Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 1. С. 35–49.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 1. P. 35–49.

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 517.927
MSC 34A06
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-35-49

Модель деформаций стержня – консоли с ограничителем на смещение

Зверева М. Б.[1], **Каменский М. И.**[2], **Шабров С. А.**[1]
(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком*)

[1]Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1

[2]Воронежский государственный педагогический университет,
Россия, 394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86
margz@rambler.ru, mikhailkamenski@mail.ru, shaspoteha@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе исследуется модель деформаций сингулярного стержня – консоли под воздействием внешней силы. При этом предполагается, что один из концов стержня шарнирно закреплен, а смещение свободного конца стержня ограничено препятствием. Соответствующая модель реализуется в форме граничной задачи для интегро–дифференциального уравнения с интегрированием по Стилтьесу и нелинейным краевым условием. Проведено вариационное обоснование модели, получены необходимое и достаточное условия минимума соответствующего функционала потенциальной энергии. Доказаны теоремы существования и единственности решения исследуемой модели, в явном виде выписана формула представления решения.

Ключевые слова: ограниченная вариация, интеграл Стилтьеса, абсолютно непрерывная функция, внешний нормальный конус, граничная задача, модель деформаций стержня

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

Для цитирования: Зверева М. Б., Каменский М. И., Шабров С. А. 2024. Модель деформаций стержня – консоли с ограничителем на смещение. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 35–49. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-35-49

Original Research

A Model of Deformations of a Rod – Console With a Displacement Limiter

Margarita B. Zvereva[1], **Mikhail I. Kamenskii**[2], **Sergey A. Shabrov**[1]
(*Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak)*

[1]Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006, Russia

[2]Voronezh State Pedagogical University,
86 Lenina st., Voronezh, 394043, Russia
margz@rambler.ru, mikhailkamenski@mail.ru, shaspoteha@mail.ru

Abstract. In the present paper a model of deformations of a singular rod – console under the influence of an external force is studied. We assume that one of the ends of the rod is hinged, and the displacement of the free end of the console is restricted by a limiter. Depended on the applied external force this end of the console either remains the internal point of the limiter or touches the boundary of the limiter. The corresponding model is implemented in the form of a boundary value problem for an integro-differential equation with the Stieltjes integral and a nonlinear boundary condition. A variational justification of the model is carried out; the necessary and sufficient conditions for the minimum of the corresponding potential energy functional are established; theorems of existence and uniqueness of the solution to the model are proved; a formula for representing of the solution is written out explicitly; the solution dependence on the size of the limiter is studied.

Keywords: Bounded Variation, Stieltjes Integral, Absolutely Continuous Function, Outward Normal Cone, Boundary Value Problem, Rod Deformation Model

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Science Foundation (project number 22-71-10008).

For citation: Zvereva M. B., Kamenskii M. I., Shabrov S. A. 2024. A Model of Deformations of a Rod – Console With a Displacement Limiter. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 35–49. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-35-49

1. Введение. Дифференциальное уравнение вида

$$(pu'')'' + qu = f \tag{1}$$

является основой разных моделей естествознания, поэтому исследованию этого уравнения посвящено много работ (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15] и библиографию в них). Изучаемое в данной статье уравнение (1) может иметь особенности в коэффициентах и правой части (типа $\delta-$функции). Мы будем придерживаться подхода Ю. В. Покорного, согласно которому такого рода уравнение заменяется интегро-дифференциальным уравнением

$$(pu'')'(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0) \tag{2}$$

с интегрированием по Стилтьесу. На протяжении всей статьи предполагается, что
1) функции p, F имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$, и $\inf\limits_{x\in[0,l]} p(x) > 0$;
2) функция Q не убывает на $[0, l]$;
3) функции p, Q, F непрерывны в точках $x = 0$ и $x = l$.
Заметим, что в случае гладких p, Q, F уравнение (2) эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению (1), где $q = Q'$, $f = F'$.

В настоящей работе для уравнения (2) будет рассмотрена граничная задача с нелинейным краевым условием. Такая задача возникает при моделировании деформаций стержня, расположенного вдоль отрезка $[0, l]$ оси Ox, под воздействием внешней нагрузки. Предполагается, что один конец стержня шарнирно закреплен. Второй конец свободен, однако не может выйти за пределы установленного ограничителя на перемещение. Пусть функция $F(x)$ описывает внешнюю силу, направленную параллельно Oy, на участке от 0 до x, где $x \in [0, l]$. Через $u(x)$ обозначим функцию, описывающую деформацию стержня под воздействием этой силы. Условие шарнирного закрепления означает, что $u(0) = 0, u''(0) = 0$. Ограничение на смещение второго конца может быть записано как $u(l) \in C$. Рассмотрим случай, когда $C = [-m, m]$. В зависимости от приложенной внешней силы, $u(l)$ либо остается внутренней точкой C, либо становится граничной точкой C. Соответствующая математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int\limits_0^x u dQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(0) = 0, u''(0) = 0, \\ u''(l) = 0, \\ (pu'')'(l) \in N_C(u(l)), \end{cases} \tag{3}$$

где $N_C(u(l))$ обозначает внешний нормальный конус (см. [12]) в точке $u(l) \in C$ ко множеству C, определяемый как

$$N_C(u(l)) = \{\xi \in R : \xi(c - u(l)) \le 0 \quad \forall c \in C\}.$$

Здесь функция $Q(x)$ описывает упругую реакцию внешней среды, $p(x)$ определяется свойствами материала стержня. Решения $u(x)$ задачи (3) будем рассматривать в классе E абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций, производные которых абсолютно непрерывны. Более того, мы предполагаем, что функция pu'' абсолютно непрерывна на $[0, l]$, и $(pu'')'$ имеет ограниченную вариацию на $[0, l]$.

В настоящей работе проведено вариационное обоснование и установлена корректность модели (3).

2. Предварительные сведения. В этом разделе выпишем основные понятия и факты, которыми будем пользоваться.

Пространство $BV[0, l]$(см. [8],[13]). Это пространство определено для множества функций, чья вариация

$$V_0^l(v) = \sup_{0\le x_0<x_1<\ldots<x_k\le l} \sum_{i=0}^{k-1} |v(x_{i+1}) - v(x_i)|$$

ограничена. Согласно теореме Жордана, всякая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух неубывающих функций.

Скачки функций. Для любой функции $v(x)$ из $BV[0, l]$ в любой точке $\xi \in (0, l]$ ($\xi \in [0, l)$) существуют предел слева, т. е. $v(\xi - 0) = \lim\limits_{x\to\xi-0} v(x)$ и предел справа $v(\xi + 0) = \lim\limits_{x\to\xi+0} v(x)$. Скачком функции $v(x)$ в точке $x = \xi$ называется величина $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$ ($v(0 - 0) = v(0)$ и $v(l + 0) = v(l)$).

