

## Теоретико-множественный подход к определению прочностных характеристик дискретной модели цилиндрической оболочки на основе векторной аппроксимации

Ищанов Т. Р. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

Волгоградский государственный аграрный университет,  
Россия, 400002, г. Волгоград, пр. Университетский, 26  
[ishchanov.volgau@ya.ru](mailto:ishchanov.volgau@ya.ru)

**Аннотация.** Для определения напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции использована дискретная модель эллиптического цилиндра. Вся исследуемая область была разбита на конечное число непересекающихся множеств (конечные элементы), взаимодействующих только в узловых точках. В качестве узловых неизвестных приняты компоненты вектора перемещения и компоненты вектора угла поворота нормали. В данной работе представлен алгоритм прочностного расчета эллиптического цилиндра при отсчете угла наклона нормали от ее деформированного состояния при учете векторной интерполяционной процедуры. На конкретном примере показана высокая эффективность предложенного алгоритма, который решает проблему учета смещения конечного элемента как жесткого целого.

**Ключевые слова:** угол наклона нормали, векторная и скалярная аппроксимации, конечный элемент дискретизации

**Для цитирования:** Ищанов Т. Р. 2024. Теоретико-множественный подход к определению прочностных характеристик дискретной модели цилиндрической оболочки на основе векторной аппроксимации. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 75–82. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-75-82

Original Research

## Set-theoretic Approach to Determining the Strength Characteristics of a Discrete Model of a Cylindrical Shell Based on Vector Approximation

Tlek R. Ishchanov 

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

Volgograd State Agricultural University,  
26 Universitetskii Ave., Volgograd, 400002, Russia  
[ishchanov.volgau@ya.ru](mailto:ishchanov.volgau@ya.ru)

**Abstract.** To determine the stress-strain state of the shell structure, a discrete model of an elliptical cylinder was used. The entire study area was divided into a finite number of disjoint sets (finite elements), interacting only at nodal points. The derivation of basic geometric relationships involves two calculation options: counting the angle of rotation of the normal from its initial state and from its deformed position. The components of the displacement vector, their first derivatives, and the components of the normal rotation angle vector are taken as nodal unknowns. Approximating expressions between the components of the displacement vector, their derivatives, the vector of the normal rotation angle of the internal point of the finite element and the components of the displacement vectors, their derivatives, the vectors of the normal rotation angles of its node points were obtained on the basis of a vector interpolation procedure, which makes it possible to automatically take into account the displacements of the cylindrical shell as absolutely solid body. This paper presents an algorithm for the strength calculation of an elliptical cylinder when measuring the angle of inclination of the normal from its deformed state, taking into account the vector interpolation procedure. A specific example shows the high efficiency of the proposed algorithm, which solves the problem of taking into account the displacement of a finite element as a rigid whole.

**Keywords:** Normal Slope Angle, Vector and Scalar Approximation, Finite Sampling Element

**For citation:** Ishchanov T. R. 2024. Set-theoretic Approach to Determining the Strength Characteristics of a Discrete Model of a Cylindrical Shell Based on Vector Approximation. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 75–82. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-75-82

**1. Введение.** В инженерной практике для определения прочностных характеристик реальная конструкция заменяется математической моделью, что позволяет провести ее анализ и составить объективный прогноз будущего состояния системы при заданных нагрузках [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Вычислительные мощности

современных компьютеров обеспечили успешную интеграцию численных методов в инженерные расчеты оболочечных конструкций различной геометрии [7].

В данной работе проведено исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) дискретной модели эллиптического цилиндра на основе метода конечных элементов (МКЭ) и раздела дискретной математики – теории множеств. В рамках деформационной теории Тимошенко [8, 9, 10, 11] предложен математический алгоритм расчета дискретной модели цилиндрической конструкции при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния [12], который показал неоспоримые преимущества в сравнении с общепринятым подходом отсчета угла поворота нормали от ее исходного состояния [13, 14, 15]. На основе векторной аппроксимации получены аппроксимирующие соотношения между компонентами вектора перемещения, вектора угла поворота нормали внутренней точки конечного элемента и компонентами векторов перемещений, векторов угла поворота нормали его узловых точек. Предложенный алгоритм в сочетании с векторной интерполяцией позволяет учитывать смещения цилиндрической оболочки как абсолютно твердого тела, вне зависимости от выбранной системы координат, что является общепризнанной проблемой МКЭ.

**2. Геометрия эллиптического цилиндра.** В ходе исследования рассматриваются положения точек, находящиеся на срединной поверхности цилиндра и в произвольном слое на расстоянии  $\zeta$  до деформирования цилиндрической оболочки ( $M^0$ ,  $M^{0\zeta}$ ) и после ее деформации ( $M$ ,  $M^\zeta$ ).

Опишем положение точки  $M^0$  формулой

$$\vec{R}^o = x \vec{i} + b \cdot \sin(t) \vec{j} + c \cdot \cos(t) \vec{k}, \quad (1)$$

где  $b$ ,  $c$  – полуоси эллиптического цилиндра,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орты декартовой системы координат,  $x$ ,  $t$  – криволинейные координаты.

Дифференцированием (1) по глобальным координатам найдем векторы, касательные к срединной поверхности цилиндра в точке  $M^0$

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^o &= \vec{R}_{,x}^o = \vec{i}, \\ \vec{a}_2^o &= \vec{R}_{,t}^o = b \cdot \cos(t) \vec{j} - c \cdot \sin(t) \vec{k}, \\ \vec{a}_n^o &= \frac{\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o}{|\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o|} = \frac{d_1}{d} \vec{i} + \frac{d_2}{d} \vec{j} + \frac{d_3}{d} \vec{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = c \cdot \sin(t)$ ,  $d_3 = b \cdot \cos(t)$ ,  $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ .

Соотношения (2) запишем в матричном виде

$$\{\vec{a}^o\} = [r^o] \{\vec{i}\}; \{\vec{i}\} = [r^o]^{-1} \{\vec{a}^o\}, \quad (3)$$

где  $\{\vec{a}^o\}^T = \{\vec{a}_1^o \vec{a}_2^o \vec{a}_n^o\}$ ;  $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}$ ;

$$[r^o] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b \cdot \cos(t) & -c \cdot \sin(t) \\ 0 & \frac{c \cdot \sin(t)}{d} & \frac{b \cdot \cos(t)}{d} \end{bmatrix}.$$

Определим в базисе  $\{\vec{a}_1^o \vec{a}_2^o \vec{a}_n^o\}$  производные его базисных векторов

$$\begin{aligned} \{\vec{a}_{,x}^o\} &= [r_{,x}^o] \{\vec{i}\} = [r_{,x}^o] [r^o]^{-1} \{\vec{a}^o\} = [\omega] \{\vec{a}^o\}; \\ \{\vec{a}_{,t}^o\} &= [r_{,t}^o] \{\vec{i}\} = [r_{,t}^o] [r^o]^{-1} \{\vec{a}^o\} = [k] \{\vec{a}^o\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\{\vec{a}_{,x}^o\}^T = \{\vec{a}_{1,x}^o \vec{a}_{2,x}^o \vec{a}_{n,x}^o\}$ ;  $\{\vec{a}_{,t}^o\}^T = \{\vec{a}_{1,t}^o \vec{a}_{2,t}^o \vec{a}_{n,t}^o\}$ ;

Радиус-векторы, которые определяют положения точек  $M$ ,  $M^{0\zeta}$ ,  $M^\zeta$ , описываются формулами

$$\vec{R} = \vec{R}^o + \vec{v}; \vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^o + \zeta \vec{a}_n^o; \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}. \quad (5)$$

Вектор перемещения  $\vec{v}$  представляется в базисе  $\{\vec{a}^o\}$  (3) следующей записью

$$\vec{v} = v^i \vec{a}_i^o. \quad (6)$$

Дифференцированием (6) по  $x$ ,  $t$ , воспользовавшись (4), найдем производные вектора перемещения  $\vec{v}$

$$\vec{v}_{, \alpha} = q_{\alpha}^s \vec{a}_s^o; \vec{v}_{, \alpha \beta} = q_{\alpha \beta}^s \vec{a}_s^o, \quad (7)$$

где  $q_{\alpha}^s$ ,  $q_{\alpha \beta}^s$  – содержат компоненты  $\vec{v}$ , их первые и вторые производные;  $\alpha$  и  $\beta$  определяют операции дифференцирования по  $x$  и  $t$ .

При отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния вектор  $\vec{V}$ , входящий в (5), задается соотношением

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta \vec{\gamma}, \quad (8)$$

где  $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{a}_1^0 + \gamma^2 \vec{a}_2^0 + \gamma \vec{a}_n^0$  – вектор углов поворота нормали.

Предложенный вариант отсчета угла поворота нормали от ее деформированного состояния определяет вектор  $\vec{V}$  согласно следующей формуле:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta \left( \vec{v}^n \times \vec{a}_n^0 \right) + \zeta \left( \vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0 \right), \quad (9)$$

где  $\vec{v}^n = \vec{a}_n - \vec{a}_n^0$  – вектор разности нормалей в деформированном и исходном состояниях.

Определим деформации в произвольном слое оболочки, который находится на расстоянии  $\zeta$  от срединной поверхности, воспользовавшись формулами механики сплошной среды [16]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \frac{\left( \mathbf{g}_{\alpha\beta} - \mathbf{g}_{\alpha\beta}^0 \right)}{2}; \quad \varepsilon_{\alpha 3}^{\zeta} = \frac{\left( \mathbf{g}_{\alpha 3} - \mathbf{g}_{\alpha 3}^0 \right)}{2}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta$ ;  $\mathbf{g}_{\alpha\beta}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\beta^0$ ;  $\mathbf{g}_{\alpha 3} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_3$ ;  $\mathbf{g}_{\alpha 3}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_3^0$ .

Дифференцированием радиус-векторов по глобальным координатам найдем базисные векторы (10) в произвольном слое оболочки

$$\vec{g}_\alpha^0 = \vec{R}_{,\alpha}^{0\zeta}; \quad \vec{g}_\alpha = \vec{R}_{,\alpha}^{\zeta}; \quad \vec{g}_3^0 = \vec{R}_{,\zeta}^{0\zeta} = \vec{a}_n^0; \quad \vec{g}_3 = \vec{R}_{,\zeta}^{\zeta} = \vec{a}_n^0 + \vec{V}_{,\zeta}. \quad (11)$$

**3. Элемент дискретизации.** Под элементами дискретизации понимаются подмножества, объединение которых составляет поверхность эллиптического цилиндра. В данной статье рассматриваются четырехугольные объекты дискретизации. Для реализации численного интегрирования четырехугольный фрагмент отображается на квадрат, между элементами которых устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Элементами данных множеств являются точки интегрирования, в программной реализации алгоритма использовалось 36 точек интегрирования. Локальная система координат представлена следующим образом:  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ .

При использовании векторной аппроксимации в качестве узловых варьируемых параметров используются векторы перемещений узловых точек и векторы углов поворота нормали в локальной и глобальной системах координат

$$\left\{ \vec{U}_y^L \right\}_{1 \times 16}^T = \left\{ \left\{ \vec{v}_y^L \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \vec{\gamma} \right\}_{1 \times 4}^T \right\}; \quad (12)$$

$$\left\{ \vec{U}_y^G \right\}_{1 \times 16}^T = \left\{ \left\{ \vec{v}_y^G \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \vec{\gamma} \right\}_{1 \times 4}^T \right\}, \quad (13)$$

где

$$\left\{ \vec{v}_y^L \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \vec{v}_{,\xi}^i \vec{v}_{,\xi}^j \vec{v}_{,\xi}^k \vec{v}_{,\xi}^l \vec{v}_{,\eta}^i \vec{v}_{,\eta}^j \vec{v}_{,\eta}^k \vec{v}_{,\eta}^l \right\};$$

$$\left\{ \vec{v}_y^G \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \vec{v}_{,x}^i \vec{v}_{,x}^j \vec{v}_{,x}^k \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \vec{v}_{,t}^j \vec{v}_{,t}^k \vec{v}_{,t}^l \right\};$$

$$\left\{ \vec{\gamma} \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \vec{\gamma}^i \vec{\gamma}^j \vec{\gamma}^k \vec{\gamma}^l \right\}.$$

Матрица  $[LG]$  устанавливает взаимосвязь между узловыми неизвестными (12) и (13)

$$\left\{ \vec{U}_y^L \right\}_{16 \times 1} = [LG]_{16 \times 16} \left\{ \vec{U}_y^G \right\}_{16 \times 1}. \quad (14)$$

Посредством следующих формул вектор перемещения точки  $M$  выражается через узловые величины (12), (13)

$$\vec{v} = \left\{ f \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \vec{v}_y^L \right\}_{12 \times 1} = \left\{ f \right\}_{1 \times 12}^T [PK]_{12 \times 12} \left\{ \vec{v}_y^G \right\}_{12 \times 1}; \quad \vec{\gamma} = \left\{ \lambda \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \vec{\gamma}_y \right\}_{4 \times 1}, \quad (15)$$

где  $\{f\}_{1 \times 12}^T = \{f_1 f_2 \dots f_{12}\}$ ;  $\{\lambda\}_{1 \times 4}^T = \{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4\}$  – функции формы, представляющие собой произведения полиномов Эрмита третьей степени и билинейные функции локальных координат соответственно;  $[PK]$  – матрица перехода от столбца  $\{\vec{v}_y^L\}$  к столбцу  $\{\vec{v}_y^G\}$  (14).

Используя соотношения (6), (7) и (11), запишем формулы (15) в следующем виде

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \{f\}_{1 \times 12}^T [PK]_{12 \times 12} \begin{bmatrix} \vec{B}_v \\ \vec{B}_v \\ \vec{B}_v \end{bmatrix}_{12 \times 36} \{h_v\}_{36 \times 1} = \{f\}_{1 \times 12}^T \begin{bmatrix} \vec{B}_v \\ \vec{B}_v \\ \vec{B}_v \end{bmatrix}_{12 \times 36} [KP]_{36 \times 36} \{h_v\}_{36 \times 1}; \\ \vec{\gamma} &= \{\lambda\}_{1 \times 4}^T \begin{bmatrix} \vec{B}_\gamma \\ \vec{B}_\gamma \\ \vec{B}_\gamma \end{bmatrix}_{4 \times 8} \{h_\gamma\}_{8 \times 1}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\begin{bmatrix} \vec{B}_v \\ \vec{B}_v \\ \vec{B}_v \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} \vec{B}_\gamma \\ \vec{B}_\gamma \\ \vec{B}_\gamma \end{bmatrix}$  – квазидиагональные матрицы, элементами которых являются векторы локальных базисов узлов КЭ;  $[KP]$  – матрица перехода от столбца  $\{\vec{v}_y^G\}$  к столбцу  $\{\vec{v}_y^L\}$ ;

$$\{h_v\}_{1 \times 36}^T = \{v^{1i} v^{2i} v^i \dots v^l q_1^{1i} q_1^{2i} q_1^i \dots q_1^l q_2^{1i} q_2^{2i} q_2^i \dots q_2^l\};$$

$$\{h_\gamma\}_{1 \times 8}^T = \{\gamma^{1i} \gamma^{2i} \gamma^{1j} \gamma^{2j} \gamma^{1k} \gamma^{2k} \gamma^{1l} \gamma^{2l}\}.$$

Выразим векторы базиса узловых точек через векторы базиса внутренней точки КЭ

$$\{\vec{a}^{ow}\} = [n^{ow}] \{\vec{a}^o\}, \quad (17)$$

где  $\{\vec{a}^{ow}\} = \{\vec{a}_1^{ow} \vec{a}_2^{ow} \dots \vec{a}_n^{ow}\}$ ; верхний индекс  $w$  обозначает узел КЭ  $i, j, k$  или  $l$ .

Принимая во внимание (6) и (17), формулы (16) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} v^1 \vec{a}_1^o + v^2 \vec{a}_2^o + v \vec{a}_n^o &= \{f\}_{1 \times 12}^T \left( \begin{bmatrix} B_v^1 \\ B_v^2 \\ B_v \end{bmatrix} \vec{a}_1^o + \begin{bmatrix} B_v^2 \\ B_v^1 \\ B_v \end{bmatrix} \vec{a}_2^o + \begin{bmatrix} B_v \\ B_v \\ B_v \end{bmatrix} \vec{a}_n^o \right) \{D_{vy}\}_{36 \times 1}; \\ \gamma^1 \vec{a}_1^o + \gamma^2 \vec{a}_2^o &= \{\lambda\}_{1 \times 4}^T \left( \begin{bmatrix} B_\gamma^1 \\ B_\gamma^2 \\ B_\gamma \end{bmatrix} \vec{a}_1^o + \begin{bmatrix} B_\gamma^2 \\ B_\gamma^1 \\ B_\gamma \end{bmatrix} \vec{a}_2^o \right) \{N_{\gamma y}\}_{8 \times 1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\{D_{vy}\}_{36 \times 1} = [KP]_{36 \times 36} [K_v]_{36 \times 36} \left\{ \begin{bmatrix} v_y^1 \\ v_y^2 \\ v_y \end{bmatrix} \right\}_{12 \times 1}$ ;  $\{N_{\gamma y}\}_{8 \times 1} = [K_\gamma]_{8 \times 8} \left\{ \begin{bmatrix} \gamma_y^1 \\ \gamma_y^2 \end{bmatrix} \right\}_{4 \times 1}$ .

Компоненты вектора перемещения и вектора углов поворота нормалей получим из (18), приравняв коэффициенты при векторах  $\vec{a}_1^o, \vec{a}_2^o, \vec{a}_n^o$

$$\begin{aligned} v^1 &= \{f\}_{1 \times 12}^T [B_v^1] \{D_{vy}\}; \quad v^2 = \{f\}_{1 \times 12}^T [B_v^2] \{D_{vy}\}; \quad v = \{f\}_{1 \times 12}^T [B_v] \{D_{vy}\}; \\ \gamma^1 &= \{\lambda\}_{1 \times 4}^T [B_\gamma^1] \{N_{\gamma y}\}; \quad \gamma^2 = \{\lambda\}_{1 \times 4}^T [B_\gamma^2] \{N_{\gamma y}\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Анализ формул (19) показывает, что при векторном варианте аппроксимации каждая компонента вектора перемещения произвольной точки конечного элемента зависит от узловых значений всех трех компонент и их производных, каждая компонента угла поворота нормали зависит от узловых значений обеих компонент вектора угла поворота нормали [12].

Матрица жесткости и столбец узловых усилий записываются согласно стандартной для МКЭ процедуре в форме метода перемещений [17].

**4. Результаты численных расчетов.** Решена тестовая задача по определению НДС эллиптического цилиндра, нагруженного вдоль образующей линейной нагрузкой интенсивности  $q$ , с пружинными опорами (рис.1). Исходные данные:  $q = 5 \cdot 10^{-3}$  МПа;  $b = 0, 1$  м;  $c = 0, 025$ ;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0, 3$ ;  $h = 0,001$  м;  $L = 0,4$  м.

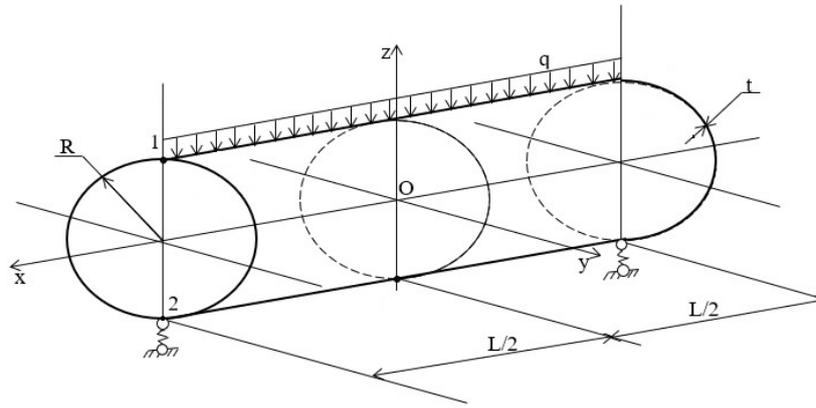


Рис. 1. Расчетная схема эллиптического цилиндра  
Fig. 1. Calculation diagram of an elliptical cylinder

Расчеты осуществлялись в двух вариантах: в первом варианте отсчет угла наклона нормали производился от ее исходного состояния (8), во втором – от ее деформированного состояния (9) на основании скалярной [17] и векторной форм аппроксимаций (15).

В таблицах 1-4 представлены значения физических кольцевых напряжений на внутренней  $\sigma_{tt}^B$  и наружной  $\sigma_{tt}^H$  поверхностях цилиндрической оболочки в точках 1 и 2 в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения эллиптического цилиндра для скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений при использовании первого и второго вариантов отсчета угла поворота нормали.

В качестве основных критериев достоверности производимых расчетов были выбраны сходимость вычислительного процесса и условие равенства численных значений окружных напряжений в точках 1 и 2.

Согласно статическому условию равновесия в точках 1 и 2 должно соблюдаться равенство кольцевых напряжений, что не выполняется при скалярном варианте аппроксимации как в первом (таблица 1), так и во втором (таблица 2) вариантах поворота нормали. При векторной интерполяции данное условие соблюдается при различных вариантах сетки дискретизации и способах отсчета угла наклона нормали.

Таблица 1  
Table 1

Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,1 м (первый вариант расчета)  
Voltage values  $\sigma_{tt}$  depending on sampling grid density and hard displacement value 0.1 m (first calculation option)

Жесткость пружины			10 <sup>2</sup> Н/м			
Величина жесткого смещения			0,1 м			
Интерполяция	Координаты (x; t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации			
			145x2	193x2	337x2	529x2
Скалярная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	38,42	49,23	120,39	143,03
		$\sigma_{tt}^H$	-39,03	-48,73	-120,47	-143,13
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	183,03	246,33	187,11	175,27
		$\sigma_{tt}^H$	-177,63	-244,77	-186,13	-175,13
Вертикальное смещение оболочки, 10 <sup>-2</sup> м			3,51298	7,24479	9,73310	9,99627
Векторная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
Вертикальное смещение оболочки, 10 <sup>-2</sup> м			10	10	10	10

При смещении цилиндрической конструкции на 0,1 и 0,2 м традиционная аппроксимация и в первом (таблицы 1 и 3) и во втором (таблицы 2 и 4) вариантах расчета не позволяет получить удовлетворительные результаты. Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  при векторном варианте аппроксимации полей перемещений с использованием различных сеток дискретизации и смещениях цилиндра на 0,1 и 0,2 м в обоих вариантах отсчета угла наклона нормали остаются достоверными и неизменными по величине.

Также важно отметить, что при смещении цилиндрической оболочки на 0,2 м в первом варианте расчета при более редкой сетке дискретизации наблюдается небольшая погрешность, которая устраняется при увеличении числа конечных элементов, во втором варианте результаты стабильны при различном числе элементов дискретизации.

Таблица 2  
Table 2

Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,1 м (второй вариант расчета)  
Voltage values  $\sigma_{tt}$  depending on sampling grid density and hard displacement value 0.1 m (second calculation option)

Жесткость пружины			$10^2$ Н/м			
Величина жесткого смещения			0,1 м			
Интерполяция	Координаты (x; t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации			
			145x2	193x2	337x2	529x2
Скалярная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	108,33	99,84	114,33	126,15
		$\sigma_{tt}^H$	-109,47	-98,37	-115,23	-126,17
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	69,23	733,36	156,72	168,38
		$\sigma_{tt}^H$	-67,17	-79,17	-155,12	-167,73
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			0,74323	1,82233	5,32218	9,44288
Векторная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			10	10	10	10

Таблица 3  
Table 3

Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,2 м (первый вариант расчета)  
Voltage values  $\sigma_{tt}$  depending on sampling grid density and hard displacement value 0.2 m (first calculation option)

Жесткость пружины			$10^2$ Н/м			
Величина жесткого смещения			0,2 м			
Интерполяция	Координаты (x; t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации			
			145x2	193x2	337x2	529x2
Скалярная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	0,37	-33,04	69,13	119,67
		$\sigma_{tt}^H$	-3,97	31,07	-68,49	-119,53
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	217,63	279,11	247,11	193,27
		$\sigma_{tt}^H$	-220,33	-269,15	-245,16	-192,13
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			9,38166	13,1367	19,93754	19,97153
Векторная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	155,53	156,36	157,33	157,84
		$\sigma_{tt}^H$	-154,87	-155,84	-156,93	-157,53
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	155,53	156,36	157,33	157,84
		$\sigma_{tt}^H$	-154,87	-155,84	-156,93	-157,53
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			20	20	20	20

Таблица 4  
Table 4

Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,2 м (второй вариант расчета)  
Voltage values  $\sigma_{tt}$  depending on sampling grid density and hard displacement value of 0.2 m (second calculation option)

Жесткость пружины			$10^2$ Н/м			
Величина жесткого смещения			0,2 м			
Интерполяция	Координаты (x; t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации			
			145x2	193x2	337x2	529x2
Скалярная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	107,37	86,23	91,63	149,53
		$\sigma_{tt}^H$	-107,23	-87,43	-93,29	-149,31
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	49,23	68,27	154,27	163,41
		$\sigma_{tt}^H$	-48,36	-67,36	-152,16	-162,74
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			0,81326	2,55477	10,54611	4,93624
Векторная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			20	20	20	20

**5. Заключение.** Анализируя результаты вышеприведенных расчетов, можно сделать вывод, что разработанный алгоритм может быть использован в инженерной практике для численного анализа НДС тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига.

Данные таблиц 1-4 показывают, что векторная интерполяция позволяет получать достоверные численные значения напряжений и при значительном вертикальном смещении цилиндрической оболочки как абсолютно твердого тела, а в сочетании с предложенным вариантом отсчета угла поворота нормали от ее деформированного состояния при редкой сетке элементов дискретизации.

Традиционная аппроксимация не позволяет получать достоверные значения напряжений в контролируемых точках цилиндрической конструкции при ее смещении как жесткого целого, что является общепризнанной проблемой МКЭ. Предложенный алгоритм позволяет автоматически учитывать смещения КЭ оболочки как абсолютно твердого тела.

### Список литературы

1. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит; 2006. 391 с.
2. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.- Петерб. ун-та; 2010. 380 с.
3. Салахутдинов М.А., Каюмов Р.А., Арипов Д.Н., Ханеков А.Р. Численное исследование несущей способности балки составного двутаврового сечения из пултрузионных стеклопластиковых профилей. *Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета*. 2022;2(60):15–23. DOI: 10.52409/20731523\_2022\_2\_15
4. Bishop J. A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2014;97(1):1–31.
5. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O. Polygonal finite elements for finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2015;101:305–328.
6. Liang K., Ruess M., Abdalla M. Co-rotational finite element formulation used in the Koiter-Newton method for nonlinear buckling analyses. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2016;116:38–54.
7. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение; 1974. 344 с.
8. Вольмир А.С. Современные проблемы теории пластинок и оболочек в летательных аппаратах. *Актуальные проблемы авиационной науки и техники*. 1984;77–87.
9. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне; 1988. 248 с.
10. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука; 1966. 636 с.
11. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Некоторые вопросы теории. Ленинград, Изд-во ЛГУ; 1964. 394 с.
12. Ищанов Т.Р. Анализ НДС цилиндрической оболочки при использовании четырехугольного элемента дискретизации с учетом деформации поперечного сдвига. В сборнике: *Инновационные технологии в агропромышленном комплексе в условиях цифровой трансформации. Материалы Международной научно-практической конференции*. Волгоград. 2022;117–122.
13. Паймушин В.Н., Камалутдинов А.М., Шишов М.А., Чумакова С.Ф. Уточненная трансформационная модель деформирования стержня-полосы с закрепленным участком на одной из лицевых поверхностей. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2023;8:78–86. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-8-78-86
14. Паймушин В.Н. Плоские задачи механики прямых стержней с учетом деформируемости участков закрепления, имеющих конечную длину. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2022;3:89–96. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-3-89-96
15. Badriev I., Paimushin V., Shihov M. A. Refined equations of the sandwich shells theory with composite external layers and a transverse soft core at average bending. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(11):1904–1914. DOI: 10.1134/S1995080219110076
16. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука; 1976. 536 с.
17. Джабраилов А.Ш., Николаев А.П., Ключков Ю.В., Гуреева Н.А., Ищанов Т.Р. Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2022;22(1):48–61. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61

### References

1. Golovanov AI., Tjuleneva ON., Shigabutdinov AF. Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures. M.: Fizmatlit; 2006. 391 p. (in Russian)
2. Novozhilov VV. Thin shell theory. SPb.: Izd-vo S.- Peterb. un-ta; 2010. 380 p. (in Russian)
3. Salakhutdinov MA., Kayumov RA., Aripov DN., Khanekov AR. Numerical study of the load-bearing capacity of a composite I-section beam made of pultruded fiberglass profiles. *News of the Kazan State University of Architecture and Civil Engineering*. 2022;2(60):15–23. (in Russian) DOI: 10.52409/20731523\_2022\_2\_15
4. Bishop J. A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2014;97(1):1–31.

5. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O. Polygonal finite elements for finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2015;101:305–328.
6. Liang K., Ruess M., Abdalla M. Co-rotational finite element formulation used in the Koiter-Newton method for nonlinear buckling analyzes. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2016;116:38–54.
7. Postnov VA., Kharhurim IYa. Finite element method in calculations of ship structures. L.: Shipbuilding; 1974. 344 p. (in Russian)
8. Volmir AS. Modern problems of the theory of plates and shells in aircraft. *Current problems of aviation science and technology*. 1984;77–87. (in Russian)
9. Rickards RB. Finite element method in shell theory and plates Riga: Zinatne; 1988. 248 p. (in Russian)
10. Timoshenko SP., Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. M.: The science; 1966. 636 p. (in Russian)
11. Chernykh KF. Linear theory of shells. Part 2. Some theoretical issues. Leningrad, Leningrad State University Publishing House; 1964. 394 p. (in Russian)
12. Ishchanov TR. SSS analysis of cylindrical shell when used quadrilateral sampling element taking into account deformation transverse shear. *In the collection: Innovative technologies in agro-industrial complex in the context of digital transformation. Materials of the International Scientific and Practical Conference. Volgograd*. 2022;117–122. (in Russian)
13. Paimushin VN., Kamalutdinov AM., Shishov MA., Chumakova SF. Refined transformation model of rod-strip deformation with fixed area on one of the front surfaces. *Izvestia institutions of higher education. Mathematics*. 2023;8:78–86. (in Russian) DOI: 10.26907/0021-3446-2023-8-78-86
14. Paimushin VN. Plane problems of mechanics of straight rods taking into account deformability of fastening sections having a finite length. *Izvestia institutions of higher education. Mathematics*. 2022;3:89–96. (in Russian) DOI: 10.26907/0021-3446-2022-3-89-96
15. Badriev I., Paimushin V., Shihov MA. Refined equations of the sandwich shells theory with composite external layers and a transverse soft core at average bending. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(11):1904–1914. DOI: 10.1134/S1995080219110076
16. Sedov LI. Continuum mechanics. M.: Science; 1976. 536 p. (in Russian)
17. Dzhabrailov ASh., Nikolaev AP., Klochkov YuV., Gureeva NA., Ishchanov TR. Nonlinear deformation of an axisymmetrically loaded shells of revolution based on FEM with various variants of defining equations. *News of Saratov University. New episode. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2022;22(1):48–61. (in Russian) DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.12.2023

Received December 27, 2023

Поступила после рецензирования 09.02.2024

Revised February 9, 2024

Принята к публикации 12.02.2024

Accepted February 12, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Ищанов Тлек Рахметолович** – кандидат технических наук, доцент кафедры Высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет, г. Волгоград, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Tlek R. Ishchanov** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russia