Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 4. С. 299–304.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 4. P. 299–304.

УДК 517.956
MSC 35L10
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-299-304

О гиперболических уравнениях с произвольно направленными сдвигами потенциалов

Муравник А. Б.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Российский университет дружбы народов,
Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
amuravnik@mail.ru

Аннотация. Исследуется гиперболическое уравнение с произвольным количеством потенциалов, на которые действуют операторы сдвига в произвольных направлениях. Дифференциально-разностные уравнения возникают в различных приложениях, не покрываемых классической теорией дифференциальных уравнений. Кроме того, они представляют значительный интерес и с теоретической точки зрения, поскольку нелокальная природа таких уравнений порождает различные эффекты, не возникающие в классическом случае. Мы находим условие на вектор коэффициентов при нелокальных членах уравнения и на векторы сдвигов потенциалов, обеспечивающее глобальную разрешимость рассматриваемого уравнения. Накладывая указанное условие на уравнение и применяя классическую схему Гельфанда – Шилова, мы строим в явном виде трехпараметрическое семейство гладких глобальных решений изучаемого уравнения.

Ключевые слова: дифференциально-разностные операторы, гиперболические уравнения, нелокальные потенциалы, гладкие решения

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер проекта FSSF-2023-0016).

Для цитирования: Муравник А. Б. 2023. О гиперболических уравнениях с произвольно направленными сдвигами потенциалов. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 299–304. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-299-304

Original Research

On Hyperbolic Equations with Arbitrarily Directed Translations of Potentials

Andrey B. Muravnik
(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

RUDN University,
6 Miklouho-Maclay st., Moscow, 117198, Russia
amuravnik@mail.ru

Abstract. We investigate a hyperbolic equation with an arbitrary amount of potentials undergoing translations in arbitrary directions. Such differential-difference equations arise in various applications not covered by the classical theory of differential equations. On the other hand, they are quite interesting from the theoretical viewpoint because of specific effects caused by the nonlocal nature of the investigated equations. We find a condition for the vector of coefficients at nonlocal terms of the investigated equation and the translation vectors, guaranteeing the global solvability of the investigated equation. Under this condition, we explicitly construct a three-parametric family of smooth global solutions of the investigated equation; two of the specified parameters are real values, while the remaining one is a real-coordinate vector such that its dimension is equal to the amount of nonlocal terms (i. e., translated potentials) of the investigated equation. No commensurability requirements are imposed on the coefficients at nonlocal terms of the equation.

Keywords: Differential-difference Operators, Hyperbolic Equations, Nonlocal Potentials, Smooth Solutions

Acknowledgements: The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project number FSSF-2023-0016).

For citation: Muravnik A. B. 2023. On Hyperbolic Equations with Arbitrarily Directed Translations of Potentials. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 299–304. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-299-304

---

1. Введение. В настоящее время считается общепризнанным, что адекватные модели математической физики не исчерпываются только *дифференциальными* уравнениями – нужно также изучать уравнения, содержащие, кроме дифференциальных, и другие операторы (такие уравнения называются *функционально-дифференциальными*). Эти операторы, в отличие от дифференциальных, могут быть ограниченными, однако принципиальная новизна таких функционально-дифференциальных уравнений заключается в том, что они связывают значения неизвестной функции в разных точках. Эта *нелокальная* природа функционально-дифференциальных уравнений порождает качественно новые свойства их решений, предоставляет возможность использовать их в приложениях, не покрываемых классической теорией дифференциальных уравнений, и демонстрирует тесную взаимосвязь этой теории с теорией нелокальных задач, которая тоже очень важна для различных приложений (см., напр., [2, 2]).

Обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения изучаются как минимум с середины прошлого века (см. [5] и имеющуюся там библиографию). Теория функционально-дифференциальных уравнений в частных производных – относительно моложе: автору неизвестны работы на эту тему, предшествующие [4]. Следует отметить, что даже сам термин «эллиптический» в функционально-дифференциальном случае нуждается в тщательном прояснении, поскольку традиционная классификация дифференциальных уравнений в частных производных по типам не работает в *функционально-дифференциальном* случае. Таким образом, понятие эллиптических функционально-дифференциальных уравнений отнюдь не является тривиальным. С современным состоянием общей теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений можно ознакомиться в [5, 6] (см. также имеющуюся там библиографию).

В рамках настоящей статьи важность общей эллиптической теории заключается в следующем: как только мы можем корректно определить эллиптические функционально-дифференциальны операторы, мы можем считать, что любое уравнение вида $u_{tt} - Lu = f$ – гиперболическое, если L – эллиптический функционально-дифференциальный оператор. Настоящая работа посвящена важному классу функционально-дифференциальных уравнений – *дифференциально-разностным* уравнениям. Это уравнения, содержащие операторы сдвига (кроме дифференциальных). Важно отметить, что операторы сдвига являются мультипликаторами Фурье, поэтому естественно определять эллиптичность таких операторов, основываясь на знаках вещественных частей их символов.

Гиперболические дифференциально-разностные уравнения изучались и ранее (см., напр., [7] и имеющуюся там библиографию). В настоящей работе рассматриваются такие уравнения со сдвигами по пространственным переменным. Подобно случаю дифференциально-разностных уравнений других типов, естественно разбить указанный класс уравнений на два подкласса: уравнения с *суммами* дифференциальных операторов и операторов сдвига и уравнения с их *суперпозициями.* Настоящая работа посвящена первому из указанных подклассов. К настоящему времени наиболее общий результат в этом направлении получен в [7], где рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - au(x-h,t),$$

со скалярным параметром a и n-мерным параметром h.

Указанное уравнение содержит только одно нелокальное слагаемое. Мы распространим наше исследование на уравнения с произвольным количеством нелокальных членов, не накладывая никаких ограничений на углы между векторами сдвигов.

2. Гладкие решения. Пусть m и n – натуральные числа, $a_1, \dots, a_m$ – вещественные постоянные, $h_1, \dots, h_m$ – векторы из $\mathbb{R}^n$. В полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \sum_{k=1}^{m} a_k u(x-h_k,t). \tag{1}$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим функции $a(x) := \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \cdot x$ и $b(x) := \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \sin h_k \cdot x$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если неравенство*

$$|x|^2 + a(x) > 0 \tag{2}$$

выполняется в $\mathbb{R}^n$, *то функции*

$$F(x,t;\xi) = e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] \tag{3}$$

и

$$H(x,t;\xi) = e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right], \tag{4}$$

где

$$G_{\left\{\substack{1\\2}\right\}}(\xi) = \rho(\xi) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \varphi(\xi), \tag{5}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \arctan \frac{b(\xi)}{|\xi|^2 + a(\xi)}, \tag{6}$$

$$\rho(\xi) = \left(\left[|\xi|^2 + a(\xi)\right]^2 + b^2(\xi)\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{7}$$

удовлетворяют уравнению (1) *в классическом смысле при любом значении n-мерного параметра* ξ.
Доказательство. В силу условия (2), функция (6) определена корректно. Следовательно, корректно определены и функции (3)-(4).
Подставим функцию (3) в уравнение (1):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = G_1(\xi)e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] + G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right],$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = G_1^2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] + G_1(\xi)G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] +$$
$$+ G_1(\xi)G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] - G_2^2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] =$$
$$= \left[G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right]e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] + 2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right],$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} = -\xi_j^2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right],\ j=\overline{1,n},\ \text{т. е.}\ \ \Delta F = -|\xi|^2 e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right].$$

Далее,

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi)\sin^2\varphi(\xi) - \rho^2(\xi)\cos^2\varphi(\xi) = -\rho^2(\xi)\cos 2\varphi(\xi), 2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi)\sin 2\varphi(\xi).$$

Теперь отметим, что $-\frac{\pi}{4} < \varphi(\xi) < \frac{\pi}{4}$ на $\mathbb{R}^n$ по определению. Тогда $2\varphi(\xi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ на $\mathbb{R}^n$, а значит, функция $\cos 2\varphi(\xi)$ всюду положительна. Поэтому

$$\cos 2\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta(\xi)}} = \left(1 + \frac{b^2(\xi)}{[|\xi|^2 + a(\xi)]^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{[|\xi|^2 + a(\xi)]^2}{[|\xi|^2 + a(\xi)]^2 + b^2(\xi)}}.$$

Поскольку знаменатель последней дроби равен $\rho^4(\xi)$ и положительность функции $|\xi|^2 + a(\xi)$ обеспечена условием (2), справедливо равенство $\cos 2\theta(\xi) = \dfrac{|\xi|^2 + a(\xi)}{\rho^2(\xi)}$.
Далее,

$$\sin 2\theta(\xi) = \tan 2\theta(\xi)\cos 2\theta(\xi) = \frac{b(\xi)}{|\xi|^2 + a(\xi)}\,\frac{|\xi|^2 + a(\xi)}{\rho^2(\xi)} = \frac{b(\xi)}{\rho^2(\xi)}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \Delta F = -\rho^2(\xi)\cos 2\varphi(\xi)e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] +$$
$$+\rho^2(\xi)\sin 2\varphi(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] + |\xi|^2 e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] =$$
$$= -\left[|\xi|^2 + a(\xi)\right]e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] + b(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] +$$
$$+|\xi|^2 e^{tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] =$$
$$= e^{tG_1(\xi)}\left(b(\xi)\cos\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] - a(\xi)\sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right]\right) =$$
$$= e^{tG_1(\xi)}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k\cdot\xi \cos\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right] - \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k\cdot\xi \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right]\right) =$$
$$= -e^{tG_1(\xi)}\sum_{k=1}^{m} a_k\left(\sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right]\cos h_k\cdot\xi - \cos\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right]\sin h_k\cdot\xi\right) =$$
$$= -e^{tG_1(\xi)}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + (x-h_k)\cdot\xi\right] = -\sum_{k=1}^{m} a_k F(x-h_k, t),$$

т. е. функция (3) в полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1) для каждого ξ из $\mathbb{R}^n$.

Теперь подставим функцию (4) в уравнение (1):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -G_1(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right] + G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right],$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = G_1^2(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] - G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] -$$
$$-G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] - G_2^2(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] =$$
$$= \left[G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right]e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] -$$
$$-2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] =$$
$$= -\rho^2(\xi)\cos 2\varphi(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] -$$
$$-\rho^2(\xi)\sin 2\varphi(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] =$$
$$= -\left[|\xi|^2 + a(\xi)\right] e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] - b(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right]$$

и

$$\Delta H = -\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] = -|\xi|^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right].$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \Delta H = -a(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] - b(\xi)e^{-tG_1(\xi)} \cos\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] =$$
$$= -e^{-tG_1(\xi)} \sum_{k=1}^{m} a_k \left(\sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] \cos h_k \cdot \xi + \cos\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right] \sin h_k \cdot \xi \right) =$$
$$= -e^{-tG_1(\xi)} \sum_{k=1}^{m} a_k \sin\left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - (x - h_k) \cdot \xi\right] = -\sum_{k=1}^{m} a_k H(x - h_k, t),$$

т. е. функция (4) удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1) для любого ξ из $\mathbb{R}^n$.

3. Условия разрешимости. Очевидно, что дифференциально-разностный оператор из правой части уравнения (1) является мультипликатором Фурье, а условие (2) означает строгую отрицательность вещественной части его символа. В настоящем разделе мы найдем условие, обеспечивающее указанную отрицательность.

Введем постоянные величины $a_0 := \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ и $h_0 := \max\limits_{k \in \overline{1,m}} |h_k|$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если a_k неотрицательно для любого $k \in \overline{1,m}$ и*

$$a_0 h_0^2 < \frac{\pi^2}{4}, \tag{8}$$

то условие (2) *выполнено для любого x из $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если рассматриваемое уравнение дифференциально-разностное, то a_0 и h_0 строго положительны. Действительно, если $a_0 = 0$, то $a_k = 0$ для любого $k \in \overline{1,m}$ и, следовательно, уравнение (1) есть уравнение д'Алламбера. Если $h_0 = 0$, то любой h_k, $k = \overline{1,m}$, есть нулевой вектор и, следовательно, уравнение (1) есть *дифференциальное* уравнение $u_{tt} = \Delta u - a_0 u$.

Теперь исследуем зависимость знака функции $|x|^2 + a(x)$ от соотношений между векторами сдвигов $h_1, \dots, h_m$ из $\mathbb{R}^n$ и вектором $(a_1, \dots, a_m)$ коэффициентов. Возьмем произвольное натуральное число k от 1 до m.

Если $|h_k \cdot x| < \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos h_k \cdot x > 0$ и, следовательно, $x_k^2 + a_k \cos h_k \cdot x > 0$.

Если $|h_k \cdot x| \geq \dfrac{\pi}{2}$, то $|h_k||x||\cos(\widehat{h_k, x})| \geq \dfrac{\pi}{2}$, что значит, что $|h_k||x| \geq \dfrac{\pi}{2}$, т. е. $|x| \geq \dfrac{\pi}{2|h_k|}$ и, следовательно,

$$|x|^2 + a(x) \geq \frac{\pi^2}{4|h_k|^2} + \sum_{l=1}^{m} a_l \cos h_l \cdot x.$$

Правая часть последнего неравенства положительна в силу условия (8). Значит, функция $|x|^2 + a(x)$ везде положительна. Поскольку значение k выбрано произвольно, лемма доказана.

Объединяя леммы 1-2, следующее основное утверждение работы.

Теорема 1. *Если все коэффициенты $a_1, \dots, a_m$ уравнения* (1) *неотрицательны, а условие* (8) *выполняется, то каждая функция*

$$\alpha F(x, t; \gamma) + \beta H(x, t; \gamma), \tag{9}$$

где функции F и H определены соотношениями (3) *и* (4)*, соответственно, α и β принадлежат* $(-\infty, \infty)$*, а $\gamma \in \mathbb{R}^n$ является бесконечно гладким решением уравнения* (1).

4. Эвристические соображения. Как показано выше, доказательство теоремы 1 – прямое: мы непосредственно подставляем функцию (9) в уравнение (1). Это доказательство – строгое и понятное, но оно не объясняет каким образом было найдено решение. В настоящем разделе мы покажем, как хорошо известная операционная схема Гельфанда – Шилова (см., напр., [8, п. 10]) применяется в рассматриваемом случае.

Формально применяя преобразование Фурье по (n-мерной) переменной x к *дифференциально-разностному уравнению в частных производных* (1), мы получаем следующее *обыкновенное дифференциальное уравнение*, зависящее от n-мерного параметра ξ:

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} + \left(|\xi|^2 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \cdot \xi + i \sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k \cdot \xi\right) \widehat{u} = 0. \tag{10}$$

Его общее решение равно (с точностью до произвольных постоянных, зависящих от параметра ξ)

$$\frac{1}{\rho(\xi)} \left(e^{-t\,G_1(\xi)} e^{i[t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi)]} - e^{t\,G_1(\xi)} e^{-i[t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi)]}\right),$$

где функции $G_1(\xi)$, $G_2(\xi)$, $\varphi(\xi)$, $\rho(\xi)$ определены соотношениями (5)–(7).
Остается формально применить обратное преобразование Фурье, отбросить слагаемые с нечетными подынтегральными функциями и выбрать произвольные постоянные, зависящие от параметра ξ, таким образом, чтобы все мнимые слагаемые оказались равными нулю. Все эти шаги схемы Гельфанда – Шилова не могут быть выполнены, поскольку сходимость возникающего несобственного интеграла по ξ не гарантирована. Однако если оборвать процедуру Гельфанда – Шилова перед интегрированием по двойственной переменной ξ и рассматривать указанную переменную как параметр, то полученная функция, выраженная формулой (9), удовлетворяет уравнению (1). Чтобы убедиться в этом, мы подставляем ее в уравнение (1) в п. 2 (см. выше).

5. Заключение. В настоящей работе мы продолжаем исследование гиперболических дифференциально-разностных гиперболических уравнений с нелокальными потенциалами, распространяя наше рассмотрение на наиболее общий случай уравнения: количество нелокальных членов уравнения произвольно, на коэффициенты при нелокальных членах не накладывается никак условий соизмеримости, а направления сдвигов потенциалов (и, соответственно, углы между этими направлениями) произвольны. Мы находим достаточное условие (в терминах символа дифференциально-разностного оператора рассматриваемого уравнения), обеспечивающее глобальную разрешимость исследуемого уравнения. При выполнении этого условия мы строим в явном виде трехпараметрическое семейство точных глобальных бесконечно гладких решений указанного уравнения; два из этих независимых параметров вещественны, а третий – вектор с вещественными координатами, размерность которого равна количеству нелокальных членов уравнения.

Благодарность. *Автор выражает глубокую благодарность А. Л. Скубачевскому за ценные советы и постоянное внимание к работе.*

Список литературы

1. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I. *Современная математика. Фундаментальные направления.* 2007;26:3–132.
2. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. II. *Современная математика. Фундаментальные направления.* 2009;33:3–179.
3. Мышкис А.Д. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения. *Современная математика. Фундаментальные направления.* 2005;4:5–120.
4. Hartman P., Stampacchia G. On some non-linear elliptic differential functional equations. *Acta Math.* 1966;115:271–310.
5. Skubachevskiĭ A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin; 1997. 293 p.
6. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения. *Успехи математических наук.* 2016;71(5):3–112.
7. Зайцева Н.В., Муравник А.Б. Гладкие решения гиперболических уравнений со сдвигом на произвольный вектор в свободном члене. *Дифференциальные уравнения.* 2023;59(3):368–373.
8. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. *Успехи математических наук.* 1953;8(6):3–54.

References

1. Skubachevskiĭ AL. Nonclassical boundary-value problems. I. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 2008;155:199–334.
2. Skubachevskiĭ AL. Nonclassical boundary-value problems. II. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 2010;166:377–561.
3. Myshkis AD. Mixed functional differential equations. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 2005;129:4111–4226.
4. Hartman P., Stampacchia G. On some non-linear elliptic differential functional equations. *Acta Math.* 1966;115:271–310.
5. Skubachevskiĭ AL. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin; 1997. 293 p.
6. Skubachevskiĭ AL. Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications. *Russian Math. Surveys.* 2016;71(5):801–906.
7. Zaitseva NV., Muravnik AB. Smooth solutions of hyperbolic equations with translation by an arbitrary vector in the free term. *Differ. Equ.*. 2023;59(3):371–376.
8. Gel'fand IM., Shilov GE. Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy problem. *Uspekhi Matem. Nauk.* 1953;8(6):3–54 (in Russian).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.08.2023
Поступила после рецензирования 26.09.2023
Принята к публикации 30.09.2023

Received August 12, 2023
Revised September 26, 2023
Accepted September 30, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Муравник Андрей Борисович – доктор физико-математических наук, директор Математического института, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Andrey B. Muravnik – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of Mathematical Institute, RUDN University, Moscow, Russia