Через $S(v)$ будем обозначать множество точек разрыва функции $v(x)$. Для любой $v \in BV[0, l]$ множество $S(v)$ не более чем счетно.

Интеграл Римана – Стилтьеса (см. [8],[13]). Для пары функций $f(x), \mu(x)$ интеграл $\int_0^l f(x)d\mu(x)$ определяется как предел интегральных сумм

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)\right)\right),$$

когда $\max_i |x_{i+1} - x_i| \to 0$. В частности, если одна из функций $f(x)$, $\mu(x)$ непрерывна, а вторая имеет ограниченную вариацию, то интеграл $\int_0^l f d\mu$ наверняка существует.

Теорема о преобразовании меры (см. [8],[13]). *Для любой функции $\sigma(x)$ из $BV[0,l]$ и непрерывных функций $w(x)$, $\varphi(x)$ верно равенство*

$$\int_0^l \varphi d\mu = \int_0^l \varphi w d\sigma,$$

где $\mu(x) = \int_0^x w d\sigma + const.$

Абсолютно непрерывная функция (см.[8],[13]). Функция v называется абсолютно непрерывной на $[0,l]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любой конечной или счетной системы попарно непересекающихся интервалов (α_i, β_i) с суммой длин меньше δ, т. е.

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \delta$$

выполняется неравенство

$$\sum_i |(v(\beta_i) - v(\alpha_i))| < \varepsilon.$$

Согласно теореме Лебега, производная $w = v'$ абсолютно непрерывной функции интегрируема, и для любого $x \in [0,l]$ верно равенство

$$\int_0^x w(x)dx = v(x) - v(0).$$

Заметим, что любая абсолютно непрерывная на $[0,l]$ функция имеет ограниченную вариацию на $[0,l]$.

Лемма 2.1. (см. [2]). *Пусть функция $G(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,l]$. Пусть для любой функции $h \in E$, удовлетворяющей условиям $h(0) = h'(0) = 0$, $h(l) = h'(l) = 0$, верно равенство*

$$\int_0^l h' dG = 0.$$

Тогда для всех $x \in (0,l)$ выполнено равенство

$$G(x-0) = G(x+0) \equiv ax + b.$$

Интегро-дифференциальное уравнение (см. [2]).

Уравнение

$$(pu'')'(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0) \tag{4}$$

играет важную роль в этой статье. Оно содержит разрывные функции $p(x), Q(x), F(x)$ и интеграл Стилтьеса. Для того, чтобы иметь возможность корректно определить уравнение (4) в каждой точке введем следующие понятия. Пусть S — множество точек, в которых функции $p(x), Q(x), F(x)$ имеют ненулевые скачки. Через $\overline{[0,l]}_\sigma$ обозначим множество, полученное из $[0,l]$ заменой точек $\xi \in S$ на пары $\{\xi - 0, \xi + 0\}$. При этом предполагается, что $\xi - 0 > x$ для всех $x < \xi$ и $\xi + 0 < x$ для любых $x > \xi$. Множеству $\overline{[0,l]}_\sigma$ можно дать строгое определение как одномерному метрическому пространству. Рассмотрев жордановы представления функций ограниченной вариации p, F в виде разности неубывающих функций, т. е. $p = p^+ - p^-$ и $F = F^+ - F^-$ обозначим через σ следующую функцию

$$\sigma(x) = x + p^+(x) + p^-(x) + Q(x) + F^+(x) + F^-(x). \tag{5}$$

Заметим, что функции из жорданова представления можно выбрать так, что $\sigma(x)$ разрывна только в точках из S. Введем на множестве $[0, l] \setminus S$ метрику $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S \neq \emptyset$, то это метрическое пространство, очевидно, не является полным. Его стандартное метрическое пополнение (с точностью до изоморфизма) совпадает с $\overline{[0, l]}_\sigma$ и индуцирует на нем топологию.

Будем рассматривать уравнение (4), когда переменная x принадлежит $\overline{[0, l]}_\sigma$, т. е. x не совпадает с точками разрыва p, Q, F. Функции $p(\cdot), Q(\cdot)$, $F(\cdot)$ становятся непрерывными на $\overline{[0, l]}_\sigma$, поскольку величины $p(\xi \pm 0)$, $Q(\xi \pm 0)$ и $F(\xi \pm 0)$, которые были ранее предельными, теперь становятся собственными в соответствующих точках из $\overline{[0, l]}_\sigma$. Непрерывность функций $u(\cdot)$ позволяет сохранить обычный смысл интеграла Римана – Стилтьеса в уравнении (4), когда $x = \xi - 0$ и $x = \xi + 0$.

Таким образом, уравнение (4) рассматривается послойно: нижний уровень для значений $x \in [0, l]$, когда речь идет о самих решениях $u(x)$ (под знаком интеграла), и верхний уровень для остальных x в (4), где $x \in \overline{[0, l]}_\sigma$.

Заметим, что в каждой точке $\xi \in S$ имеет место равенство

$$\Delta(pu'')'(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi).$$

Нам также понадобятся следующие теоремы из [2].

Теорема 2.1 *Для любых чисел* u_0, u_1, u_2, u_3 *и для любой точки* $x_0 \in \overline{[0, l]}_\sigma$ *задача*

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int\limits_0^x u dQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'(x_0) = u_1, \\ u''(x_0) = u_2, \\ (pu'')'(x_0) = u_3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$(pu'')'(x) + \int\limits_0^x u dQ = (pu'')'(0). \tag{6}$$

Из теоремы 2.1 следует, что пространство решений уравнения (6) имеет размерность 4.

Определим аналог определителя Вронского $W(x)$ на множестве $\overline{[0, l]}_\sigma$ как

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \varphi_3''(x) & \varphi_4''(x) \\ (p\varphi_1'')'(x) & (p\varphi_2'')'(x) & (p\varphi_3'')'(x) & (p\varphi_4'')'(x) \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где $\varphi_i(x) (i = 1, 2, 3, 4)$ — решения однородного уравнения (6).

Теорема 2.2 *Пусть функции* $\varphi_i(x) (i = 1, 2, 3, 4)$ *являются решениями однородного уравнения (6). Следующие свойства эквивиалентны:*

1) существует точка $x_0 \in \overline{[0, l]}_\sigma$ *такая, что* $W(x_0) = 0$;

2) $W(x_0) \equiv 0$ *на множестве* $\overline{[0, l]}_\sigma$;

3) функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$ *линейно независимы.*

Теорема 2.3. *Пусть* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ *и* $\varphi_4(x)$ *— решения однородного уравнения (6). Тогда* $(pW)(x) \equiv const$ *на множестве* $\overline{[0, l]}_\sigma$.

3. Вариационное обоснование модели. Покажем, что задача (3) является необходимым условием экстремума функционала потенциальной энергии рассматриваемой физической системы. Согласно [2], если деформация стержня определяется функцией $u(x)$, то его потенциальная энергия имеет вид

$$\Phi(u) = \int\limits_0^l \frac{p(x)u''^2(x)}{2}dx + \int\limits_0^l \frac{u^2(x)}{2}dQ(x) - \int\limits_0^l u(x)dF(x). \tag{8}$$

Подчеркнем, что функция $u(x)$ – это гипотетическая (виртуальная) деформация. Рассмотрим функционал $\Phi(u)$ на множестве функций $u \in E$ таких, что

$$u(0) = 0, \quad u(l) \in C. \tag{9}$$

Согласно принципу Гамильтона – Лагранжа, реальная деформация $u_0(x)$ минимизирует функционал Φ с условиями (9). Пусть функции $h \in E$ такие, что

$$h(0) = h'(0) = 0, \quad h(l) = h'(l) = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим функции $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$, где λ — вещественное число. Заметим, что $u \in E$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $u(l) = u_0(l) \in C$. Тогда

$$\Phi(u_0) \le \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав h, рассмотрим функцию $\varphi_h(\lambda)$ вещественного аргумента λ, определенную как $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$. Тогда для всех чисел λ выполнено неравенство

$$\varphi_h(0) \le \varphi_h(\lambda),$$

и по теореме Ферма $\frac{d}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$. Последнее равенство может быть записано как

$$\int_0^l p u_0'' h'' dx + \int_0^l u_0 h dQ - \int_0^l h dF = 0.$$

Обозначим

$$g(x) = \int_0^x u_0 dQ. \tag{11}$$

После интегрирования по частям получим равенства

$$\int_0^l p u_0'' dh' + \int_0^l h dg - \int_0^l h dF = 0,$$

$$p(l)u_0''(l)h'(l) - p(0)u_0''(0)h'(0) - \int_0^l h' d(p u_0'') + h(l)g(l) - h(0)g(0) - \int_0^l g h' dx - \tag{12}$$

$$-h(l)F(l) + h(0)F(0) + \int_0^l F h' dx = 0.$$

С учетом условий (10), последнее равенство примет вид

$$\int_0^l h' d(p u_0'') + \int_0^l g h' dx - \int_0^l F h' dx = 0.$$

Обозначим $\tilde{g}(x) = \int_0^x g(s)ds$, $\tilde{F}(x) = \int_0^x F(s)ds$. Тогда

$$\int_0^l h' d((p u_0'') + \tilde{g} - \tilde{F}) = 0. \tag{13}$$

Равенство (13) выполнено для всех функций $h \in E$, удовлетворяющих (10). Применив лемму 2.1, получим

$$(p u_0'')(x) + \tilde{g}(x) - \tilde{F}(x) = ax + b,$$

т. е.

$$(p u_0'')(x) = \int\limits_0^x F(s)ds + ax + b - \int\limits_0^x g(s)ds. \tag{14}$$

Следовательно, функция $(p u_0'')$ абсолютно непрерывна и

$$(p u_0'')'(x) + \int\limits_0^x u_0 dQ = F(x) + a. \tag{15}$$

Перепишем равенство (15), как

$$(p u_0'')'(x) + \int\limits_0^x u_0 dQ = (p u_0'')'(0) + F(x) - F(0). \tag{16}$$

Рассмотрим теперь функции h такие, что $h \in E$,

$$h(0) = h'(0) = 0, \quad h(l) = 0 \tag{17}$$

и функции $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$, где $\lambda \in R$. Заметим, что $u \in E$, $u(0) = 0$, $u(l) = u_0(l) \in C$. Тогда

$$\Phi(u_0) \le \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав h, обозначим $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$. Аналогично, по теореме Ферма $\frac{d}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$, и из (12) с учетом условий (17), получим

$$p(l)u_0''(l)h'(l) - \int_0^l h' d(pu_0'') - \int_0^l gh' dx + \int_0^l Fh' dx = 0,$$

где $g(x)$ определена (11). С учетом (14), последнее равенство принимает вид

$$p(l)u_0''(l)h'(l) - \int_0^l h'(F(x) + a - g(x))dx - \int_0^l gh' dx + \int_0^l Fh' dx = 0.$$

Поскольку $h(l) = h(0) = 0$, то

$$p(l)u_0''(l)h'(l) = 0.$$

Следовательно,

$$p(l)u_0''(l) = 0. \tag{18}$$

Аналогично, рассматривая функции $h \in E$, удовлетворяющие условиям $h(0) = 0$, $h(l) = 0$, $h'(l) = 0$, получим

$$p(0)u_0''(0) = 0. \tag{19}$$

Зафиксируем теперь любой элемент $c \in C$. Рассмотрим функцию h такую, что $h \in E$, $h(0) = 0$, $h(l) = c - u_0(l)$. Пусть $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$. Заметим, что $u \in E$, и $u(0) = 0$. Выпишем условие в точке $x = l$. Имеем

$$u(l) = u_0(l) + \lambda h(l) = u_0(l) + \lambda(c - u_0(l)) =$$

$$= \lambda c + (1 - \lambda)u_0(l).$$

Так как $c \in C$, $u_0(l) \in C$, множество C выпуклое, то для всех $\lambda \in [0, 1]$ имеем $u(l) \in C$. Таким образом,

$$\Phi(u_0) \le \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав h, введем функцию $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$ вещественной переменной $\lambda \in [0, 1]$. Следовательно,

$$\varphi_h(0) \le \varphi_h(\lambda).$$

Тогда правая производная удовлетворяет неравенству

$$\frac{d^+}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} \ge 0,$$

т. е.

$$p(l)u_0''(l)h'(l) - p(0)u_0''(0)h'(0) - \int_0^l h' d(pu_0'') + h(l)g(l) - h(0)g(0) - \int_0^l gh' dx - \tag{20}$$

$$-h(l)F(l) + h(0)F(0) + \int_0^l Fh' dx \ge 0,$$

где $g(x)$ определена (11). Воспользовавшись $h(0) = 0$, (14), (18) и (19), неравенство (20) может быть переписано как

$$h(l)(g(l) - F(l) - a) \ge 0.$$

Согласно (15),

$$a = (pu_0'')'(l) + g(l) - F(l).$$

Следовательно, получим, что

$$-(pu_0'')'(l)h(l) \ge 0,$$

т. е.

$$(pu_0'')'(l)(c - u_0(l)) \le 0,$$

где $c \in C$. Значит, $(pu_0'')'(l) \in N_C(u_0(l))$.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3.1. *Пусть функция u_0 минимизирует функционал энергии (8) при условиях $u(0) = 0$, $u(l) \in C$. Тогда u_0 — решение задачи (3), т. е.*

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int\limits_0^x u dQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(0) = 0, u''(0) = 0, \\ u''(l) = 0, \\ (pu'')'(l) \in N_C(u(l)), \end{cases}$$

где $x \in \overline{[0, l]}_\sigma$, $\sigma(x)$ определена (5).

4. Основные результаты. Рассмотрим задачу (3). Решением задачи (3) назовем функцию $u \in E$, удовлетворяющую уравнению (4) для всех $x \in \overline{[0, l]}_\sigma$, где $\sigma(x)$ определена (5), и удовлетворяющую граничным условиям $u(0) = 0 = u''(0)$, $u''(l) = 0$, $(pu'')'(l) \in N_C(u(l))$.

Теорема 4.1. *Если решение задачи (3) существует, то оно единственно.*

Доказательство. Предположим, что функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются решениями задачи (3). Тогда функция $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(pw'')'(x) + \int\limits_0^x w dQ = (pw'')'(0), \tag{21}$$

и условиям $w(0) = w''(0) = 0, w''(l) = 0$. При этом для всех $c \in C$ имеем

$$(pu_1'')'(l)(c - u_1(l)) \le 0,$$

$$(pu_2'')'(l)(c - u_2(l)) \le 0.$$

Поскольку $u_1(l) \in C$, $u_2(l) \in C$, то

$$(pu_1'')'(l)(u_2(l) - u_1(l)) \le 0,$$
$$(pu_2'')'(l)(u_1(l) - u_2(l)) \le 0.$$

Следовательно,

$$(pw'')'(l)w(l) \ge 0.$$

Из равенства (21) следует, что

$$\int_0^l wd(pw'')' + \int_0^l w^2 dQ = 0.$$

Таким образом,

$$w(l)(pw'')'(l) - \int_0^l (pw'')'w' dx + \int_0^l w^2 dQ = 0,$$

т. е.

$$w(l)(pw'')'(l) + \int_0^l pw''^2 dx + \int_0^l w^2 dQ = 0.$$

Следовательно, $w \equiv 0$. Теорема доказана.

Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — система решений однородного уравнения

$$(pu'')'(x) + \int\limits_0^x u dQ = (pu'')'(0),$$

удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 1, \\ \varphi_1''(0) = 0, \\ \varphi_1''(l) = 0, \\ (p\varphi_1'')'(l) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2(0) = 0, \\ \varphi_2''(0) = 1, \\ \varphi_2''(l) = 0, \\ (p\varphi_2'')'(l) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_3(0) = 0, \\ \varphi_3''(0) = 0, \\ \varphi_3''(l) = 1, \\ (p\varphi_3'')'(l) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_4(0) = 0, \\ \varphi_4''(0) = 0, \\ \varphi_4''(l) = 0, \\ (p\varphi_4'')'(l) = 1. \end{cases}$$

Покажем существование функций φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} (pw'')'(x) + \int\limits_0^x w dQ = (pw'')'(0), \\ w(0) = 0, w''(0) = 0, \\ w''(l) = 0, \\ (pw'')'(l) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Заметим, что задача (22) имеет только нулевое решение. В самом деле, из уравнения (21) следует, что

$$\int_0^l wd(pw'')' + \int_0^l w^2 dQ = 0.$$

Интегрируя первый интеграл по частям 2 раза, получим

$$\int_0^l pw''^2 dx + \int_0^l w^2 dQ = 0,$$

следовательно, $w \equiv 0$.

Рассмотрим следующие задачи.

$$\begin{cases} (pw_1'')'(x) + \int\limits_0^x w_1 dQ = (pw_1'')'(0), \\ w_1(0) = 1, w_1'(0) = 0, \\ w_1''(0) = 0, (pw_1'')'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (pw_2'')'(x) + \int\limits_0^x w_2 dQ = (pw_2'')'(0), \\ w_2(0) = 0, w_2'(0) = 1, \\ w_2''(0) = 0, (pw_2'')'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (pw_3'')'(x) + \int\limits_0^x w_3 dQ = (pw_3'')'(0), \\ w_3(0) = 0, w_3'(0) = 0, \\ w_3''(0) = 1, (pw_3'')'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (pw_4'')'(x) + \int\limits_0^x w_4 dQ = (pw_4'')'(0), \\ w_4(0) = 0, w_4'(0) = 0, \\ w_4''(0) = 0, (pw_4'')'(0) = 1. \end{cases}$$

Представим решение уравнения (21) в виде $w = d_1w_1 + d_2w_2 + d_3w_3 + d_4w_4$ и подставим в условия (22). Поскольку задача (22) имеет только нулевое решение, то определитель матрицы системы отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix} w_1(0) & w_2(0) & w_3(0) & w_4(0) \\ w_1''(0) & w_2''(0) & w_3''(0) & w_4''(0) \\ w_1''(l) & w_2''(l) & w_3''(l) & w_4''(l) \\ (pw_1'')'(l) & (pw_2'')'(l) & (pw_3'')'(l) & (pw_4'')'(l) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{23}$$

Представим φ_1 в виде $\varphi_1 = c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 + c_4w_4$. Воспользовавшись условиями для φ_1, получим систему для определения c_1, c_2, c_3, c_4

$$\begin{cases} c_1w_1(0) + c_2w_2(0) + c_3w_3(0) + c_4w_4(0) = 1, \\ c_1w_1''(0) + c_2w_2''(0) + c_3w_3''(0) + c_4w_4''(0) = 0, \\ c_1w_1''(l) + c_2w_2''(l) + c_3w_3''(l) + c_4w_4''(l) = 0, \\ c_1(pw_1'')'(l) + c_2(pw_2'')'(l) + c_3(pw_3'')'(l) + c_4(pw_4'')'(l) = 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись (23), последняя система имеет единственное решение. Следовательно, функция φ_1 определена единственным образом. Существование функций φ_2, φ_3, φ_4 доказывается аналогично.

Обозначим

$$\Delta_1(s) = -\begin{vmatrix} \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_2'(s) & \varphi_3'(s) & \varphi_4'(s) \\ p(s)\varphi_2''(s) & p(s)\varphi_3''(s) & p(s)\varphi_4''(s) \end{vmatrix}; \Delta_2(s) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_3'(s) & \varphi_4'(s) \\ p(s)\varphi_1''(s) & p(s)\varphi_3''(s) & p(s)\varphi_4''(s) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3(s) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) & \varphi_4'(s) \\ p(s)\varphi_1''(s) & p(s)\varphi_2''(s) & p(s)\varphi_4''(s) \end{vmatrix}; \Delta_4(s) = -\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) & \varphi_3'(s) \\ p(s)\varphi_1''(s) & p(s)\varphi_2''(s) & p(s)\varphi_3''(s) \end{vmatrix}.$$

Теорема 4.2. *Если* $\left|\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l)\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s) + \varphi_2(l)\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s))\right| < m$, *то решение задачи (3) имеет вид*

$$u(x) = \frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(x)\int\limits_0^x \Delta_1(s)dF(s) + \varphi_2(x)\int_0^x \Delta_2(s)dF(s)+$$

$$+\varphi_3(x)\int\limits_x^l \Delta_3(s)dF(s) + \varphi_4(x)\int_x^l \Delta_4(s)dF(s)). \tag{24}$$

Если $\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l)\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s) + \varphi_2(l)\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s)) \geq m$, *то решение задачи (3) имеет вид*

$$u(x) = \frac{m\varphi_4(x)}{\varphi_4(l)} + \frac{1}{p(0)W(0)}\Big(\varphi_1(x)\int\limits_0^x \Delta_1(s)dF(s)+$$

$$+\varphi_2(x)\int\limits_0^x \Delta_2(s)dF(s) + \varphi_3(x)\int\limits_x^l \Delta_3(s)dF(s)+$$

$$+\varphi_4(x)\int\limits_x^l \Delta_4(s)dF(s)\Big) - \frac{\varphi_4(x)\varphi_1(l)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)}\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s)-$$

$$-\frac{\varphi_2(l)\varphi_4(x)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)}\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s). \tag{25}$$

Если $\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l)\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s) + \varphi_2(l)\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s)) \leq -m$, *то решение задачи (3) имеет вид*

$$u(x) = \frac{-m\varphi_4(x)}{\varphi_4(l)} + \frac{1}{p(0)W(0)}\Big(\varphi_1(x)\int\limits_0^x \Delta_1(s)dF(s)+$$

$$+\varphi_2(x)\int\limits_0^x \Delta_2(s)dF(s) + \varphi_3(x)\int\limits_x^l \Delta_3(s)dF(s)+$$

$$+\varphi_4(x)\int\limits_x^l \Delta_4(s)dF(s)\Big) - \frac{\varphi_4(x)\varphi_1(l)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)}\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s)-$$

$$-\frac{\varphi_2(l)\varphi_4(x)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)}\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s). \tag{26}$$

Здесь через W *обозначен вронскиан, определяемый равенством (7).*

Доказательство. Легко видеть, что система функций φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 линейно независима, следовательно, составляет фундаментальную систему решений однородного уравнения (6). Согласно теореме 2.2, имеем $p(0)W(0) \neq 0$.

Рассмотрим случай $\left|\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l)\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s) + \varphi_2(l)\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s))\right| < m$. Докажем, что функция (1) является решением задачи (3). Сначала покажем, что функция (1) принадлежит множеству E. Заметим, что интегралы в правой части равенства (1) существуют, так как функции $\Delta_i(s)$ непрерывны. Из представления функции (1) для всех точек $x \in S$ имеем

$$\Delta u(x) = \frac{1}{p(0)W(0)}\Big(\varphi_1(x+0)\int\limits_0^{x+0}\Delta_1(s)dF(s)+$$

$$+\varphi_2(x+0)\int\limits_0^{x+0}\Delta_2(s)dF(s)+\varphi_3(x+0)\int\limits_{x+0}^{l}\Delta_3(s)dF(s)+$$

$$+\varphi_4(x+0)\int\limits_{x+0}^{l}\Delta_4(s)dF(s)-\varphi_1(x-0)\int\limits_0^{x-0}\Delta_1(s)dF(s)-$$

$$-\varphi_2(x-0)\int\limits_0^{x-0}\Delta_2(s)dF(s)-\varphi_3(x-0)\int\limits_{x-0}^{l}\Delta_3(s)dF(s)-\varphi_4(x-0)\int\limits_{x-0}^{l}\Delta_4(s)dF(s)\Big)=$$

$$=\frac{\Delta F(x)}{p(0)W(0)}\Big(\varphi_1(x)\Delta_1(x)+\varphi_2(x)\Delta_2(x)-\varphi_3(x)\Delta_3(x)-\varphi_4(x)\Delta_4(x)\Big)=0,$$

поскольку

$$\varphi_1(x)\Delta_1(x)+\varphi_2(x)\Delta_2(x)-\varphi_3(x)\Delta_3(x)-\varphi_4(x)\Delta_4(x)= \tag{27}$$
$$=-\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x)\\ (p\varphi_1'')(x) & (p\varphi_2'')(x) & (p\varphi_3'')(x) & (p\varphi_4'')(x)\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, функция $u(x)$ может быть определена по непрерывности на весь отрезок $[0,l]$.

Покажем, что функция $u(x)$ абсолютно непрерывна. Для любых $\alpha,\beta\in\overline{[0,l]}_\sigma$ имеем

$$u(\beta)-u(\alpha)=\frac{1}{p(0)W(0)}\Big((\varphi_1(\beta)-\varphi_1(\alpha))\int_0^\beta\Delta_1(s)dF(s)+(\varphi_2(\beta)-\varphi_2(\alpha))\int_0^\beta\Delta_2(s)dF(s)+$$

$$+(\varphi_3(\beta)-\varphi_3(\alpha))\int_\beta^l\Delta_3(s)dF(s)+(\varphi_4(\beta)-\varphi_4(\alpha))\int_\beta^l\Delta_4(s)dF(s)+$$

$$+\int_\alpha^\beta(\varphi_1(\alpha)-\varphi_1(s))\Delta_1(s)dF(s)+\int_\alpha^\beta(\varphi_2(\alpha)-\varphi_2(s))\Delta_2(s)dF(s)+$$

$$\int_\alpha^\beta(\varphi_3(s)-\varphi_3(\alpha))\Delta_3(s)dF(s)+\int_\alpha^\beta(\varphi_4(s)-\varphi_4(\alpha))\Delta_4(s)dF(s)+$$

$$+\int_\alpha^\beta(\varphi_1(s)\Delta_1(s)+\varphi_2(s)\Delta_2(s)-\varphi_3(s)\Delta_3(s)-\varphi_4(s)\Delta_4(s))dF(s)\Big).$$

Согласно (27)

$$\int_\alpha^\beta(\varphi_1(s)\Delta_1(s)+\varphi_2(s)\Delta_2(s)-\varphi_3(s)\Delta_3(s)-\varphi_4(s)\Delta_4(s))dF(s)=0$$

и следовательно, функция $u(x)$ абсолютно непрерывна.

Покажем, что

$$u'(x)=\frac{1}{p(0)W(0)}\big((\varphi_1'(x)\int\limits_0^x\Delta_1(s)dF(s)+\varphi_2'(x)\int_0^x\Delta_2(s)dF(s)+ \tag{28}$$

$$+\varphi_3'(x)\int\limits_x^l\Delta_3(s)dF(s)+\varphi_4'(x)\int_x^l\Delta_4(s)dF(s)\big).$$

Обозначим $\Delta_\varepsilon z=z(x+\varepsilon)-z(x+0)$, где $\varepsilon>0$. Покажем справедливость утверждения для правых производных (для левых можно доказать аналогично). Имеем

$$\frac{\Delta_\varepsilon u}{\varepsilon}=\frac{1}{p(0)W(0)}\big(\frac{\Delta_\varepsilon\varphi_1}{\varepsilon}\int\limits_0^{x+\varepsilon}\Delta_1 dF+\frac{\Delta_\varepsilon\varphi_2}{\varepsilon}\int\limits_0^{x+\varepsilon}\varphi_2 dF+$$

$$+\frac{\Delta_\varepsilon\varphi_3}{\varepsilon}\int\limits_{x+\varepsilon}^{l}\Delta_3 dF+\frac{\Delta_\varepsilon\varphi_4}{\varepsilon}\int\limits_{x+\varepsilon}^{l}\Delta_4 dF+$$

$$+\int_{x+0}^{x+\varepsilon}\frac{\varphi_1(x)\Delta_1(s)+\varphi_2(x)\Delta_2(s)-\varphi_3(x)\Delta_3(s)-\varphi_4(x)\Delta_4(s)}{\varepsilon}dF\Big).$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{x+0}^{x+\varepsilon}\frac{\varphi_1(x)\Delta_1(s)+\varphi_2(x)\Delta_2(s)-\varphi_3(x)\Delta_3(s)-\varphi_4(x)\Delta_4(s)}{\varepsilon}dF=0. \tag{29}$$

Имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big|\int\limits_{x+0}^{x+\varepsilon}(\varphi_1(x)\Delta_1(s)+\varphi_2(x)\Delta_2(s)-\varphi_3(x)\Delta_3(s)-\varphi_4(x)\Delta_4(s))\,dF(s)\Big|\le$$

$$\le\frac{\sup\limits_{x+0\le s\le x+\varepsilon}|\varphi_1(x)\Delta_1(s)+\varphi_2(x)\Delta_2(s)-\varphi_3(x)\Delta_3(s)-\varphi_4(x)\Delta_4(s)|}{\varepsilon}V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F).$$

Пусть в точке τ непрерывная функция

$$|\varphi_1(x)\Delta_1(s)+\varphi_2(x)\Delta_2(s)-\varphi_3(x)\Delta_3(s)-\varphi_4(x)\Delta_4(s)|$$

достигает максимального значения на компакте $[x+0,x+\varepsilon]$. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{\max\limits_{x+0\le s\le x+\varepsilon}|\varphi_1(x)\Delta_1(s)+\varphi_2(x)\Delta_2(s)-\varphi_3(x)\Delta_3(s)-\varphi_4(x)\Delta_4(s)|}{\varepsilon}\le$$

$$\le|\Delta_1(\tau)|\left|\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(\tau)}{\varepsilon}\right|+|\Delta_2(\tau)|\left|\frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(\tau)}{\varepsilon}\right|+$$

$$+|\Delta_3(\tau)|\left|\frac{\varphi_3(x)-\varphi_3(\tau)}{\varepsilon}\right|+|\Delta_4(\tau)|\left|\frac{\varphi_4(x)-\varphi_4(\tau)}{\varepsilon}\right|+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\,|\Delta_1(\tau)\varphi_1(\tau)+\Delta_2(\tau)\varphi_2(\tau)-\Delta_3(\tau)\varphi_3(\tau)-\Delta_4(\tau)\varphi_4(\tau)|\,.$$

Так как

$$\frac{1}{\varepsilon}|\varphi_i(x)-\varphi_i(\tau)|\le\frac{1}{\varepsilon}|\int_x^\tau\varphi_i'(s)|ds\le\frac{1}{\varepsilon}|\int_x^{x+\varepsilon}\varphi_i'(s)|ds\le c_i,$$

где $(i=1,2,3,4)$, то используя (27) получим, что дробь

$$\frac{\max\limits_{x+0\le s\le x+\varepsilon}|\varphi_1(x)\Delta_1(s)+\varphi_2(x)\Delta_2(s)-\varphi_3(x)\Delta_3(s)-\varphi_4(x)\Delta_4(s)|}{\varepsilon}\quad\text{, где}\quad\varepsilon>0$$

ограничена. Поскольку $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i)\to 0$ при $\varepsilon\to 0^+$, получим равенство (29). Таким образом, доказано представление (28).

Аналогично можно доказать, что функции $u'(x)$ и $(pu'')(x)$ абсолютно непрерывны и

$$u''(x)=\frac{1}{p(0)W(0)}\Big((\varphi_1''(x)\int\limits_0^x\Delta_1(s)dF(s)+\varphi_2''(x)\int_0^x\Delta_2(s)dF(s)+$$

$$+\varphi_3''(x)\int\limits_x^l\Delta_3(s)dF(s)+\varphi_4''(x)\int_x^l\Delta_4(s)dF(s)\Big),$$

$$(pu'')'(x)=\frac{1}{p(0)W(0)}\Big(((p\varphi_1'')'(x)\int\limits_0^x\Delta_1(s)dF(s)+(p\varphi_2'')'(x)\int_0^x\Delta_2(s)dF(s)+$$

$$+(p\varphi_3'')'(x)\int\limits_x^l\Delta_3(s)dF(s)+(p\varphi_4'')'(x)\int_x^l\Delta_4(s)dF(s)\Big).$$

Покажем, что функция (1) — решение уравнения (4). Рассмотрим интеграл $\int_0^x udQ$. Имеем

$$\int_0^x udQ=\frac{1}{p(0)W(0)}\Big(\int_0^x\varphi_1(s)\int_0^s\Delta_1(t)dF(t)dQ(s)+\int_0^x\varphi_2(s)\int_0^s\Delta_2(t)dF(t)dQ(s)+$$

$$+\int_0^x \varphi_3(s)\int_s^l \Delta_3(t)dF(t)dQ(s)+\int_0^x \varphi_4(s)\int_s^l \Delta_4(t)dF(t)dQ(s)\Big).$$

Изменив пределы интегрирования, получим

$$\int_0^x \varphi_1(s)\int_0^s \Delta_1(t)dF(t)dQ(s)+\int_0^x \varphi_2(s)\int_0^s \Delta_2(t)dF(t)dQ(s)=$$

$$=\int_0^x \Delta_1(t)((-(p\varphi_1'')'(x)+(p\varphi_1'')'(t))dF(t)+\int_0^x \Delta_2(t)((-(p\varphi_2'')'(x)+(p\varphi_2'')'(t))dF(t).$$

$$\int_0^x \varphi_3(s)\int_s^l \Delta_3(t)dF(t)dQ(s)+\int_0^x \varphi_4(s)\int_s^l \Delta_4(t)dF(t)dQ(s)=$$

$$=\int_0^x \Delta_3(t)((-(p\varphi_3'')'(t)+(p\varphi_3'')'(0))dF(t)+\int_x^l \Delta_3(t)((-(p\varphi_3'')'(x)+(p\varphi_3'')'(0))dF(t)+$$

$$+\int_0^x \Delta_4(t)((-(p\varphi_4'')'(t)+(p\varphi_4'')'(0))dF(t)+\int_x^l \Delta_4(t)((-(p\varphi_4'')'(x)+(p\varphi_4'')'(0))dF(t).$$

Следовательно, имеем

$$(pu'')'(x)+\int_0^x udQ=$$

$$=\frac{1}{p(0)W(0)}\Big(\int_0^x (\Delta_1(t)(p\varphi_1'')'(t)+\Delta_2(t)(p\varphi_2'')'(t)-\Delta_3(t)(p\varphi_3'')'(t)-\Delta_4(t)(p\varphi_4'')'(t))dF(t)+$$

$$+(p\varphi_3'')'(0)\int_0^l \Delta_3(t)dF(t)+(p\varphi_4'')'(0)\int_0^l \Delta_4(t)dF(t)=$$

$$=\frac{1}{p(0)W(0)}\int_0^x p(t)W(t)dF(t)+(pu'')'(0).$$

Согласно теореме 2.3, $p(t)W(t)=p(0)W(0)$, и мы получаем

$$(pu'')'(x)+\int_0^x udQ=F(x)-F(0)+(pu'')'(0),$$

что и требовалось доказать. Легко проверить, что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям $u(0)=u''(0)=u''(l)=0$. Поскольку

$$|u(l)|=\Big|\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l)\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s)+\varphi_2(l)\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s))\Big|<m,$$

то $u(l)\in(-m,m)$, и

$$(pu'')'(l)=\frac{1}{p(0)W(0)}((p\varphi_1'')'(l)\int_0^l \Delta_1(s)dF(s)+(p\varphi_2'')'(l)\int_0^l \Delta_2(s)dF(s))=0,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай $\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l)\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s)+\varphi_2(l)\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s))\geq m$. Аналогично первому случаю можно доказать, что функция, определяемая равенством (2), является решением уравнения (4) и удовлетворяет условиям $u(0)=u''(0)=u''(l)=0$. Так как $u(l)=m$, то $u(l)\in C=[-m,m]$. Покажем, что $(pu'')'(l)\in N_C(u(l))$, т. е. $(pu'')'(l)\geq 0$.

Заметим, что $\varphi_4(l)<0$. Поскольку

$$(p\varphi_4'')'(x)+\int_0^x \varphi_4 dQ=(p\varphi_4'')'(0),$$

имеем

$$\int_0^l \varphi_4 d(p\varphi_4'')'+\int_0^l \varphi_4^2 dQ=0,$$

т. е.

$$\varphi_4(l)(p\varphi_4'')'(l)-\varphi_4(0)(p\varphi_4'')'(0)-\int_0^l (p\varphi_4'')'\varphi_4' dx+\int_0^l \varphi_4^2 dQ=0.$$

С учетом условий на $\varphi_4(x)$, получим

$$\varphi_4(l) = -\Big(\int_0^l \varphi_4^2 dQ + \int_0^l p\varphi_4''^2 dx\Big).$$

Если $\varphi_4(l) = 0$, то $\int_0^l \varphi_4^2 dQ + \int_0^l p\varphi_4''^2 dx = 0$, и $\varphi_4 \equiv 0$, что противоречит условию $(p\varphi_4'')'(l) = 1$. Следовательно, $\varphi_4(l) < 0$.

Тогда для $(pu'')'(l)$ имеем

$$(pu'')'(l) = \frac{1}{\varphi_4(l)}\Big(m - \frac{\varphi_1(l)}{p(0)W(0)}\int_0^l \Delta_1 dF - \frac{\varphi_2(l)}{p(0)W(0)}\int_0^l \Delta_2 dF\Big) \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Случай, когда $\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l)\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s) + \varphi_2(l)\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s)) \leq -m$ может быть рассмотрен аналогично. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть функция $u_0(x)$ является решением задачи (3). Тогда $u_0(x)$ минимизирует функционал энергии (8) при условиях $u(0) = 0$, $u(l) \in C$.*

Доказательство. Покажем, что для любой функции $u \in E$, удовлетворяющей условиям $u(0) = 0$, $u(l) \in C$, выполняется неравенство

$$\Phi(u) - \Phi(u_0) \geq 0.$$

Представим функцию $u(x)$ в виде $u(x) = u_0(x) + h(x)$, где $h(x) = u(x) - u_0(x)$. Заметим, что $h \in E$, $h(0) = 0$. Имеем

$$\Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) = -h(l)(pu_0'')'(l) + \int_0^l \frac{ph''^2}{2}dx + \int_0^l \frac{h^2}{2}dQ =$$

$$-(pu_0'')'(l)(u(l) - u_0(l)) + \int_0^l \frac{ph''^2}{2}dx + \int_0^l \frac{h^2}{2}dQ.$$

Поскольку $u(l) \in C$, $(pu_0'')'(l) \in N_C(u_0(l))$, имеем $-(pu_0'')'(l)(u(l) - u_0(l)) \geq 0$. С учетом условий на функции $p(x)$, $Q(x)$, получим $\Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) \geq 0$, что и требовалось. Теорема доказана.

Теорема 4.4. *Если $m \to 0$ то решение задачи (3) равномерно на $\overline{[0, l]}_\sigma$ стремится к решению задачи*

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int\limits_0^x u dQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(0) = 0, u''(0) = 0, \\ p(l)u''(l) = 0, \\ u(l) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Доказательство. Воспользуемся формулами из теоремы 4.2 для представления решения $u_m(x)$ задачи (3). Так как $m \to 0$, имеем $\left|\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l)\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s) + \varphi_2(l)\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s))\right| \geq m$. Тогда

$$\Big|u_m(x) - \frac{1}{p(0)W(0)}\Big(\varphi_1(x)\int\limits_0^x \Delta_1(s)dF(s) + \varphi_2(x)\int\limits_0^x \Delta_2(s)dF(s) +$$

$$+\varphi_3(x)\int\limits_x^l \Delta_3(s)dF(s) + \varphi_4(x)\int\limits_x^l \Delta_4(s)dF(s)\Big) + \frac{\varphi_4(x)\varphi_1(l)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)}\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s) +$$

$$+\frac{\varphi_2(l)\varphi_4(x)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)}\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s)\Big| = \left|\frac{m\varphi_4(x)}{\varphi_4(l)}\right| \leq cm \to 0.$$

Таким образом

$$u_m(x) \rightrightarrows u^*(x) =$$

$$= \frac{1}{p(0)W(0)}\Big(\varphi_1(x)\int\limits_0^x \Delta_1(s)dF(s) +$$

$$+\varphi_2(x)\int\limits_0^x \Delta_2(s)dF(s) + \varphi_3(x)\int\limits_x^l \Delta_3(s)dF(s) +$$

$$+\varphi_4(x)\int\limits_x^l \Delta_4(s)dF(s)\Big) - \frac{\varphi_4(x)\varphi_1(l)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)}\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s)-$$

$$-\frac{\varphi_2(l)\varphi_4(x)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)}\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s).$$

Аналогично теореме 4.2, можно показать, что функция $u^*(x)$ является решением задачи (30). Теорема доказана.

Теорема 4.5. *Если $m \to \infty$, то решение задачи (3) равномерно на $\overline{[0,l]}_\sigma$ стремится к решению задачи*

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int\limits_0^x udQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(0) = 0, u''(0) = 0, \\ u''(l) = 0, \\ (pu'')'(l) = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Доказательство. Воспользуемся формулами из теоремы 4.2 для представления решения $u_m(x)$ задачи (3). Так как $m \to \infty$, имеем $\left|\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l)\int\limits_0^l \Delta_1(s)dF(s) + \varphi_2(l)\int\limits_0^l \Delta_2(s)dF(s))\right| < m$, начиная с некоторых m. Обозначим через $u^*(x)$ функцию, определяемую равенством (1). Тогда, начиная с некоторого m, верно

$$|u_m(x) - u^*(x)| = 0.$$

В ходе доказательства теоремы 4.1 установлено, что функция $u^*(x)$ – решение задачи (31). Теорема доказана.

Список литературы

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит; 2004. 272 с.
2. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика.* 2013;1:232–250.
3. Шабров С.А., Ткаченко Д.А., Белов Н.А., Ильченко А.Г. Аналог теоремы Штурма для дифференциальных уравнений четвертого порядка с производными по мере. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика.* 2022; 2:107–114.
4. Шабров С.А., Бородина Е.А., Голованева Ф.В., Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика.* 2019;3:93–100.
5. Ben Amara J., Vladimirov A.A., Shkalikov A.A. Spectral and Oscillatory Properties of a Linear Pencil of Fourth-Order Differential Operators. *Mathematical Notes.* 2013;94(1):49–59.
6. Borovskikh A.V., Lazarev K.P. Fourth-order differential equations on geometric graphs. *Journal of Mathematical Sciences.* 2004;119(6):719–738.
7. Borovskikh A.V., Mustafokulov R., Lazarev K.P., Pokornyi Yu.V. A class of fourth-order differential equations on a spatial net. *Doklady Mathematics.* 1995;52(3):433–435.
8. Halmos P.R. Measure theory. Springer – Verlag; 1950. 304 p.
9. Kulaev R.Ch. On the oscillation property of Green's function of a fourth-order boundary value problem. *Mathematical Notes.* 2016;100(3-4):391–402.
10. Kulaev R.Ch., Urtaeva A.A. Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph. *Mathematical Notes.* 2022;111(5-6):977–981.
11. Kulaev R.Ch., Urtaeva A.A. On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph. *Differential Equations.* 2022;58(7):869–876.
12. Kunze M., Monteiro Marques M. An introduction to Moreau's sweeping process. *Lecture Notes in Physics.* 2000;551:1–60.
13. Rudin W. Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill; 1964. 342 p.
14. Shabrov S., Ilina O., Shaina E., Chechin D. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon-Nikodim derivatives. *Journal of Physics: Conference Series.* 2020;1479:1–12.
15. Vladimirov A.A., Shkalikov A.A. On oscillation properties of self-adjoint boundary value problems of fourth order. *Doklady Mathematics.* 2021;103(1):5–9.

References

1. Pokornyi YuV., Penkin OM., Pryadiev VL., Borovskikh AV., Lazarev KP., Shabrov SA. Differential equations on geometrical graphs. Moscow: Fizmatlit; 2004. 272 p. (in Russian)
2. Shabrov SA. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.* 2013;1:232 – 250. (in Russian)
3. Shabrov SA., Tkachenko DA., Belov NA., Ilchenko AG. Analogue of Sturm's theorem for fourth-order differential equations with measure derivatives. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.* 2022;2:107–114. (in Russian)
4. Shabrov SA., Borodina EA., Golovaneva FV., Davidova MB. On the number of solutions of the nonlinear boundary problem of the fourth order with derivatives by measure. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.* 2019;3:93–100. (in Russian)
5. Ben Amara J, Vladimirov AA., Shkalikov AA. Spectral and Oscillatory Properties of a Linear Pencil of Fourth-Order Differential Operators. *Mathematical Notes.* 2013;94(1):49–59.
6. Borovskikh AV., Lazarev KP. Fourth-order differential equations on geometric graphs.*Journal of Mathematical Sciences.* 2004;119(6):719–738.
7. Borovskikh AV., Mustafokulov R., Lazarev KP., Pokornyi YuV. A class of fourth-order differential equations on a spatial net. *Doklady Mathematics.* 1995;52(3):433–435.
8. Halmos PR. Measure theory. Springer – Verlag; 1950. 304 p.
9. Kulaev RCh. On the oscillation property of Green's function of a fourth-order boundary value problem. *Mathematical Notes.* 2016;100(3-4):391–402.
10. Kulaev RCh., Urtaeva AA. Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph. *Mathematical Notes.* 2022;111 (5-6):977–981.
11. Kulaev RCh., Urtaeva AA. On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph. *Differential Equations.* 2022;58(7):869–876.
12. Kunze M, Monteiro Marques M. An introduction to Moreau's sweeping process. *Lecture Notes in Physics.* 2000;551:1–60.
13. Rudin W. Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill; 1964. 342 p.
14. Shabrov S., Ilina O., Shaina E., Chechin D. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon-Nikodim derivatives. *Journal of Physics: Conference Series.* 2020;1479:1–12.
15. Vladimirov AA., Shkalikov AA. On oscillation properties of self-adjoint boundary value problems of fourth order. *Doklady Mathematics.* 2021;103(1):5–9.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 16.12.2023
Поступила после рецензирования 31.01.2024
Принята к публикации 04.02.2024

Received December 16, 2023
Revised January 31, 2024
Accepted February 4, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Зверева Маргарита Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Каменский Михаил Игоревич – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории нелинейного анализа и теории краевых задач, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

Шабров Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Margarita B. Zvereva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Mikhail I. Kamenskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher, Research Laboratory of Nonlinear Analysis and Theory of Boundary Value Problems, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Sergey A. Shabrov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia