Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 4. С. 346–353.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 4. P. 346–353.

УДК 517.9 DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-346-353
MSC 34A60
Оригинальное исследование

О методе случайных негладких интегральных направляющих функций в периодической задаче для случайных функционально-дифференциальных включений

Гетманова Е. Н.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)

Воронежский государственный педагогический университет,
Россия, 394043, Воронеж, ул.Ленина, 86
ekaterina_getmanova@bk.ru

Аннотация. В настоящей работе классический метод направляющих функций М.А. Красносельского и А.И. Перова распространяется на случай негладких интегральных направляющих функций для случайных функционально-дифференциальных включений. В работе рассматривается периодическая задача для случайного функционально-дифференциального включения, правая часть которого является u-мультиотображением, удовлетворяющим условиям типа подлинейного роста. Для решения поставленной задачи используется теория топологической степени совпадения пары отображений, состоящей из линейного фредгольмова оператора нулевого индекса и случайного многозначного отображения. В качестве примера рассматривается разрешимость периодичекой задачи для случайного градиентного функционально-дифференциального включения.

Ключевые слова: случайное мультиотображение, случайное функционально-дифференциальное включение, периодическая задача, случайное решение, случайная негладкая строгая интегральная направляющая функция, обобщенная производная Кларка, обобщенный градиент Кларка, случайный топологический индекс, случайная топологическая степень

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минпросвещения России в рамках государственного задания (QRPK-2023-0002)

Для цитирования: Гетманова Е. Н. 2023. О методе случайных негладких интегральных направляющих функций в периодической задаче для случайных функционально-дифференциальных включений. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 346–353. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-346-353

Original Research

On the Method of Random Nonsmooth Integral Guiding Functions in the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions

Ekaterina N. Getmanova
(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev*)

Voronezh State Pedagogical University,
86 Lenin st., Voronezh, 394043, Russia
ekaterina_getmanova@bk.ru

Abstract. In this work, the classical method of guiding functions due to M.A. Krasnoselskii and A.I. Perov is extended to the case of nonsmooth integral guiding functions for random functional-differential inclusions. The paper deals with a periodic problem for a random functional-differential inclusion, the right-hand side of which is a u-multimap satisfying conditions of sublinear growth. To solve this problem, we use the theory of the topological coincidence degree for a pair of mappings consisting of a linear Fredholm operator of zero index and a random multivalued mapping. As an example, we consider the solvability of a periodic problem for a random gradient functional differential inclusion.

Keywords: Random Multi-Reflection, Random Functional Differential Inclusion, Random u-Operator, Random Solution, Random Nonsmooth Strict Integral Guide Function, Generalized Clarke Derivative, Generalized Clarke Gradient, Random Topological Index, Random Topological Degree

Acknowledgements: The work was carried out with financial support from the Ministry of Education of Russia within the framework of state assignment (QRPK-2023-0002)

For citation: Getmanova E. N. 2023. On the Method of Random Nonsmooth Integral Guiding Functions in the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 346–353. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-346-353

1. Введение. Метод направляющих функций берет свое начало с доклада М. А. Красносельского и А. И. Перова в 1959 году. Разработанный метод представляет собой геометрический подход к решению задачи о существовании периодических решений дифференциальных уравнений (см., например, [1, 2, 3]).

Данный подход получил широкое развитие. Так, к примеру, этими же авторами была решена задача о существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений.

Еще одна модификация метода направляющих функций связана с именем А. Фонда, который к исследованию периодической задачи для функционально-дифференциальных уравнений применил интегральную направляющую функцию (см., например, [4]).

В 60-80 гг XX века началось бурное развитие теории многозначных отображений. В связи с этим метод направляющих функций был применен к нахождению периодических решений для уравнений с многозначной правой частью. Впервые подобные результаты были представлены в книге Ю. Г. Борисовича, Б. Д. Гельмана, А. Д. Мышкиса, В. В. Обуховского (см. [5]) и развиты затем в работах [6, 7, 8, 9, 10, 11].

Новое направление развития метода направляющих функций связано с использованием негладких направляющих потенциалов, обобщенный градиент которых является полунепрерывным сверху многозначным отображением с выпуклыми компактными образами (см., например, [12]).

В настоящей работе развивается метод негладких направляющих функций для исследования случайных функционально-дифференциальных включений.

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые сведения из теории линейных фредгольмовых операторов (см., например, [13]).

Пусть E_1, E_2 – баноховы пространства.

Определение 2.1. *Линейный оператор* $L : Dom\ L \subseteq E_1 \to E_2$ *называется линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса, если* $Ker\ L$ *и* $Coker\ L = E_2/Im\ L$ *конечномерны и* $\dim\ Ker\ L = \dim\ Coker\ L$.

Теорема 2.1. *Пусть* $L : Dom\ L \to E_2$ *– линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что* $Im\ L \subset E_2$ *– замкнутое множество. Тогда*

$i)$ *существуют линейные непрерывные операторы проектирования* $P : E_1 \to E_2, Q : E_2 \to E_2$ *такие, что* $Im\ P = Ker\ L$ *и* $Im\ L = Ker\ Q$;

$ii)$ *канонический оператор проектирования* $\Pi : E_2 \to E_2/Im\ L$*, заданный как* $\Pi(y) = y + Im\ L$*, является непрерывным линейным оператором;*

$iii)$ *существует непрерывный линейный изоморфизм* $\Lambda : Coker\ L \to Ker\ L$;

$vi)$ *уравнение* $L(x) = y, y \in E_2$ *является эквивалентным уравнению* $(i - P)x = (\Lambda \circ \Pi + K_{P,Q})(y)$*, где* i *– тождественный оператор в* E_1*, а оператор* $K_{P,Q} : E_2 \to E_1$ *задан соотношением* $K_{P,Q}(y) = K_P(y - Q(y))$.

Приведем необходимые сведения из теории многозначных отображений (см., например, [5]).

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) являются метрическими пространствами. Символами $P(Y), C(Y), K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых, компактных подмножеств пространства Y. Если Y – нормированное пространство, то символами $Kv(Y)$ обозначаются совокупности всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y.

Определение 2.2. *Мультиотображение* $F : X \to P(Y)$ *называется полунепрерывным сверху (пн.св.) в точке* $x \in X$*, если для любого открытого множества* $V \subset Y$ *такого, что* $F(x) \subset V$*, существует окрестность* $U(x)$ *точки* x *такая, что* $F(U(x)) \subset V$.

Определение 2.3. *Множество* $A \subset X$ *называется стягиваемым, если существует непрерывное отображение (гомотопия)* $h : A \times [0, 1] \to A$ *такое, что* $h(x, 0) = x, h(x, 1) = x_0$ *для всех* $x \in A$.

Определение 2.4. *Множество* $A \subset X$ *называется* R_δ*-множеством, если существует убывающая последовательность* $\{A_n\}$ *компактных стягиваемых множеств таких, что*

$$A = \bigcap \{A_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Определение 2.5. *Полунепрерывное сверху мультиотображение* $G : X \to K(Y)$ *называется* $\mathcal{J}$*-отображением или* $G \in \mathcal{J}(X, Y)$*, если для любого* $x \in X$ *множество* $G(x)$ *является* R_δ*-множеством.*

Определение 2.6. J^c*-мультиотображением называется конечная композиция полунепрерывных сверху мультиотображений с* R_δ*-значениями.*

Пусть (Ω, Σ) – измеримое пространство, X, Y – сепарабельные метрические пространства. Пусть $\mathbb{B}(X)$ – σ-алгебра всех борелевских подмножеств пространства X и $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ – наименьшая σ-алгебра, содержащая множества вида $A \times B$, где $A \in \Sigma, B \in \mathbb{B}(X)$

Определение 2.7. *Мультиотображение* $\Phi : \Omega \times X \to C(Y)$ *будем называть случайным, если оно измеримо относительно* σ*-алгебры* $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$.

Определение 2.8. *Случайное мультиотображение* $\Phi : \Omega \times X \to C(Y)$ *называется и-случайным мультиотображением, если для каждого* $\omega \in \Omega$ *мультиотображение* $\Phi(\omega, \cdot) : X \to C(Y)$ *пн. св.*

Пусть U – открытое ограниченное подмножество E_1.

Определение 2.9. *Мультиотображение* $F \in J^c(\overline{U}, E_2)$ *называется* L*-компактным, если композиция*

$$(\Lambda \circ \Pi + K_{P,Q}) \circ F : \overline{U} \to K(E_1)$$

является компактным мультиотображением.

Пусть Y – сепарабельное банахово пространство, $U \subset Y$ – открытое ограниченное подмножество и $\mathcal{F}\colon \Omega \times \overline{U} \to Kv(Y)$ – случайный компактный u-мультиоператор такой, что $x \notin \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $x \in \partial U$ и для всех $\omega \in \Omega$, где ∂U обозначает границу множества U. Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень соответствующего многозначного векторного поля $deg\big(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}\big)$ корректно определена (см., например, [5, 11]). Случайная топологическая степень многозначного векторного поля $i - \mathcal{F}$ на $\overline{U}$ определяется следующим образом (см. [10]):

$$D(i - \mathcal{F}, \overline{U}) := \Big\{deg\big(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}\big) \mid \omega \in \Omega\Big\}.$$

Полагаем, что случайная топологическая степень $D(i - \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, если топологическая степень $deg\big(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}\big) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определение 2.10. (см. [10]). *Если случайная топологическая степень $D(i - \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, то мультиоператор $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку в U, т. е. существует измеримая функция $\xi\colon \Omega \to U$ такая, что $\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Пусть X, Y – сепарабельные банаховы пространства, $U \subset Y$ – открытое ограниченное подмножество, $L :\ Dom\, L \subseteq X \to Y$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и случайный мультиоператор $\mathcal{F} : \Omega \times \overline{U} \to Kv(Y)$ удовлетворяет условиям:

$i)$ для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ является L-компактным мультиотображением;

$ii)$ для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ является J^c-мультиотображением;

$iii)$ для всех $x \in \partial U \cap\ Dom\, L$ и $\omega \in \Omega$ $Lx \notin \mathcal{F}(\omega, x)$.

Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень совпадения пары $(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot))$ определяется как (см., например, [14, 15])

$$\deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) := \deg(\Phi(\omega, \cdot), \overline{U}),$$

где

$$\Phi(\omega, x) = P(x) + (\phi \circ \Pi + K_{P,Q}) \circ \mathcal{F}(\omega, x).$$

Случайная топологическая степень сопадения пары $(L, \mathcal{F})$ определяется следующим образом (см., например, [16]):

$$Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) := \{\deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \mid \omega \in \Omega\}.$$

Говорят, что случайная топологическая степень сопадения $Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U})$ пары $(L, \mathcal{F})$ отлична от нуля, если топологическая степень совпадения $\deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определенная таким образом случайная топологическая степень совпадения обладает всеми основными свойствами степени совпадения. В частности, справедлив следующий общий принцип (см., например, [16]).

Теорема 2.2. *Если случайная топологическая степень совпадения $Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, то существует случайная точка совпадения пары $(L, \mathcal{F})$, т.е. измеримая функция $\xi : \Omega \to U$ такая, что $L\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.*

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение (см., например, [12, 16]).

Теорема 2.3 *Пусть случайное мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times \overline{U} \to K(E_2)$ является l-компактным J^c-мультиотображением при каждом $\omega \in \Omega$ и выполнены следующие условия:*

$i)$ $Lx \notin \lambda\mathcal{F}(\omega, x)$ для каждого $\omega \in \Omega$, для всех $0 < \lambda < 1$, $x \in\ Dom\, L \cap \partial U$;

$ii)$ $0 \notin \Pi\mathcal{F}(\omega, x)$ для каждого $\omega \in \Omega$, для всех $x \in\ Ker\, L \cap \partial U$;

$iii)$ $\deg_{Ker\ L}(\Lambda\Pi\mathcal{F}(\omega, \cdot)|_{\overline{U}_{Ker\ L}}, \overline{U}_{Ker\ L}) \neq 0$ для каждого $\omega \in \Omega$, где символ $\deg_{Ker\ L}$ обозначает топологическую степень J^c-мультиотображения $\Lambda\Pi\mathcal{F}(\omega, \cdot)$, вычисляемую в конечномерном пространстве $Ker\ L$, а $\overline{U}_{Ker\ L} = \overline{U} \cap Ker\ L$. Тогда случайная топологическая степень совпадения $Deg(L, \mathcal{F}, U) \neq 0$ и, следовательно, существует случайная точка совпадения пары $(L, \mathcal{F})$.

Приведем некоторые сведения из негладкого анализа (см., например, [17]).

Определение 2.11. *Пусть $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - локально липшицева функция. Для каждого $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$ обобщенная производная Кларка по направлению $V^0(y_0; v)$ функции V в точке y_0 по направлению v определяется как*

$$V^0(y_0; v) = \overline{\lim_{y \to y_0,\ t \to 0}} \frac{V(y + tv) - V(y)}{t}. \tag{1}$$

Тогда *обобщенный градиент Кларка $\partial V(x)$* функции V в точке x_0 определяется следующим образом:

$$\partial V(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \langle x, v\rangle \leq V^0(x_0; v) \quad \text{для всех}\ \ v \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Определение 2.12. *Локально липшицева функция* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется регулярной, если для каждого* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $v \in \mathbb{R}^n$ *существует производная по направлению* $V'(x, v)$ *и она совпадает с* $V^0(x, v)$.

Известно, что выпуклые функции являются регулярными.

Замечание 2.1. (см., например, [18]) *Пусть* $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– регулярная функция,* $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$*–абсолютно непрерывная функция. Тогда функция* $V(x(t))$ *также является абсолютно непрерывной и справедливо следующее равенство:*

$$V(x(t)) - V(x(a)) = \int_a^t V^0(x(s), x'(s))ds, \quad t \in [a, b].$$

Определение 2.13.*Отображение* $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется случайным негладким потенциалом, если выполняются следующие два условия:*
(i) *для любого* $\omega \in \Omega$ *функция* $V(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является регулярной;*
(ii) $V(\cdot, z) : \Omega \to \mathbb{R}$ *измеримо для каждого* $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2.14. *Случайный негладкий потенциал* $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется случайным негладким невырожденным потенциалом, если существует* $R_0 > 0$ *такое, что* $0 \notin \partial V(\omega, x)$ *для всех* $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : |x| \geq R_0$.

Из определения 2.14 следует, что для фиксированного $\omega \in \Omega$ топологическая степень $\deg\big(\partial V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R)\big)$ корректно определена для всех $R \geq R_0$ и совпадает с $\deg\big(\partial V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0)\big)$.

Под случайным топологическим индексом $Ind\, V$ случайного негладкого невырожденного потенциала V понимается случайная топологическая степень $Deg\, \big(\partial V, B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0)\big)$.

3. Основной результат. Для $\tau > 0$ обозначим символом C пространство $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in [-\tau, 0]} \|x(t)\|$ и пусть $I = [0, T]$, $T > 0$. Для функции $x(\cdot) \in C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$ и $t \in [0, T]$ символом $x_t \in C$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Будем рассматривать периодическую задачу для случайного функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}\big(\omega, t, x_t\big), \tag{2}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \tag{3}$$

для всех $\omega \in \Omega$, где мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R} \times C \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям:

$(\mathcal{F}_t)$ мультифункция $\mathcal{F}$ по второму аргументу T-периодична:

$$\mathcal{F}(\omega, t, \phi) = \mathcal{F}(\omega, t + T, \phi) \quad \text{для всех} \;\; \omega \in \Omega, \;\; \text{п.в.} \;\; t \in I, \phi \in C$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение $\mathcal{F}$ заданным на $\Omega \times I \times C$).

$(\mathcal{F}1)$ $\mathcal{F} : \Omega \times I \times C \to Kv(\mathbb{R}^n)$ является случайным u-мультиоператором;

$(\mathcal{F}2)$ существует отображение $c : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ такое, что $c(\omega, \cdot)$ – локально интегрируемо на $\mathbb{R}$ для каждого $\omega \in \Omega$, $c(\cdot, t)$ – измеримо п.в. $t \in I$, и

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, \phi)\| := \sup\{|z| : z \in \mathcal{F}(\omega, t, \phi)\} \leq c(\omega, t)(1 + |\phi|).$$

Под *случайным решением* задачи (2), (3) понимается функция $\xi : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ такая, что

(i) оператор $\omega \in \Omega \to \xi(\omega, \cdot) \in C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$ измерим;

(ii) для каждого $\omega \in \Omega$ абсолютно непрерывная функция $\xi(\omega, \cdot) \in C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (2), (3).

Из условий $(\mathcal{F}1)$, $(\mathcal{F}2)$ следует, что мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} : \Omega \times C([-\tau, T], \mathbb{R}^n) \multimap P(L^2(I, \mathbb{R}^n)),$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : f(s) \in \mathcal{F}(\omega, s, x_s)\} \quad \text{п.в. } s \in I$$

корректно определен. Кроме того, для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, \cdot)$ замкнут (см., например, [5]).

Для изучения задачи (2), (3) мы будем использовать теорию случайной топологической степени совпадения пары отображений, состоящей из линейного фредгольмова оператора и случайного мультиотображения, описанную выше.

Обозначим C_T пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$. Через $\|x\|_2$ обозначим норму функции x в пространстве L^2, $\|x\|_2 = \left(\int\limits_0^T \|x(s)\|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}$.

Определение 3.1. *Случайный негладкий потенциал $V\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения* (2), *если найдется $N > 0$ такое, что для всех $\omega \in \Omega$ и для всех $x \in C_T$ с $\|x\|_2 \geq N$ имеем*

$$\int_0^T \left\langle v(t), f(t)\right\rangle dt > 0$$

для всех $v \in \mathcal{P}_{\partial V}(\omega, x)$, где $\mathcal{P}_{\partial V}(\omega, x) = \left\{v \in L^2_T\colon v(t) \in \partial V(\omega, x(t))\right\}$, $f(t) \in \mathcal{F}(\omega, t, x_t)$ п.в. $t \in I$, символ $\partial V(\omega, x)$ обозначает обобщенный градиент Кларка функции V в точке x.

Справедливо следующее утверждение (см. [10]).

Лемма 3.1. *Если $V\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (2), то она является случайным негладким невырожденным потенциалом и, следовательно, существует ее случайный топологический индекс $Ind\ V$.*

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия $(\mathcal{F}_t), (\mathcal{F}1), (\mathcal{F}2)$. Если $V\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения* (2) *такой, что $Ind\ V \neq 0$, то задача* (2), (3) *имеет случайное решение.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.3. Рассмотрим следующие операторы:

$$L\ :\ \mathrm{Dom}\, L := \{x \in C_T\ :\ x - \text{абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T,$$

$$L(x) = x'$$

и мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\ :\ \Omega \times C_T \multimap P(L^1_T)$.

Заметим, что L – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, $Ker\ L = \mathbb{R}^n$. Канонический оператор проектирования $\Pi\ :\ L^1_T \to \mathbb{R}^n$ может быть задан формулой

$$\Pi f = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s)\, ds.$$

Мультиоператоры $\Pi \circ \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ и $K_{P,Q} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ компактны и пн.св (см., например, Proposition 1.17, [12]). Это означает, что пара $(L, \mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ – L-компактна и, следовательно, для нее может быть определена случайная топологическая степень совпадения, описанная выше.

Отметим, что для произвольного фиксированного $\omega \in \Omega$ решение $x_\omega \in \mathrm{dom}\, l$ включения $L(x) \in \lambda\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)$, $\lambda \in (0, 1)$, удовлетворяет задаче

$$x'_\omega(t) = \lambda f_\omega(t) \quad \text{п.в.}\ \ t \in [0, T], \tag{4}$$

$$x_\omega(0) = x_\omega(T), \tag{5}$$

где $f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)$.

Применяя замечание 2.1. и определение обобщенного градиента, получаем

$$\int_0^T \langle v(s), f_\omega(s)\rangle\, ds = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \langle v(s), x'_\omega(s)\rangle\, ds \leq$$
$$\leq \frac{1}{\lambda}\int_0^T V^0(x_\omega(s), x'_\omega(s))\, ds = \frac{1}{\lambda}(V(x_\omega(T)) - V(x_\omega(0))) = 0,$$

для каждого суммируемого сечения $v(s) \in \partial V(\omega, x(s))$. Следовательно,

$$\|x_\omega\|_2 < N.$$

С другой стороны, из условия $(\mathcal{F}_2)$ вытекает, что $\|x'_\omega\|_2 < M$, где $M > 0$. Но тогда найдется и $M' > 0$ такое, что

$$\|x_\omega\|_C < M'.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ с центром в 0 и радиуса $r = \max\{N, M', NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$

$$L(x) \notin \lambda\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)$$

для всех $x \in \partial U, \lambda \in (0, 1)$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap Ker\ L$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geq NT^{-1/2}$, из определения случайной негладкой строгой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle v(s), f_\omega(s)\rangle\, ds > 0$$

для каждого измеримого сечения $v(s) \in \partial V(\omega, u)$ и $f_\omega(s) \in \mathcal{F}_\omega(s, u)$, для всех $\omega \in \Omega$. Но для каждого $\omega \in \Omega$, полагая $v(s) \equiv v$, получаем

$$\int_0^T \langle v, f_\omega(s)\rangle\, ds = \langle v, \int_0^T f_\omega(s)\, ds\rangle = T\langle v, \pi f_\omega\rangle > 0,$$

для каждого $v \in \partial V(\omega, u)$ и, таким образом,

$$\langle v, y\rangle > 0$$

для любого $v \in \partial V(\omega, u), y \in \Pi\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, u),\ \omega \in \Omega$.

Это значит, что мультиполя $\partial V(\omega, u)$ и $\Pi\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, u)$ гомотопны на $\partial U \cap Ker\ L$ для любых $\omega \in \Omega$ и, следовательно,

$$\deg_{Ker\ L}(\Pi\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\big|_{\overline{U}_{Ker\ L}}, \overline{U}_{Ker\ L}) = \deg(\partial V, \overline{U}_{Ker\ L}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{Ker\ L} = \overline{U} \cap Ker\ L$.

Таким образом, все условия теоремы 2.3. выполнены, и задача (2), (3) имеет решение.

Пример.

Рассмотрим периодическую задачу вида

$$x'(\omega, t) \in \partial\mathcal{G}(\omega, x) + \mathcal{F}(\omega, t, x_t), \tag{6}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \tag{7}$$

где мультиотображение $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{F}_t)$, $(\mathcal{F}1)$, $(\mathcal{F}2)$, а $\partial\mathcal{G}$ – обобщенный градиент Кларка случайного негладкого потенциала $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия:*

1. *найдутся константы $\varepsilon > 0$, $K > 0$ и $\beta \geq 1$ такие, что*

$$\|\partial\mathcal{G}(\omega, x)\| \geq \varepsilon\|x\|^\beta - K,$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$;

2. $\overline{\lim\limits_{\|x\|_2 \to +\infty}} \dfrac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2^\beta} < \varepsilon T^{(1-\beta)/2}$ *для всех $\omega \in \Omega$, для любой абсолютно непрерывной функции $x(\omega, \cdot) \in C_T$;*

3. *обобщенный градиент Кларка $\partial\mathcal{G}$ для достаточно больших $N > 0$ имеет ненулевой случайный топологический индекс:*

$$Deg\ (\partial\mathcal{G}, \partial B_N) \neq 0.$$

Тогда задача (6), (7) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{G}$ является случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (6). Отметим, что вложение $L^{2\beta} \subset L^2$ дает для любой абсолютно непрерывной функции $x(\omega, \cdot) \in C_T$ оценку

$$\|\partial\mathcal{G}(\omega, x)\|_2 \geq \varepsilon\|x\|_{2\beta}^\beta - K\sqrt{T} \geq \varepsilon T^{(1-\beta)/2}\|x\|_2^\beta - K\sqrt{T}.$$

Зафиксируем произвольное $\omega \in \Omega$. Тогда для любых $f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)$, $g_\omega \in \partial\mathcal{G}(\omega, x)$ для достаточно больших значений $\|x\|_2$ имеем

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle g_\omega(s), g_\omega(s) + f_\omega(s)\rangle\, ds &\geq \|g_\omega\|_2\left(\|g_\omega\|_2 - \|f_\omega\|_2\right) \geq \\ &\geq \|\partial\mathcal{G}(g_\omega, x)\|_2\left(\|\partial\mathcal{G}(g_\omega, x)\|_2 - \|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2\right) \geq \\ &\geq \|\partial\mathcal{G}(g_\omega, x)\|_2\left(\varepsilon T^{(1-\beta)/2} - \frac{K\sqrt{T}}{\|x\|_2^\beta} - \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2^\beta}\right)\|x\|_2^\beta > 0.\end{aligned}$$

4. Заключение. В работе рассмотрена периодическая задача для случайного функционально-дифференциального включения. Введено понятие случайной негладкой строгой интегральной направляющей функции. Доказана теорема существования случайного решения для периодической задачи (2), (3), где мультиотображение $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{F}_t)$, $(\mathcal{F}1)$, $(\mathcal{F}2)$ и для включения (3) существует случайная негладкая строгая интегральная направляющая функция. В качестве примера реализации данной теории рассматривается разрешимость периодической задачи для случайного градиентного функционально-дифференциального включения.

Благодарность. *Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Обуховскому В. В. и доктору физико-математических наук, доценту Корневу С. В. за ценные советы и консультации по рассматриваемым в статье вопросам.*

Список литературы

1. Красносельский М.А., Перов А.И. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Доклады Академии наук. – Российская академия наук.* 1958;123(2):235–238.
2. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука; 1966. 332 с.
3. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука; 1975. 512 с.
4. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1987;99(1):79–85.
5. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М. Либроком; 2011. 224 с.
6. Корнев С.В., Обуховский В.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для выпуклозначных мультиотображений. *Труды математического факультета. Сер. "Новая серия".* Воронежский государственный университет; 2004;56–74.
7. Корнев С.В., Обуховский В.В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2009;5:23–32.
8. Корнев С.В. Многолистные направляющие функции в задаче о существовании периодических решений некоторых классов дифференциальных включений. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2016;11:14–26. 10.3103/S1066369X16110025
9. Корнев С.В., Обуховский В.В. Интегральные направляющие функции и периодические решения включений с каузальными операторами. *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки.* 2016;21(1):55–65. 10.20310/1810-0198-2016-21-1-55-65
10. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions. *Topol. Meth. Nonl. Anal.* 2012;40:337–358.
11. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer; 2006. 539 p. 10.1007/1-4020-4666-9
12. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N. V., Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Heidelberg: Springer, 2076; 2013. 10.1007/978-3-642-37070-0
13. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т., Ратинер Н.М. Линейные фредгольмовы операторы: учеб. пособие для студентов вузов. Воронеж. Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета; 2007. 81 с.
14. Pruszko T. A coincidence degree for L-compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields. *Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci math.* 1979;27(11-12):895–902.
15. Tarafdar E., Teo S.K. On the existence of solutions of the equation $\mathcal{L}x \in Nx$ and a coincidence degree theory. *J. Austral. Math. Soc.* 1979;28(2):139–173.
16. Tarafdar E., Watson P., Yuan X.-Z. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusions. *Comment.Math.Univ. Carolin.* 1996;725–748.
17. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука; 1988. 280 с.
18. Корнев С.В., Обуховский В.В., Дзекка П. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений. *Дифференциальные уравнения.* 2016;10(52):1335–1344. 10.1134/S037406411610006X

References

1. Krasnoselskii MA, Perov AI. On one principle of the existence of bounded, periodic and almost periodic solutions to a system of ordinary differential equations. *Reports of the Academy of Sciences. – Russian Academy of Sciences.* 1958;123(2):235–238. (in Russian)
2. Krasnoselskii MA. Shift operator along trajectories of differential equations. M.: Science; 1966. 332 p. (in Russian)
3. Krasnoselskii MA, Zabreiko PP. Geometric methods of nonlinear analysis. M.: Science; 1975. 512 p. (in Russian)

4. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1987;99(1):79–85.
5. Borisovich YuG, Gelman BD, Myshkis AD, Obukhovskii VV. Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions. M. Liebrock; 2011. 224 p. (in Russian)
6. Kornev SV, Obukhovskii VV. On some variants of the theory of topological degree for convex-valued multimaps. *Proceedings of the Faculty of Mathematics. Ser. "New episode"*. Voronezh State University; 2004;56–74. (in Russian)
7. Kornev SV, Obukhovskii VV. On the localization of the method of directing functions in the problem of periodic solutions of differential inclusions. *News of higher educational institutions. Mathematics.* 2009;5:23–32. (in Russian)
8. Kornev SV. Multivalent guiding functions in the problem of the existence of periodic solutions of certain classes of differential inclusions. *News of higher educational institutions. Mathematics.* 2016;11:14–26. (in Russian) 10.3103/S1066369X16110025
9. Kornev SV, Obukhovskii VV. Integral direction functions and periodic solutions of inclusions with causal operators. *Bulletin of Tambov University. Series: Natural and technical sciences.* 2016;21(1):55–65. (in Russian) 10.20310/1810-0198-2016-21-1-55-65
10. Andres J, Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions. *Topol. Meth. Nonl. Anal.* 2012;40:337–358.
11. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer; 2006. 539 p. 10.1007/1-4020-4666-9
12. Obukhovskii V, Zecca P, Loi NV, Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Heidelberg: Springer, 2076; 2013. 10.1007/978-3-642-37070-0
13. Zvyagin VG., Dmitrienko VT, Ratiner NM. Linear Fredholm operators: textbook. manual for university students. Voronezh. Publishing and Printing Center of Voronezh State University; 2007. 81 p. (in Russian)
14. Pruszko T. A coincidence degree for L-compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields. *Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci math.* 1979;27(11-12):895–902.
15. Tarafdar E, Teo SK. On the existence of solutions of the equation $\mathcal{L}x \in Nx$ and a coincidence degree theory. *J. Austral. Math. Soc.* 1979;28(2):139–173.
16. Tarafdar E, Watson P, Yuan X-Z. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusions. *Comment.Math.Univ. Carolin.* 1996;725–748.
17. Clark F. Optimization and non-smooth analysis. M.: Science; 1988. 280 p.
18. Kornev SV, Obukhovskii VV, Dzekka P. Method of generalized integral guiding function in the problem of the existence of periodic solutions of functional-differential inclusions. *Differential equations.* 2016;10(52):1335–1344. (in Russian) 10.1134/S037406411610006X

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.10.2023 Received October 10, 2023
Поступила после рецензирования 26.11.2023 Revised November 26, 2023
Принята к публикации 02.12.2023 Accepted December 2, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гетманова Екатерина Николаевна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Ekaterina N. Getmanova – Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia