого конца интервала $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2$, (П-функции, зависящие от $\tau_{j-1} \geq 0$) удовлетворяют системе

$$\frac{d\overset{(j)}{\Pi}_i x}{d\tau_{j-1}} = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ A_0(t_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_{i-1}x + B_0(t_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_{i-1}y = \Pi\overset{(j)}{X}_i(\tau_{j-1}), & i = 1, \\ \Pi\overset{(j)}{X}_i(\tau_{j-1}) + \Pi\overset{(j)}{\xi}_i(\tau_{j-1}), & i > 1, \end{cases} \tag{19}$$

где $\Pi\overset{(j)}{\xi}_i(\tau_{j-1})$ – известные П-функции, зависящие от П-функций асимптотики (7), порядок которых меньше $i-1$,

$$\frac{d\overset{(j)}{\Pi}_i \varphi}{d\tau_{j-1}} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ -A_0(t_{j-1})'\overset{(j)}{\Pi}_{i-1}\varphi - \Pi\overset{(j)}{G}_x(\tau_{j-1})'\overset{(j)}{\Pi}_{i-1}\psi - \\ -(\Pi\overset{(j)}{G}_x(\tau_{j-1})' - \overset{(j)}{\overline{G}}_x(t_{j-1})')\overset{(j)}{\overline{\psi}}_{i-1}(t_{j-1}) = \Pi\overset{(j)}{\Phi}_i(\tau_{j-1}), & i = 1, \\ \Pi\overset{(j)}{\Phi}_i(\tau_{j-1}) - (\Pi\overset{(j)}{G}_{xx}(\tau_{j-1})'\overset{(j)}{\Pi}_{i-1}x + \Pi\overset{(j)}{G}_{xy}(\tau_{j-1})'\overset{(j)}{\Pi}_{i-1}y)\times \\ \times(\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t_{j-1}) + \overset{(j)}{\Pi}_0\psi) + \Pi\overset{(j)}{\zeta}_i(\tau_{j-1}), & i > 1, \end{cases} \tag{20}$$

где $\Pi\overset{(j)}{\zeta}_i(\tau_{j-1})$ – известные П-функции, зависящие от регулярных членов асимптотики (7) для x, y порядка меньше i и ψ порядка меньше $i-1$, а также от П-функций, порядок которых меньше $i-1$,

$$\frac{d\overset{(j)}{\Pi}_i y}{d\tau_{j-1}} = \begin{cases} \Pi\overset{(j)}{G}(\tau_{j-1}), & i = 0, \\ \Pi\overset{(j)}{G}_x(\tau_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_i x + \Pi\overset{(j)}{G}_y(\tau_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_i y + (\Pi\overset{(j)}{G}_x(\tau_{j-1}) - \overset{(j)}{\overline{G}}_x(t_{j-1}))\overset{(j)}{\overline{x}}_i(t_{j-1}) + \\ + (\Pi\overset{(j)}{G}_y(\tau_{j-1}) - \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t_{j-1}))\overset{(j)}{\overline{y}}_i(t_{j-1}) + \Pi\overset{(j)}{\eta}_i(\tau_{j-1}), & i > 0, \end{cases} \tag{21}$$

где $\Pi\overset{(j)}{\eta}_i(\tau_{j-1})$ – известные П-функции, зависящие от регулярных членов асимптотики для x, y, а также от П-функций асимптотики (7) порядка меньше i,

$$\frac{d\overset{(j)}{\Pi}_i \psi}{d\tau_{j-1}} = -B_0(t_{j-1})'\overset{(j)}{\Pi}_i\varphi - \Pi\overset{(j)}{G}_y(\tau_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_i\psi - (\Pi\overset{(j)}{G}_y(\tau_{j-1}) - \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t_{j-1}))\overset{(j)}{\overline{\psi}}_i(t_{j-1}) +$$
$$+ \begin{cases} 0, & i = 0, \\ -(\Pi\overset{(j)}{G}_{yx}(\tau_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_i x + \Pi\overset{(j)}{G}_{yy}(\tau_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_i y)(\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t_{j-1}) + \overset{(j)}{\Pi}_0\psi) - \\ -((\Pi\overset{(j)}{G}_{yx}(\tau_{j-1}) - \overset{(j)}{\overline{G}}_{yx}(t_{j-1}))\overset{(j)}{\overline{x}}_i(t_{j-1}) + \\ + (\Pi\overset{(j)}{G}_{yy}(\tau_{j-1}) - \overset{(j)}{\overline{G}}_{yy}(t_{j-1}))\overset{(j)}{\overline{y}}_i(t_{j-1}))\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t_{j-1}) - \\ -(\Pi\overset{(j)}{G}_{yx}(\tau_{j-1})\overset{(j)}{\overline{x}}_i(t_{j-1}) + \Pi\overset{(j)}{G}_{yy}(t_{j-1})\overset{(j)}{\overline{y}}_i(t_{j-1}))\overset{(j)}{\Pi}_0\psi(\tau_{j-1}) + \Pi\overset{(j)}{\theta}_i(\tau_{j-1}), & i > 0, \end{cases} \tag{22}$$

где $\Pi\overset{(j)}{\theta}_i(\tau_{j-1})$ – известные П-функции, зависящие от членов регулярной асимптотики для x, y, ψ, а также от П-функций асимптотики (7) порядка меньше i.

П-функции удовлетворяют следующим краевым условиям

$$\overset{(j)}{\Pi}_i x(+\infty) = \overset{(j)}{\Pi}_i\varphi(+\infty) = 0, \qquad \overset{(1)}{\Pi}_i y(+\infty) = 0, \qquad \overset{(2)}{\overline{y}}_i(t_1) + \overset{(2)}{\Pi}_i y(0) = y_i$$
$$\overset{(1)}{\overline{\psi}}_i(0) + \overset{(1)}{\Pi}_i\psi(0) = 0,, \qquad \overset{(2)}{\Pi}_i\psi(+\infty) = 0. \tag{23}$$

Уравнения для пограничных функций существенных вблизи правого конца отрезка $[t_{j-1}, t_j]$ ($Q-$ функций) $\overset{(j)}{Q}_i v(\tau_j)$ получаются из уравнений для $\overset{(j)}{\Pi}_i v(\tau_{j-1})$ заменой символа Π на Q, τ_{j-1} на τ_j и t_{j-1} на t_j, $j = 1, 2$.

Q-функции удовлетворяют следующим краевым условиям

$$\begin{gathered} \overset{(j)}{Q}_i x(-\infty) = \overset{(j)}{Q}_i \varphi(-\infty) = 0, \qquad \overset{(1)}{\overline{y}}_i(t_1) + \overset{(1)}{Q}_i y(0) = y_i, \qquad \overset{(2)}{Q}_i y(-\infty) = 0, \\ \overset{(1)}{Q}_i \psi(-\infty) = 0, \qquad \overset{(2)}{\overline{\psi}}_i(T) + \overset{(2)}{Q}_i \psi(0) = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

4. Приближение нулевого порядка. Из уравнений для пограничных функций нулевого порядка для медленных переменных и условий (23), (24) следует, что

$$\overset{(j)}{\Pi}_0 x(\tau_{j-1}) = \overset{(j)}{\Pi}_0 \varphi(\tau_{j-1}) \equiv 0, \qquad \overset{(j)}{Q}_0 x(\tau_j) = \overset{(j)}{Q}_0 \varphi(\tau_j) \equiv 0, \quad j = 1, 2. \tag{25}$$

В силу условий I — III и соотношений (25) находим из первого уравнения в (16), уравнения (14) и равенств (18) при $i = 0$ решение

$$\overset{(j)}{\overline{x}}_0(t) = x^j(t), \qquad \overset{(j)}{\overline{y}}_0(t) = y^j(x^j(t), t) = y^j(\overset{(j)}{\overline{x}}_0(t), t), \quad j = 1, 2. \tag{26}$$

С учетом (25) имеем $H_0 = 0$ (см. (13)).

Ввиду условия IV уравнение (17) при $i = 0$ разрешимо относительно $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0$. Подставляя найденные таким образом функции $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0$ в (15) при $i = 0$, получаем линейную систему относительно $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(t)$ с условиями (18) при $i = 0$, зависящими от неизвестного вектора $\overset{(j)}{\varphi}_0$, решением которой является

$$\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(t) = \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(\overset{(j)}{\varphi}_0, t), \tag{27}$$

также имеем

$$\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t) = \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(\overset{(j)}{\varphi}_0, t), \qquad j = 1, 2. \tag{28}$$

В силу условия IV и теоремы о неустойчивости по первому приближению [21] из (21) при $i = 0$, $j = 1$, (23), уравнения для $\overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2)$ и (24) следует что

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 y(\tau_0) \equiv 0, \qquad \overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2) \equiv 0. \tag{29}$$

Поскольку $\overset{(j)}{\overline{y}}_0(t)$, $j = 1, 2$ известны, отсюда и из (10), (11) получаем $\overset{(1)}{y}_0 = \overset{(1)}{\overline{y}}_0(0)$ и $\overset{(2)}{y}_0 = \overset{(2)}{\overline{y}}_0(T)$.

Принимая во внимание (21) при $i = 0$, $j = 2$, (23), уравнение для $\overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1)$, (24), а также условия IV, V, с учетом Леммы 3.1 в [1] получаем пограничные функции соответствующего экспоненциального типа, зависящие от еще неизвестного значения y_0, а именно

$$\overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_0 y(y_0, \tau_1), \qquad \overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_0 y(y_0, \tau_1). \tag{30}$$

С учетом (25), (29) имеем

$$\Pi \overset{(1)}{G}_z(\tau_0) = \overset{(1)}{\overline{G}}_z(0), \qquad Q \overset{(2)}{G}_z(\tau_2) = \overset{(2)}{\overline{G}}_z(T). \tag{31}$$

В силу последних двух равенств, а также (25), условия IV, (28), (22) при $i = 0$, $j = 1$, (23), уравнения для $\overset{(2)}{Q}_0 \psi(\tau_2)$ и (24) находим

$$\begin{gathered} \overset{(1)}{\Pi}_0 \psi(\tau_0) = -\overset{(1)}{\overline{\psi}}_0(0) \exp(-\overset{(1)}{\overline{G}}_y(0)\tau_0) = \overset{(1)}{\Pi}_0 \psi(\overset{(1)}{\varphi}_0, \tau_0), \\ \overset{(2)}{Q}_0 \psi(\tau_2) = -\overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(T) \exp(-\overset{(2)}{\overline{G}}_y(T)\tau_2) = \overset{(2)}{Q}_0 \psi(\overset{(2)}{\varphi}_0, \tau_2). \end{gathered} \tag{32}$$

Заметим, что ввиду условия IV в уравнениях для $\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\tau_1)$ и $\overset{(1)}{Q}_0 \psi(\tau_1)$ условия устойчивости не выполняются. Неоднородности в этих уравнениях являются пограничными функциями соответствующего типа. Нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Единственное решение уравнения*

$$\frac{dy}{d\tau} = (a + f(\tau))y + g(\tau),$$

где $a > 0$ $(a < 0)$, $|f(\tau)|, |g(\tau)| \le c\exp(-\varkappa\tau)$, $\tau \in [0, +\infty)$ $(c\exp(\varkappa\tau), \tau \in (-\infty, 0])$, *с и* $\varkappa$ *– положительные, не зависящие от* τ *константы, является* Π-$(Q$-$)$ *функцией вида*

$$y(\tau) = \int_{+\infty(-\infty)}^{\tau} \exp(\int_s^{\tau} (a + f(t))dt)g(s)ds.$$

В силу этой леммы из уравнений для $\overset{(2)}{\Pi}_0\psi(\tau_1)$, $\overset{(1)}{Q}_0\psi(\tau_1)$ и (25), (28), (30) получаем

$$\begin{aligned}
\overset{(2)}{\Pi}_0\psi(\tau_1) &= \overset{(2)}{\Pi}_0\psi(\overset{(2)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1) = \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(\overset{(2)}{\varphi}_0, t_1)\int_{\tau_1}^{+\infty}\exp(\int_{\tau_1}^{s}\Pi\overset{(2)}{G}_y(t)dt)(\Pi\overset{(2)}{G}_y(s) - \overset{(2)}{\overline{G}}_y(t_1))ds,\\
\overset{(1)}{Q}_0\psi(\tau_1) &= \overset{(1)}{Q}_0\psi(\overset{(1)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1) = \overset{(1)}{\overline{\psi}}_0(\overset{(1)}{\varphi}_0, t_1)\int_{\tau_1}^{-\infty}\exp(\int_{\tau_1}^{s}Q\overset{(1)}{G}_y(t)dt)(Q\overset{(1)}{G}_y(s) - \overset{(1)}{\overline{G}}_y(t_1))ds.
\end{aligned} \tag{33}$$

Используя (19), (23) уравнения для $\overset{(j)}{Q}_i x(\tau_j)$, (24) при $i = 1$, $j = 1, 2$, а также (25), (29), (30), получаем

$$\overset{(1)}{\Pi}_1 x(\tau_0) \equiv 0, \qquad \overset{(2)}{Q}_1 x(\tau_2) \equiv 0, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\overset{(2)}{\Pi}_1 x(\tau_1) &= \overset{(2)}{\Pi}_1 x(y_0, \tau_1) = B_0(t_1)\int_{+\infty}^{\tau_1}\overset{(2)}{\Pi}_0 y(y_0, s)ds,\\
\overset{(1)}{Q}_1 x(\tau_1) &= \overset{(1)}{Q}_1 x(y_0, \tau_1) = B_0(t_1)\int_{-\infty}^{\tau_1}\overset{(1)}{Q}_0 y(y_0, s)ds.
\end{aligned} \tag{35}$$

Из (20), (23) уравнений для $\overset{(j)}{Q}_1\varphi(\tau_j)$, (24) при $i = 1$, $j = 1, 2$ и (25), (28), (30), (32), (33) получаем пограничные функции экспоненциального типа

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{\Pi}_1\varphi(\tau_0) &= \overset{(1)}{\Pi}_1\varphi(\overset{(1)}{\varphi}_0, \tau_0), &\qquad \overset{(2)}{Q}_1\varphi(\tau_2) &= \overset{(2)}{Q}_1\varphi(\overset{(2)}{\varphi}_0, \tau_2),\\
\overset{(2)}{\Pi}_1\varphi(\tau_1) &= \overset{(2)}{\Pi}_1\varphi(\overset{(2)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1), &\qquad \overset{(1)}{Q}_1\varphi(\tau_1) &= \overset{(1)}{Q}_1\varphi(\overset{(1)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1).
\end{aligned} \tag{36}$$

Функции $\overset{(j)}{\overline{x}}_1(t)$ и $\overset{(j)}{\overline{y}}_1(t)$ можно определить из системы (14), (16) с условиями, полученными из (18) при $i = 1$ с учетом (34). В силу (27), (28) имеем

$$\overset{(j)}{\overline{x}}_1(t) = \overset{(j)}{\overline{x}}_1(\overset{(j)}{\varphi}_0, t), \qquad \overset{(j)}{\overline{y}}_1(t) = \overset{(j)}{\overline{y}}_1(\overset{(j)}{\varphi}_0, t). \tag{37}$$

Ввиду (37), (35), (27), (25), (28) и (33) получаем из (13) систему для определения $\overset{(j)}{\varphi}_0$, $j = 1, 2$, и y_0

$$\begin{aligned}
H_1 &= \overset{(1)}{\overline{x}}_1(\overset{(1)}{\varphi}_0, t_1) + \overset{(1)}{Q}_1 x(y_0, 0) - \overset{(2)}{\overline{x}}_1(\overset{(2)}{\varphi}_0, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_1 x(y_0, 0) = 0,\\
K_0 &= \overset{(1)}{\overline{\varphi}}_0(\overset{(1)}{\varphi}_0, t_1) - \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_0(\overset{(2)}{\varphi}_0, t_1) = 0,\\
M_0 &= \overset{(1)}{\overline{\psi}}_0(\overset{(1)}{\varphi}_0, t_1) + \overset{(1)}{Q}_0\psi(\overset{(1)}{\varphi}_0, y_0, 0) - \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(\overset{(2)}{\varphi}_0, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_0\psi(\overset{(2)}{\varphi}_0, y_0, 0) = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Пусть выполнено следующее условие

VII. Система (38) имеет единственное решение $\overset{(1)}{\varphi}_0$, $\overset{(2)}{\varphi}_0$, y_0 и Якобиан этой системы на её решении отличен от нуля.

В силу условия VII значения $\overset{(1)}{\varphi}_0$, $\overset{(2)}{\varphi}_0$ и y_0 известны. Значит, все члены нулевого порядка в асимптотике (7) найдены.

Для лучшего понимания алгоритма построения асимптотики приведем здесь таблицу, показывающую последовательность нахождения членов приближения нулевого порядка в (7).

Таблица 1
Table 1

Нахождение членов нулевого порядка ($j = 1, 2$)
Finding the zero order terms ($j = 1, 2$)

Функции; Формулы
$\overset{(j)}{\Pi}_0 x(\tau_{j-1}) = \overset{(j)}{\Pi}_0 \varphi(\tau_{j-1}) \equiv 0, \quad \overset{(j)}{Q}_0 x(\tau_j) = \overset{(j)}{Q}_0 \varphi(\tau_j) \equiv 0$; (25)
$\overset{(j)}{\bar{x}}_0(t), \ \overset{(j)}{\bar{y}}_0(t) = y^j(\overset{(j)}{\bar{x}}_0(t), t)$, (26) $\overset{(j)}{\bar{\varphi}}_0(t) = \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_0(\overset{(j)}{\varphi}_0, t), \ \overset{(j)}{\bar{\psi}}_0(t) = \overset{(j)}{\bar{\psi}}_0(\overset{(j)}{\varphi}_0, t), \ \overset{(j)}{\varphi}_0$ неизвестно, (27), (28)
$\overset{(1)}{\Pi}_0 y(\tau_0) \equiv 0, \ \overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2) \equiv 0$, (29) $\overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_0 y(y_0, \tau_1), \ \overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_0 y(y_0, \tau_1)$, y_0 неизвестно, (30)
$\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi(\tau_0) = \overset{(1)}{\Pi}_0 \psi(\overset{(1)}{\varphi}_0, \tau_0), \ \overset{(2)}{Q}_0 \psi(\tau_2) = \overset{(2)}{Q}_0 \psi(\overset{(2)}{\varphi}_0, \tau_2)$, (32) $\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\overset{(2)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1), \ \overset{(1)}{Q}_0 \psi(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_0 \psi(\overset{(1)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1)$, (33)
$\overset{(1)}{\Pi}_1 x(\tau_0) \equiv 0, \ \overset{(2)}{Q}_1 x(\tau_2) \equiv 0$, (34), $\overset{(2)}{\Pi}_1 x(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_1 x(y_0, \tau_1), \ \overset{(1)}{Q}_1 x(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_1 x(y_0, \tau_1)$, (35) $\overset{(1)}{\Pi}_1 \varphi(\tau_0) = \overset{(1)}{\Pi}_1 \varphi(\overset{(1)}{\varphi}_0, \tau_0), \ \overset{(2)}{Q}_1 \varphi(\tau_2) = \overset{(2)}{Q}_1 \varphi(\overset{(2)}{\varphi}_0, \tau_2)$, $\overset{(2)}{\Pi}_1 \varphi(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_1 \varphi(\overset{(2)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1), \ \overset{(1)}{Q}_1 \varphi(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_1 \varphi(\overset{(1)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1)$ (36)
$\overset{(j)}{\bar{x}}_1(t) = \overset{(j)}{\bar{x}}_1(\overset{(j)}{\varphi}_0, t), \ \overset{(j)}{\bar{y}}_1(t) = \overset{(j)}{\bar{y}}_1(\overset{(j)}{\varphi}_0, t)$, $\overset{(j)}{\bar{\varphi}}_1(t) = \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_1(\overset{(j)}{\varphi}_1, \overset{(j)}{\varphi}_0, t), \ \overset{(j)}{\bar{\psi}}_1(t) = \overset{(j)}{\bar{\psi}}_1(\overset{(j)}{\varphi}_1, \overset{(j)}{\varphi}_0, t), \ \overset{(j)}{\varphi}_1$ неизвестно, (37)
$\overset{(j)}{\varphi}_0, y_0$; (38)

5. Приближения высших порядков

Теорема 5.1. *При условиях I — VII можно найти все члены асимптотики* (7) i*-го порядка* ($i \geq 0$).
Доказательство. Для $i = 0$ теорема уже доказана.

Предположим, что теорема верна для $i \leq n - 1$. Тогда функции $\overset{(j)}{\bar{v}}_k(t)$, $\overset{(j)}{\Pi}_k v(\tau_{j-1})$, $\overset{(j)}{Q}_k v(\tau_j)$ и, следовательно, значения $\overset{(j)}{\varphi}_k$, $\overset{(j)}{y}_k$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ в (10), (11) определены.

Из (19), (20) при $i = n$ и уравнений для $\overset{(j)}{Q}_n x(\tau_j)$, $\overset{(j)}{Q}_n \varphi(\tau_j)$ пограничные функции для медленных переменных $\overset{(j)}{\Pi}_n x(\tau_{j-1})$, $\overset{(j)}{\Pi}_n \varphi(\tau_{j-1})$, $\overset{(j)}{Q}_n x(\tau_j)$, $\overset{(j)}{Q}_n \varphi(\tau_j)$, $j = 1, 2$ однозначно определяются.

Учитывая условие IV, выразим функцию $\overset{(j)}{\bar{y}}_n$ из (16) при $i = n$ и подставим ее в (14) при $i = n$. Используя (18) для $\overset{(1)}{\bar{x}}_n(0)$ и $\overset{(2)}{\bar{x}}_n(T)$ ($\overset{(1)}{\Pi}_n x(0)$, $\overset{(2)}{Q}_n x(0)$ уже известны), из (14) получаем функции $\overset{(j)}{\bar{x}}_n(t)$. Затем находим $\overset{(j)}{\bar{y}}_n(t)$, $j = 1, 2$. Благодаря условию IV можем выразить функцию $\overset{(j)}{\bar{\psi}}_n(t)$ из (17) при $i = n$. Подставим найденное выражение в (15) при $i = n$. Решая полученную систему с условиями (18) при $i = n$ для $\overset{(1)}{\bar{\varphi}}_n(0)$ и $\overset{(2)}{\bar{\varphi}}_n(T)$ ($\overset{(1)}{\Pi}_n \varphi(0)$, $\overset{(2)}{Q}_n \varphi(0)$ уже известны), получаем функции $\overset{(j)}{\bar{\varphi}}_n(t) = \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_n(\overset{(j)}{\varphi}_n, t)$, затем находим функции $\overset{(j)}{\bar{\psi}}_n(t) = \overset{(j)}{\bar{\psi}}_n(\overset{(j)}{\varphi}_n, t)$, линейно зависящие от неизвестных $\overset{(j)}{\varphi}_n$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим линейное уравнение (21) при $i = n$, $j = 1$ и соответствующее условие для $\overset{(1)}{\Pi}_n y(+\infty)$ из (23). Неоднородность в этом уравнении является П-функцией. Благодаря условию IV и первому равенству в (31) мы можем однозначно определить П-функцию $\overset{(1)}{\Pi}_n y(\tau_0)$ (см. Лемму 4.1). Подобным образом в силу второго равенства в (31) однозначно определяется Q-функция $\overset{(2)}{Q}_n y(\tau_2)$ из её уравнения и условия (24) для $\overset{(2)}{Q}_n y(-\infty)$. Следовательно, значения $\overset{(1)}{y}_n = \overset{(1)}{\bar{y}}_n(0) + \overset{(1)}{\Pi}_n y(0)$ и $\overset{(2)}{y}_n = \overset{(2)}{\bar{y}}_n(T) + \overset{(2)}{Q}_n y(0)$ определены.

В силу условия IV и Леммы 3.1 в [1] получаем из (21) при $i = n$, $j = 2$ и (23) П- функцию $\overset{(2)}{\Pi}_n y(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_n y(y_n, \tau_1)$, а из уравнения для $\overset{(1)}{Q}_n y(\tau_1)$ и (24) при $i = n$ находим Q- функцию $\overset{(1)}{Q}_n y(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_n y(y_n, \tau_1)$, линейно зависящую от y_n.

Используя (31) и условие IV, из (22) при $i = n$, $j = 1$ и (23) при $i = n$ получаем П-функцию $\overset{(1)}{\Pi}_n \psi(\tau_0) = \overset{(1)}{\Pi}_n \psi(\overset{(1)}{\varphi}_n, \tau_0)$, линейно зависящую от $\overset{(1)}{\varphi}_n$. Аналогично из уравнения для $\overset{(2)}{Q}_n \psi(\tau_2)$ и (24) при $i = n$ получаем Q-функцию $\overset{(2)}{Q}_n \psi(\tau_2) = \overset{(2)}{Q}_n \psi(\overset{(2)}{\varphi}_n, \tau_2)$, линейно зависящую от $\overset{(2)}{\varphi}_n$. С учетом условия IV, соотношений (22) при $i = n$, $j = 2$, (23) при $i = n$, уравнения для $\overset{(1)}{Q}_n \psi(\tau_1)$ и (24) при $i = n$ в силу Леммы 4.1 имеем

$$
\begin{aligned}
\overset{(2)}{\Pi}_n \psi(\tau_1) &= \overset{(2)}{\Pi}_n \psi(\overset{(2)}{\varphi}_n, y_n, \tau_1) = \overset{(2)}{\overline{\psi}}_n(\overset{(2)}{\varphi}_n, t_1) \int_{\tau_1}^{+\infty} \exp\Big(\int_{\tau_1}^{s} \Pi \overset{(2)}{G}_y(t) dt\Big)\big(\Pi \overset{(2)}{G}_y(s) - \overset{(2)}{\overline{G}}_y(t_1)\big) ds + \Pi f(y_n, \tau_1), \\
\overset{(1)}{Q}_n \psi(\tau_1) &= \overset{(1)}{Q}_n \psi(\overset{(1)}{\varphi}_n, y_n, \tau_1) = \overset{(1)}{\overline{\psi}}_n(\overset{(1)}{\varphi}_n, t_1) \int_{\tau_1}^{-\infty} \exp\Big(\int_{\tau_1}^{s} Q \overset{(1)}{G}_y(t) dt\Big)\big(Q \overset{(1)}{G}_y(s) - \overset{(1)}{\overline{G}}_y(t_1)\big) ds + Q f(y_n, \tau_1),
\end{aligned}
\tag{39}
$$

где $\Pi f(y_n, \tau_1)$ и $Q f(y_n, \tau_1)$ — известные П-функция и Q-функция соответственно, линейно зависящие от y_n.

Значения $\overset{(j)}{\varphi}_n$, $j = 1, 2$ и y_n пока неизвестны. Учитывая зависимость найденных членов асимптотики от неизвестных параметров, находим из (19), (23) при $i = n + 1$ П-функции $\overset{(1)}{\Pi}_{n+1} x(\tau_0)$ и $\overset{(2)}{\Pi}_{n+1} x(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_{n+1} x(y_n, \tau_1)$, линейно зависящую от y_n. Из уравнения для $\overset{(1)}{Q}_{n+1} x(\tau_1)$ и (24) при $i = n + 1$ однозначно определяем Q-функции $\overset{(1)}{Q}_{n+1} x(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_{n+1} x(y_n, \tau_1)$, линейно зависящую от y_n, и $\overset{(2)}{Q}_{n+1} x(\tau_2)$.

Рассмотрим соотношения (14), (16) и (18) при $i = n + 1$. В силу условия IV можем выразить $\overset{(j)}{\overline{y}}_{n+1}(t)$ из (16). Подставляя его в (14), получаем дифференциальные уравнения для $\overset{(j)}{\overline{x}}_{n+1}(t)$, $j = 1, 2$ с известными из (18) значениями $\overset{(1)}{\overline{x}}_{n+1}(0)$ и $\overset{(2)}{\overline{x}}_{n+1}(T)$. Решая эти задачи, определяем функции $\overset{(j)}{\overline{x}}_{n+1}(t) = \overset{(j)}{\overline{x}}_{n+1}(\overset{(j)}{\varphi}_n, t)$, линейно зависящие от $\overset{(j)}{\varphi}_n$.

Таким образом, из (13) имеем следующую систему для определения $\overset{(j)}{\varphi}_n$, $j = 1, 2$ и y_n

$$
\begin{aligned}
H_{n+1} &= \overset{(1)}{\overline{x}}_{n+1}(\overset{(1)}{\varphi}_n, t_1) + \overset{(1)}{Q}_{n+1} x(y_n, 0) - \overset{(2)}{\overline{x}}_{n+1}(\overset{(2)}{\varphi}_n, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_{n+1} x(y_n, 0) = 0, \\
K_n &= \overset{(1)}{\overline{\varphi}}_n(\overset{(1)}{\varphi}_n, t_1) + \overset{(1)}{Q}_n \varphi(0) - \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_n(\overset{(2)}{\varphi}_n, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_n \varphi(0) = 0, \\
M_n &= \overset{(1)}{\overline{\psi}}_n(\overset{(1)}{\varphi}_n, t_1) + \overset{(1)}{Q}_n \psi(\overset{(1)}{\varphi}_n, y_n, 0) - \overset{(2)}{\overline{\psi}}_n(\overset{(2)}{\varphi}_n, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_n \psi(\overset{(2)}{\varphi}_n, y_n, 0) = 0.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Учитывая найденные выражения для членов асимптотики, нетрудно убедиться в линейности последней системы по неизвестным параметрам.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.1. *Значения якобианов систем* (38) *и* (40) *на решениях этих систем совпадают.*

Доказательство этой леммы приведено в Приложении.

Следует отметить, что здесь рассматриваются определители порядка $2m + 1$. Аналогичное утверждение о равенстве некоторых функциональных определителей второго порядка использовалось в [17] при построении асимптотического приближения первого порядка без пояснений из-за требуемого ограниченного объема статьи в трудах конференции.

В силу последней леммы и условия VII якобиан линейной системы (40) отличен от нуля. Следовательно, система имеет единственное решение $\overset{(j)}{\varphi}_n$, $j = 1, 2$, y_n. Таким образом, функции $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_n(t)$, $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_n(t)$, $\overset{(2)}{\Pi}_n y(\tau_1)$, $\overset{(1)}{Q}_n y(\tau_1)$, $\overset{(j)}{\Pi}_n \psi(\tau_{j-1})$ и $\overset{(j)}{Q}_n \psi(\tau_j)$ определены.

Теорема доказана.

6. Иллюстративный пример. Для удобства сравнения с методом из [17] мы приводим здесь тот же пример, что и в [17], но используем другой алгоритм построения асимптотики, предложенный в настоящей статье. А именно, рассматриваем задачу оптимального управления

$$
P_\varepsilon\colon J_\varepsilon(u) = \int_0^1 \left((1 + \varepsilon t)x + t^2 y + \frac{1}{2}\varepsilon u^2 \right) dt \to \min_u,
$$

$$
\frac{dx}{dt} = y, \qquad \varepsilon \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} y^2 + \varepsilon u, \tag{41}
$$

$$
x(0, \varepsilon) = 1, \qquad x(1, \varepsilon) = 1. \tag{42}
$$

Обратим внимание, что в [17] имеется только окончательная формула первого приближения асимптотического решения, полученного при помощи алгоритма из [17], основанного на решении краевых задач. Пояснения к нахождению членов асимптотики в [17] отсутствуют. Для лучшего понимания предлагаемого нового алгоритма построения асимптотики решения рассматриваемой задачи соотношения для нахождения членов асимптотики приведены здесь в явном виде.

Оптимальное решение задачи P_ε удовлетворяет задаче, состоящей из (41), (42) и следующих соотношений

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 + \varepsilon t, \qquad \varepsilon\frac{d\psi}{dt} = -\varphi + y\psi + t^2, \qquad u = \psi,$$

$$\psi(0,\varepsilon) = 0, \qquad \psi(1,\varepsilon) = 0.$$

Следуя нашему алгоритму, получим явные выражения задач для нахождения асимптотического решения первого порядка для рассматриваемой задачи P_ε.

Если $\varepsilon = 0$, то уравнение состояния для быстрой переменной имеет два различных корня относительно быстрой переменной, т.е. выполняется условие I. Для обеспечения условия IV нужно взять $y^1(x,t) = -1$, $y^2(x,t) = 1$. Соответствующие траектории в условии II имеют вид $x^1(t) = -t+1$, $x^2(t) = t$, которые пересекаются друг с другом в одной внутренней точке $t_1 = 1/2$. Следовательно, выполняется условие III. Справедливость условия V следует из вида второго уравнения в (41). Условия VI и VII обсудим позже.

Учитывая (25), имеем $\overset{(j)}{\Pi}_0 x(\tau_{j-1}) = \overset{(j)}{\Pi}_0 \varphi(\tau_{j-1}) \equiv 0$, $\overset{(j)}{Q}_0 x(\tau_j) = \overset{(j)}{Q}_0 \varphi(\tau_j) \equiv 0$, $j = 1, 2$.

В силу определения решения вырожденной задачи, удовлетворяющего условию статьи, $\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t) = -1$, $\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t) = 1$, $\overset{(1)}{\overline{x}}_0(t) = -t+1$, $\overset{(2)}{\overline{x}}_0(t) = t$.

Из (15), (18) и (17) при $i = 0$ следует, что

$$\overset{(1)}{\overline{\varphi}}_0(t) = t + \overset{(1)}{\varphi}_0, \quad \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_0(t) = t + \overset{(2)}{\varphi}_0 - 1,$$

$$\overset{(1)}{\overline{\psi}}_0(t) = t^2 - t - \overset{(1)}{\varphi}_0, \quad \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(t) = -t^2 + t + \overset{(2)}{\varphi}_0 - 1.$$

Ввиду (29) имеем $\overset{(1)}{\Pi}_0 y(\tau_0) \equiv 0$ и $\overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2) \equiv 0$. С учетом (21) при $i = 0$, $j = 2$, (23) при $i = 0$, уравнения для $\overset{(2)}{Q}_0 y$, (24) при $i = 0$, (32) – (35), (20), (23), уравнения для $\overset{(j)}{Q}_i \varphi$ и (24) при $i = 1$ последовательно находим

$$\overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1) = \frac{2(y_0+1)}{y_0+1+(1-y_0)e^{-\tau_1}}, \quad \overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau_1) = \frac{2(y_0-1)}{1-y_0+(1+y_0)e^{\tau_1}},$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi(\tau_0) = \overset{(1)}{\varphi}_0 e^{-\tau_0}, \quad \overset{(2)}{Q}_0 \psi(\tau_2) = (1 - \overset{(2)}{\varphi}_0) e^{\tau_2},$$

$$\overset{(1)}{Q}_0 \psi(\tau_1) = \frac{(y_0+1)(1+4\overset{(1)}{\varphi}_0)}{4(y_0-1)} e^{\tau_1}, \quad \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\tau_1) = \frac{(y_0-1)(3-4\overset{(2)}{\varphi}_0)}{4(y_0+1)} e^{-\tau_1},$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_1 x(\tau_0) \equiv 0, \qquad \overset{(2)}{Q}_1 x(\tau_2) \equiv 0,$$

$$\overset{(1)}{Q}_1 x(\tau_1) = 2\ln\left|1 + \frac{1+y_0}{1-y_0} e^{\tau_1}\right|, \quad \overset{(2)}{\Pi}_1 x(\tau_1) = 2\ln\left|1 + \frac{1-y_0}{1+y_0} e^{-\tau_1}\right|,$$

$$\overset{(j)}{\Pi}_1 \varphi(\tau_{j-1}) \equiv 0, \quad \overset{(j)}{Q}_1 \varphi(\tau_j) \equiv 0, \quad j = 1, 2.$$

В этом примере функции $\overset{(j)}{\overline{\xi}}_1(t)$, $\overset{(j)}{\overline{\eta}}_1(t)$ равны нулю. Из (14) – (18) при $i = 1$ получаем

$$\overset{(1)}{\overline{y}}_1(t) = -t^2 + t + \overset{(1)}{\varphi}_0, \quad \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t) = -t^2 + t + \overset{(2)}{\varphi}_0 - 1,$$

$$\overset{(1)}{\overline{x}}_1(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \overset{(1)}{\varphi}_0 t, \quad \overset{(2)}{\overline{x}}_1(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + (\overset{(2)}{\varphi}_0 - 1)t + \frac{5}{6} - \overset{(2)}{\varphi}_0,$$

$$\overset{(1)}{\overline{\varphi}}_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + \overset{(1)}{\varphi}_1, \quad \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + \overset{(2)}{\varphi}_1 - \frac{1}{2},$$

$$\overset{(1)}{\overline{\psi}}_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 - 2t - (t^2 - t - \overset{(1)}{\varphi}_0)^2 - \overset{(1)}{\varphi}_1 + 1,$$

$$\overline{\overset{(2)}{\psi}}_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t - (1 + t^2 - t - \overset{(2)}{\varphi}_0)^2 + \overset{(2)}{\varphi}_1 + \frac{1}{2}.$$

Система (38) для этого примера имеет вид

$$\begin{aligned} &H_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\overset{(1)}{\varphi}_0 + \frac{1}{2}\overset{(2)}{\varphi}_0 + 2\ln|y_0+1| - 2\ln|1-y_0| = 0, \\ &K_0 = 1 + \overset{(1)}{\varphi}_0 - \overset{(2)}{\varphi}_0 = 0, \\ &M_0 = \frac{1}{2} - \overset{(1)}{\varphi}_0 - \overset{(2)}{\varphi}_0 + \frac{(y_0+1)(1+4\overset{(1)}{\varphi}_0)}{4(y_0-1)} - \frac{(y_0-1)(3-4\overset{(2)}{\varphi}_0)}{4(y_0+1)} = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Решив систему (43), получим $\overset{(1)}{\varphi}_0 = -1/4$, $\overset{(2)}{\varphi}_0 = 3/4$, $y_0 = (e^{1/24}-1)/(e^{1/24}+1)$. Отсюда следует, что $\overline{\overset{(1)}{\psi}}_0(t) = (t-1/2)^2$, $\overline{\overset{(2)}{\psi}}_0(t) = -(t-1/2)^2$.

Якобиан системы (43) при найденных значениях для $\overset{(j)}{\varphi}_0$, $j = 1, 2$, y_0 равен $-(e^{1/24}+1)^4 e^{-1/12} \neq 0$. Таким образом, условие VII выполнено, и мы получаем явный вид приближения нулевого порядка для решения задачи (41), (42).

Из (21) при $i = 1$ ($\Pi\overset{(j)}{\eta}_1 = \overset{(j)}{\Pi}_0\psi$), аналогичных уравнений для $\overset{(j)}{Q}_1 y(\tau_j)$ ($Q\overset{(j)}{\eta}_1 = \overset{(j)}{Q}_0\psi$) и условий (23), (24) получаем

$$\overset{(1)}{\Pi}_1 y(\tau_0) = \frac{1}{8}e^{-\tau_0}, \quad \overset{(2)}{Q}_1 y(\tau_2) = \frac{1}{8}e^{\tau_2},$$

$$\overset{(1)}{Q}_1 y(\tau_1) = \frac{y_1\left(1+e^{-\frac{1}{24}}\right)^2 e^{-\tau_1}}{\left(1+e^{-\frac{1}{24}-\tau_1}\right)^2}, \quad \overset{(2)}{\Pi}_1 y(\tau_1) = \frac{y_1\left(1+e^{\frac{1}{24}}\right)^2 e^{\tau_1}}{\left(1+e^{\frac{1}{24}+\tau_1}\right)^2}.$$

Из (22) при $i = 1$ ($\Pi\overset{(1)}{\theta}_1(\tau_0) = e^{-\tau_0}/16$, $\Pi\overset{(2)}{\theta}_1(\tau_1) = 0$) и аналогичных уравнений для $\overset{(j)}{Q}_1\psi(\tau_j)$ ($Q\overset{(1)}{\theta}_1(\tau_1) = 0$, $Q\overset{(2)}{\theta}_1(\tau_2) = -e^{\tau_2}/16$), учитывая условия (23), (24) при $i = 1$, находим

$$\overset{(1)}{\Pi}_1\psi(\tau_0) = \left(\overset{(1)}{\varphi}_1 - \frac{31}{32} + \frac{3}{32}\tau_0 + \frac{1}{32}e^{-\tau_0}\right)e^{-\tau_0},$$

$$\overset{(2)}{Q}_1\psi(\tau_2) = \left(-\overset{(2)}{\varphi}_1 + \frac{33}{32} - \frac{3}{32}\tau_2 + \frac{1}{32}e^{\tau_2}\right)e^{\tau_2},$$

$$\overset{(1)}{Q}_1\psi(\tau_1) = \left(-\frac{1}{8} - \overset{(1)}{\varphi}_1\right)e^{\frac{1}{24}+\tau_1}, \quad \overset{(2)}{\Pi}_1\psi(\tau_1) = \left(-\frac{3}{8} + \overset{(2)}{\varphi}_1\right)e^{-\frac{1}{24}-\tau_1}.$$

Из (19) при $i = 2$ ($\Pi\overset{(j)}{\xi}_2 = 0$) и аналогичных уравнений для $\overset{(j)}{Q}_2 x(\tau_j)$ ($Q\overset{(j)}{\xi}_2 = 0$) следует, что

$$\overset{(1)}{\Pi}_2 x(\tau_0) = -\frac{1}{8}e^{-\tau_0}, \quad \overset{(2)}{Q}_2 x(\tau_2) = \frac{1}{8}e^{\tau_2},$$

$$\overset{(1)}{Q}_2 x(\tau_1) = \frac{y_1 e^{\frac{1}{24}}\left(1+e^{-\frac{1}{24}}\right)^2}{1+e^{-\frac{1}{24}-\tau_1}}, \quad \overset{(2)}{\Pi}_2 x(\tau_1) = -\frac{y_1 e^{-\frac{1}{24}}\left(1+e^{\frac{1}{24}}\right)^2}{1+e^{\frac{1}{24}+\tau_1}}.$$

В уравнениях (14) и (16) при $i = 2$ имеем соответственно $\overline{\overset{(j)}{\xi}}_2(t) = 0$, $\overline{\overset{(j)}{\eta}}_2(t) = -(\overline{\overset{(j)}{y}}_1)^2/2 - d\overline{\overset{(j)}{y}}_0/dt$. Из (16), (14), (18) при $i = 2$ получаем

$$\overline{\overset{(1)}{x}}_2(t) = \frac{3}{10}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{11}{12}t^3 - \frac{3}{8}t^2 + \left(\frac{3}{32} + \overset{(1)}{\varphi}_1\right)t + \frac{1}{8},$$

$$\overline{\overset{(2)}{x}}_2(t) = -\frac{3}{10}t^5 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{7}{12}t^3 + \frac{3}{8}t^2 + \left(\overset{(2)}{\varphi}_1 - \frac{19}{32}\right)t + \frac{109}{480} - \overset{(2)}{\varphi}_1.$$

Система (40) при $n = 1$ для этого примера имеет вид

$$\begin{aligned} &H_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\overset{(1)}{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\overset{(2)}{\varphi}_1 + y_1\left(2 + e^{\frac{1}{24}} + e^{-\frac{1}{24}}\right) = 0, \\ &K_1 = \frac{1}{2} + \overset{(1)}{\varphi}_1 - \overset{(2)}{\varphi}_1 = 0, \\ &M_1 = \frac{1}{4} - \overset{(1)}{\varphi}_1 - \overset{(2)}{\varphi}_1 - \left(\frac{1}{8} + \overset{(1)}{\varphi}_1\right)e^{\frac{1}{24}} + \left(\frac{3}{8} - \overset{(2)}{\varphi}_1\right)e^{-\frac{1}{24}} = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Якобиан для последней системы равен $-(e^{1/24}+1)^4e^{-1/12}$, т. е. равен якобиану системы (43) на решениях этой системы, что соответствует Лемме 5.1.

Решением системы (44) является $\overset{(1)}{\varphi}_1 = -1/8$, $\overset{(2)}{\varphi}_1 = 3/8$, $y_1 = -7/(24(2+e^{1/24}+e^{-1/24}))$. Таким образом, первое приближение к решению построено.

Преобразуя приращение критерия качества для рассматриваемой слабоуправляемой задачи, нетрудно видеть, что условие $R(t,0) = 1 > 0$ обеспечивает достаточность принципа максимума Понтрягина при достаточно малых ε, и условие VI выполняется.

Сравнивая члены построенной асимптотики первого порядка с [17], видим, что соответствующие члены совпадают. Поэтому представленные в [17] графики решения рассматриваемой задачи при $\varepsilon = 0,05$ и его приближений в нашем случае совпадают, хотя мы использовали разные алгоритмы построения асимптотики.

Приложение. Доказательство Леммы 5.1.

В дальнейших преобразованиях будем существенно использовать условие IV. Для краткости часто опускаем аргументы и параметры в обозначении функций.

Из (17) при $i = 0$ получаем

$$\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 = \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1}(-B_0(t)' \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 + S_0(t)). \tag{45}$$

Подставим это выражение для $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0$ в (15) при $i = 0$, а затем продифференцируем полученное дифференциальное уравнение для $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0$ по $\overset{(j)}{\varphi}_0$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0}\Big) = (-A_0(t)' + \overset{(j)}{\overline{G}}_x(t)' \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1}B_0(t)')\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0}. \tag{46}$$

В силу (18) при $i = 0$ и $i = n$ получаем условия

$$\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{\varphi}}_i}{\partial \overset{(1)}{\varphi}_i}(0) = \frac{\partial \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_i}{\partial \overset{(2)}{\varphi}_i}(T) = I, \tag{47}$$

где, как обычно, I означает единичную матрицу.

Из (17) при $i = n$ выражаем $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_n$

$$\overset{(j)}{\overline{\psi}}_n = \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1}(-B_0(t)' \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_n + \overset{(j)}{\theta}_n(t)), \tag{48}$$

где $\overset{(j)}{\theta}_n(t)$ — известная функция. Подставим это выражение для $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_n$ в (15) при $i = n$ и продифференцируем полученное дифференциальное уравнение для $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_n$ по $\overset{(j)}{\varphi}_n$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_n}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}\Big) = (-A_0(t)' + \overset{(j)}{\overline{G}}_x(t)' \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1}B_0(t)')\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_n}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}. \tag{49}$$

Ввиду единственности решения начальной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений из (46), (47), (49) имеем

$$\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0} = \frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_n}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}, \qquad j = 1, 2. \tag{50}$$

Отсюда и из (38), (40) следует

$$\frac{\partial K_0}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0} = \frac{\partial K_n}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}, \quad j = 1, 2, \qquad \frac{\partial K_0}{\partial y_0} = \frac{\partial K_n}{\partial y_n} = 0. \tag{51}$$

С учетом соотношений (50) из (45) и (48) получаем

$$\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0} = \frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\psi}}_n}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}. \tag{52}$$

Из (16) при $i = 1$ мы выражаем $\overset{(j)}{\overline{y}}_1$ и подставляем его в (14) при $i = 1$. Дифференцируя полученное дифференциальное уравнение по $\overset{(j)}{\varphi}_0$, получаем

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{x}}_1}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0}\Big) = (A_0(t) - B_0(t) \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1} \overset{(j)}{\overline{G}}_x(t))\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{x}}_1}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0} + (W_{10}(t) - B_0(t) \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1} W_{20}(t)')\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0} + \\ + (W_{20}(t) - B_0(t) \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1} W_{30}(t))\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0}.\end{gathered} \tag{53}$$

Используя (18) при $i = 1$ и $i = n + 1$, а также учитывая уже найденные члены асимптотики, имеем условия

$$\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{x}}_i}{\partial \overset{(1)}{\varphi}_{i-1}}(0) = \frac{\partial \overset{(2)}{\overline{x}}_i}{\partial \overset{(2)}{\varphi}_{i-1}}(T) = 0. \tag{54}$$

Из (16) при $i = n + 1$ выразим $\overset{(j)}{\overline{y}}_{n+1}$ и подставим его в (14) при $i = n + 1$. Дифференцируя полученное дифференциальное уравнение по $\overset{(j)}{\varphi}_n$, имеем

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{x}}_{n+1}}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}\Big) = (A_0(t) - B_0(t) \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1} \overset{(j)}{\overline{G}}_x(t))\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{x}}_{n+1}}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n} + (W_{10}(t) - B_0(t) \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1} W_{20}(t)')\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_n}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n} + \\ + (W_{20}(t) - B_0(t) \overset{(j)}{\overline{G}}_y(t)^{-1} W_{30}(t))\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{\psi}}_n}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}.\end{gathered} \tag{55}$$

Учитывая (50) и (52), ввиду единственности решений линейных систем (53), (55) с условиями (54) получаем

$$\frac{\partial \overset{(j)}{\overline{x}}_1}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0} = \frac{\partial \overset{(j)}{\overline{x}}_{n+1}}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}, \qquad j = 1, 2. \tag{56}$$

Ввиду первого уравнения в (38), равенств в (35), первого уравнения в (40), уравнения для $\overset{(1)}{Q}_{n+1} x$, (19) при $i = n + 1$, $j = 2$ и (24), (23) при $i = n + 1$ получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial H_1}{\partial y_0} = B_0(t_1)\left(\int_{-\infty}^{\tau_1} \frac{\partial \overset{(1)}{Q}_0 y(y_0, s)}{\partial y_0} ds - \int_{+\infty}^{\tau_1} \frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 y(y_0, s)}{\partial y_0} ds\right), \\ \frac{\partial H_{n+1}}{\partial y_n} = B_0(t_1)\left(\int_{-\infty}^{\tau_1} \frac{\partial \overset{(1)}{Q}_n y(y_n, s)}{\partial y_n} ds - \int_{+\infty}^{\tau_1} \frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_n y(y_n, s)}{\partial y_n} ds\right).\end{gathered} \tag{57}$$

Из (21) при $i = 0$, $j = 2$, уравнения для $\overset{(1)}{Q}_0 y$, а также из (23), (24) при $i = 0$ получаем следующие начальные задачи

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau_1}\Big(\frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 y}{\partial y_0}\Big) = \Pi\overset{(2)}{G}_y(\tau_1)\frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 y}{\partial y_0}(0) = 1, \\ \frac{d}{d\tau_1}\Big(\frac{\partial \overset{(1)}{Q}_0 y}{\partial y_0}\Big) = Q\overset{(1)}{G}_y(\tau_1)\frac{\partial \overset{(1)}{Q}_0 y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial \overset{(1)}{Q}_0 y}{\partial y_0}(0) = 1.\end{gathered} \tag{58}$$

Используя (21) при $i = n$, $j = 2$, уравнение для $\overset{(1)}{Q}_n y$, а также (23), (24) при $i = n$, имеем следующие начальные задачи

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau_1}\Big(\frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_n y}{\partial y_n}\Big) = \Pi\overset{(2)}{G}_y(\tau_1)\frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_n y}{\partial y_n}, \qquad \frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_n y}{\partial y_n}(0) = 1, \\ \frac{d}{d\tau_1}\Big(\frac{\partial \overset{(1)}{Q}_n y}{\partial y_n}\Big) = Q\overset{(1)}{G}_y(\tau_1)\frac{\partial \overset{(1)}{Q}_n y}{\partial y_n}, \qquad \frac{\partial \overset{(1)}{Q}_n y}{\partial y_n}(0) = 1.\end{gathered} \tag{59}$$

В силу теоремы единственности задачи (58) и (59) имеют одинаковые решения, т.е.

$$\frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 y}{\partial y_0} = \frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_n y}{\partial y_n}, \qquad \frac{\partial \overset{(1)}{Q}_0 y}{\partial y_0} = \frac{\partial \overset{(1)}{Q}_n y}{\partial y_n}. \tag{60}$$

С учетом (56), (57) и (60) из первых равенств в (38), (40) получаем

$$\frac{\partial H_1}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0} = \frac{\partial H_{n+1}}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}, \quad j = 1, 2, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial y_0} = \frac{\partial H_{n+1}}{\partial y_n}. \tag{61}$$

Дифференцируя уравнения (22) при $i = 0$, $j = 2$ и уравнение для $\overset{(1)}{Q}_0 \psi$ по y_0, с учетом (23), (24) при $i = 0$ получаем следующие начальные задачи

$$\frac{d}{d\tau_1}\Big(\frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi}{\partial y_0}\Big) = -\Pi \overset{(2)}{G}_y(\tau_1)\frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi}{\partial y_0} - \Pi \overset{(2)}{G}_{yy}(\tau_1)\big(\overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(t_1) + \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\tau_1)\big)\frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi}{\partial y_0}(+\infty) = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau_1}\Big(\frac{\partial \overset{(1)}{Q}_0 \psi}{\partial y_0}\Big) = -Q\overset{(1)}{G}_y(\tau_1)\frac{\partial \overset{(1)}{Q}_0 \psi}{\partial y_0} - Q\overset{(1)}{G}_{yy}(\tau_1)\big(\overset{(1)}{\overline{\psi}}_0(t_1) + \overset{(1)}{Q}_0 \psi(\tau_1)\big)\frac{\partial \overset{(1)}{Q}_0 y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial \overset{(1)}{Q}_0 \psi}{\partial y_0}(-\infty) = 0.$$

Аналогичным образом дифференцируя (22) при $i = n$, $j = 2$ и уравнение для $\overset{(1)}{Q}_n \psi$ по y_n, ввиду (23), (24) при $i = n$ и (60) получаем для $\partial \overset{(2)}{\Pi}_n \psi / \partial y_n$ и $\partial \overset{(1)}{Q}_n \psi / \partial y_n$ те же начальные задачи, что и для $\partial \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi / \partial y_0$ и $\partial \overset{(1)}{Q}_0 \psi / \partial y_0$ соответственно. В силу теоремы единственности решения соответствующих начальных задач совпадают.

Принимая во внимание (52), (33), (39), с учетом предыдущего обсуждения из (38) и (40), имеем равенства

$$\frac{\partial M_0}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_0} = \frac{\partial M_n}{\partial \overset{(j)}{\varphi}_n}, \quad j = 1, 2, \qquad \frac{\partial M_0}{\partial y_0} = \frac{\partial M_n}{\partial y_n}.$$

Отсюда и (51), (61) следует, что якобианы системы (38) в точке $(\overset{(1)}{\varphi}_0, \overset{(2)}{\varphi}_0, y_0)$ и (40) в точке $(\overset{(1)}{\varphi}_n, \overset{(2)}{\varphi}_n, y_n)$ равны. Таким образом, Лемма 5.1 доказана.

Благодарность. *Авторы выражают благодарность А. В. Дмитруку и М. С. Никольскому за полезные обсуждения.*

Список литературы

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука; 1973. 272 с.
2. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука; 1989. 336 с.
3. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука; 1981. 400 с.
4. Boglaev I.P., Sirotkin V.V. Computational method for a singular perturbation via domain decomposition and its parallel implementation. *Applied Mathematics and Computation.* 1993;56(1):71–95. https://doi.org/10.1016/0096-3003(93)90080-X
5. Kadalbajoo M.K., Gupta V. A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems. *Applied Mathematics and Computation.* 2010;217(8):3641–3716. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.09.059
6. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления. *Автоматика и телемеханика.* 2006;(1):3–51.
7. Курина Г.А. Сингулярные возмущения задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной. Обзор. *Известия Российской академии наук. Техническая кибернетика.* 1992;(4):20–48.
8. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012. *International Journal of Information and Systems Sciences.* 2014;9(1):1–36.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Издательство Московского университета; 1978. 107 с.
10. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Асимптотика решения одной задачи быстродействия с неограниченным целевым множеством для линейной системы в критическом случае. *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2022;28(1):58–73. http://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73

11. Kurina G., Nguyen T.H. Zero-order asymptotic solution of a class of singularly perturbed linear-quadratic problems with weak controls in a critical case. *Optimal Control Applications and Methods.* 2019;40(5):859-879. https://doi.org/10.1002/oca.2514
12. Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Шнайдер К.Р. Сингулярно возмущенные задачи в случае смены устойчивости. *Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.* 2002;109:5-242.
13. Nefedov N.N., Schneider K.R. Immediate exchange of stabilities in singularly perturbed systems. *Differential and Integral Equations.* 1999;12(4):583–599. https://doi.org/10.57262/die/1367267008
14. Васильева А.Б., Нефёдов Н.Н., Радченко И.В. О внутреннем переходном слое в сингулярно возмущенной начальной задаче. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1996;36(9):105–111.
15. Ильин А.М., Долбеева С.Ф. Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения. *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2006;12(1):98–108.
16. Kurina G., Hoai N.T. First asymptotic approximations to a solution of singularly perturbed optimal control problem with intersecting solutions of degenerate problem. *Applied Mathematics and Computation.* 2017;292:356–374. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.07.038
17. Kurina G., Hoai N.T. Higher order asymptotic approximation to a solution of singularly perturbed optimal control problem with intersecting solutions of the degenerate problem. 2019 23^{rd} International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2019;727–732. https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2019.8885991
18. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г., Ни Минь Кань. О контрастной структуре типа ступеньки для задачи вариационного исчисления. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2004;44(7):1271–1280.
19. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука; 1979. 432 с.
20. Никольский М.С. О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах. *Вестник Московского университета Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика.* 2005;(1):35–43.
21. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, Физматлит; 1965. 424 с.

References

1. Vasil'eva AB, Butuzov VF. Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka; 1973. 272 p. (in Russian)
2. Il'in AM. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 102. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society; 1992. 281 p.
3. Lomov SA. Introduction to the general theory of singular perturbations. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 112. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society; 1992. 375 p.
4. Boglaev IP, Sirotkin VV. Computational method for a singular perturbation via domain decomposition and its parallel implementation. *Applied Mathematics and Computation.* 1993;56(1):71–95. https://doi.org/10.1016/0096-3003(93)90080-X
5. Kadalbajoo MK, Gupta V. A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems. *Applied Mathematics and Computation.* 2010;217(8):3641–3716. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.09.059
6. Dmitriev MG, Kurina GA. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control.* 2006;67(1):1–43. https://doi.org/10.1134/S0005117906010012
7. Kurina GA. Singular perturbations of control problems with equation of state not solved for the derivative (a survey). *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 1993;31(6):17–45.
8. Zhang Y, Naidu DS, Cai C, Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012. *International Journal of Information and Systems Sciences.* 2014;9(1):1–36.
9. Vasil'eva AB, Butuzov VF. Singularly perturbed equations in the critical case. Wisconsin: University of Wisconsin-Madison; 1980. 165 p.
10. Danilin AR, Kovrizhnykh OO. Asimptotika resheniya odnoi zadachi bystrodeistviya s neogranichennym tselevym mnozhestvom dlya lineinoi sistemy v kriticheskom sluchae [Asymptotics of a solution to a time-optimal control problem with an unbounded target set for a linear system in the critical case]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN.* 2022;28(1):58–73. (in Russian) https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73
11. Kurina G, Nguyen TH. Zero-order asymptotic solution of a class of singularly perturbed linear-quadratic problems with weak controls in a critical case. *Optimal Control Applications and Methods.* 2019;40(5):859-879. https://doi.org/10.1002/oca.2514
12. Butuzov VF, Nefedov NN, Schneider KR. Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities. *Journal of Mathematical Sciences.* 2004;121(1):1973–2079. https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000021571.21423.52
13. Nefedov NN, Schneider KR. Immediate exchange of stabilities in singularly perturbed systems. *Differential and Integral Equations.* 1999;12(4):583–599. https://doi.org/10.57262/die/1367267008
14. Vasil'eva AB, Nefedov NN, Radchenko IV. On internal transition layer in singularly perturbed initial value problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1996;36(9):1251–1256.

15. Il'in AM, Dolbeeva SF. Asymptotics of the solution to a differential equation with a small parameter in the case of two limit solutions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2006;253(Suppl 1):S105—S116. https://doi.org/10.1134/S0081543806050099.
16. Kurina G, Hoai NT. First asymptotic approximations to a solution of singularly perturbed optimal control problem with intersecting solutions of degenerate problem. *Applied Mathematics and Computation.* 2017;292:356–374. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.07.038
17. Kurina G, Hoai NT. Higher order asymptotic approximation to a solution of singularly perturbed optimal control problem with intersecting solutions of the degenerate problem, 2019 23^{rd} International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2019;727–732.
https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2019.8885991
18. Vasil'eva AB, Dmitriev MG, Ni Ming Kang. On a steplike contrast structure in a problem of variational calculus. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2004;44(7):1203–1212.
19. Alekseev VM, Tikhomirov VM, Fomin SV. Optimal'noye upravleniye [Optimal control]. Moscow: Nauka; 1979. 432 p. (in Russian)
20. Nikol'skii MS. O dostatochnosti printsipa maksimuma Pontryagina v nekotorykh optimizatsionnykh zadachakh [On sufficiency of Pontryagin's maximum principle in some optimization problems]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika.* 2005;(1):35–43. (in Russian)
21. El'sgol'ts LE. Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka, Fizmatlit; 1965. 424 p. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.08.2023
Поступила после рецензирования 02.10.2023
Принята к публикации 05.10.2023

Received August 21, 2023
Revised October 2, 2023
Accepted October 5, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Курина Галина Алексеевна – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия,

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Нгуен Тхи Хоай – кандидат физико-математических наук, преподаватель, Научный Университет, Вьетнамский Национальный Университет, г. Ханой, Вьетнам

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Galina A. Kurina – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia,

Federal Research Center "Computer Science and Control"of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Nguyen T. Hoai – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Teacher, University of Science, Vietnam National University, Hanoi, Vietnam