Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 1. С. 27–34.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 1. P. 27–34.

УДК 517.95 DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-27-34
MSC 35A25, 35C05
Оригинальное исследование

Приложения операторов преобразования типа Векуа – Эрдейи – Лаундеса к дифференциальным уравнениям

Шишкина Э. Л.[1], **Алзамили Хитам**[2], **Кудоси Абдул Мохаммад**[2] **Ситник С. М.**[2]

[1]Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1

[2]Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
ilina_dico@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается один из классов операторов преобразования. Операторы преобразования – это известный раздел теории дифференциальных уравнений, в его рамках были получены заметные результаты для этой теории. В данной работе рассматривается круг задач для операторов преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса. Эти операторы преобразования, которые были введены в работах указанных математиков, позволяют сплетать дифференциальные операторы различной природы со спектральным параметром с аналогичными дифференциальными операторами без спектральных параметров. В частности, на этом пути устанавливаются и явные формулы соответствия между решениями этих двух классов дифференциальных уравнений. Для иллюстрации метода он применяется к некоторым конкретным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: операторы преобразования, операторы Векуа – Эрдейи – Лаундеса, композиционный метод, телеграфное уравнение, функции Бесселя

Для цитирования: Шишкина Э. Л., Алзамили Хитам, Кудоси Абдул Мохаммад, Ситник С. М. 2024. Приложения операторов преобразования типа Векуа – Эрдейи – Лаундеса к дифференциальным уравнениям. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 27–34.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-27-34

Original Research

Applications of Transmutations of Vekua – Erdélyi - Lowndes Type to Differential Equations

Ilina L. Shishkina[1], **Alzamili Khitam**[2], **Qudosi Abdul Mohammad**[2] **Sergei M. Sitnik**[2]

[1]Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018, Russia

[2]Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia
ilina_dico@mail.ru

Abstract. In the paper we study an important class of transmutations. Transmutation theory is a well-known field of differential equations, by its methods many remarkable results on differential equations were received. We consider an important class of transmutations - Vekua-Erdelyi-Lowndes operators. These transmutations, which were introduced and studied by above mentioned mathematicians, transmute differential operators of different nature with a spectral parameter to similar operators without a spectral parameter. In particular, by this method explicit connection formulas are obtained for solutions of perturbed and unperturbed differential equations. To illustrate our results some special differential equations are considered.

Keywords: Transmutations, Vekua – Erdélyi – Lowndes Transmutations, Composition Method, Telegraph Equation, Bessel Functions

For citation: Shishkina I. L., Alzamili Hitam, Qudosi Abdul Mohammad, Sitnik S. M. 2024. Applications of Transmutations of Vekua – Erdélyi – Lowndes Type to Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 27–34. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-27-34

---

1. Введение. В этой статье мы развиваем математический метод, состоящий в сведении более сложных задач к более простым и уже решённым. Для этого используется метод *операторов преобразования*, см. [1, 2, 3, 4]. Этот метод впервые возник в работах Дельсарта и Лионса и затем был развит в работах математиков русской школы В. А. Марченко, Б. М. Левитана и других, достаточно подробный исторический обзор см. в [2].

Кратко напомним основные положения теории операторов преобразования. Пусть дана пара операторов (A, B). Говорят, что ненулевой *оператор преобразования* T преобразует (сплетает) операторы (A, B), если выполняется на подходящих функциях следующее соотношение

$$T\,A = B\,T. \tag{1}$$

В конкретных ситуациях оператор преобразования T часто является интегральным с некоторым ядром, и во многих задачах он может быть найден в явном виде. Важным моментом также является выбор подходящего пространства функций, для которого выполняется равенство (1).

В данной статье мы рассматриваем специальный класс операторов преобразования, который сплетает операторы $A+\lambda_1$ и $A+\lambda_2$, где A является оператором, действующим в паре пространств S_1, S_2, постоянные $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Кратко, мы рассматриваем операторы преобразования, которые переводят некоторый дифференциальный оператор со спектральным параметром в тот же оператор, но без спектрального параметра. Такие операторы впервые вводились в разных ситуациях в работах А. Эрдейи [5, 6, 7, 8], И. Н. Векуа [9] и Дж. С. Лаундеса [10, 11, 12]. Поэтому в работе [13] этот класс было предложено называть: *операторы преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса*, или сокращённо операторы ВЭЛ. Эти операторы подробнее рассматривались в [4, 14].

В этой работе с использованием операторов преобразования ВЭЛ устанавливаются формулы связи между решениями задачи Коши для уравнений вида $w_{tt} = Aw$ и решений подобных уравнений со спектральным параметром $w_{tt} \pm c^2 w = Aw$, где $w = w(x,t)$, $c \in \mathbb{R}$, A есть линейный оператор, действующий по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Этот класс задач включает, например, телеграфное уравнение, уравнение Гельмгольца, уравнение Буссинеска и ряд других.

Отметим, что в [2] подробно изложена теория операторов преобразования для дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами, включая операторы Бесселя. Также в [15] изучены композиции операторов преобразования типа ВЭЛ для дифференциальных операторов высоких порядков, в частности, для итерированных операторов Бесселя. Оператор преобразования, ассоциированный с группой S_3, который отображает обычный Лапласиан в инвариантный дифференциальный оператор второго порядка на Римановом симметричном пространстве, был построен в [16].

2. Операторы преобразования в форме интегральных операторов Вольтерра второго рода.

В этом разделе мы построим операторы преобразования $S_c^{\pm}$ со сплетающим свойством

$$S_c^{\pm} D^2 = \left(D^2 \pm c^2\right) S_c^{\pm}.$$

Теорема 2.1. Пусть $f \in C^2$. Тогда существует оператор преобразования, удовлетворяющий тождеству

$$S_c^{\pm} D^2 f = \left(D^2 \pm c^2\right) S_c^{\pm} f, \tag{2}$$

где $D = \frac{d}{dt}$, и имеющий форму интегрального оператора Вольтерра второго рода

$$(S_c^{\pm} f)(t) = f(t) + \int\limits_{-t}^{t} K^{\pm}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

с ядром

$$K^{\pm}(t,\tau) = \frac{c\sqrt{t+\tau}}{2\sqrt{t-\tau}} \begin{cases} -J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right); \\ I_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right). \end{cases}$$

При этом ядро $K^{\pm}(t,\tau)$ является гладким по обеим переменным.

Доказательство. Подстановка в формулу (2) приводит к соотношению

$$\int\limits_{-t}^{t} K^{\pm}(t,\tau) f''(\tau)\, dt = \frac{d^2}{dt^2} \int\limits_{-t}^{t} K^{\pm}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \pm c^2 \left(f(t) + \int\limits_{-t}^{t} K^{\pm}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \right).$$

Так как

$$\int\limits_{-t}^{t} K^{\pm}(t,\tau) f''(\tau)\, d\tau = K^{\pm}(t,t) f'(t) - K^{\pm}(t,-t) f'(-t) - K_{\tau}^{\pm}(t,\tau)\mid_{\tau=t} f(t) +$$

$$+ K_{\tau}^{\pm}(t,\tau)\mid_{\tau=-t} f(-t) + \int\limits_{-t}^{t} K_{\tau\tau}^{\pm}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau$$

и

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{-t}^{t} K^{\pm}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{-t}^{t} K^{\pm}_{tt}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau + K^{\pm}_{t}(t,\tau)\mid_{\tau=t} f(t) - K^{\pm}_{t}(t,\tau)\mid_{\tau=-t} f(-t)+$$

$$+\frac{K^{\pm}(t,t)}{dt}f(t) + K^{\pm}(t,t)f'(t) - \frac{K^{\pm}(t,-t)}{dt}f(-t) - K^{\pm}(t,-t)f'(-t),$$

то получаем

$$K^{\pm}_{\tau\tau}(t,\tau) = K^{\pm}_{tt}(t,\tau) \pm c^2K^{\pm}(t,\tau), \tag{4}$$

$$\frac{dK^{\pm}(t,t)}{dt} + \lim_{\tau\to t}\left(K^{\pm}_{t}(t,\tau) + K^{\pm}_{\tau}(t,\tau)\right) = \mp c^2, \tag{5}$$

$$\frac{dK^{\pm}(t,-t)}{dt} + \lim_{\tau\to -t}\left(K^{\pm}_{t}(t,\tau) + K^{\pm}_{\tau}(t,\tau)\right) = 0. \tag{6}$$

Пусть $K^{\pm}(t,\tau)\in C^1(\Omega)$, $\overline{\Omega}\cap\{(t,\tau)\mid t=\tau\}\neq\emptyset$. Тогда для $(t,x)\in\Omega$ выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}K^{\pm}(t,t) = \lim_{\tau\to t}\left(\frac{\partial K^{\pm}(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial K^{\pm}(t,\tau)}{\partial \tau}\right).$$

Таким образом условия (5) и (6) принимают вид

$$\frac{dK^{\pm}(t,t)}{dt} = \mp\frac{c^2}{2} \tag{7}$$

и

$$K^{\pm}(t,-t) = const. \tag{8}$$

Введём новые переменные

$$u = \frac{t+\tau}{2}, \quad v = \frac{t-\tau}{2}. \tag{9}$$

Используя обозначения $H^{\pm}(u,v) = K^{\pm}(u+v,u-v) = K^{\pm}(t,\tau)$ получаем задачу

$$H^{\pm}_{u,v}(u,v) = \mp c^2H^{\pm}(u,v), \tag{10}$$

$$H^{\pm}(u,0) = \mp\frac{c^2}{2}u. \tag{11}$$

Для получения ядер, удовлетворяющих (10)–(11), используем формулу

$$H^{\pm}(u,v) = \mp\frac{c^2}{2}u \mp c^2\int\limits_0^u d\alpha\int\limits_0^v H^{\pm}(\alpha,\beta)\,d\beta. \tag{12}$$

Итерации определяются по формулам

$$H^{\pm}_0(u,v) = \mp\frac{c^2}{2}u,$$

$$H^{\pm}_{n+1}(u,v) = \mp c^2\int\limits_0^u d\alpha\int\limits_0^v H^{\pm}_n(\alpha,\beta)\,d\beta.$$

Из первых итераций получаем

$$H^{\pm}_1(u,v) = \frac{1}{2}\left(\mp c^2\right)^2\frac{u^2}{2!}v,$$

$$H^{\pm}_2(u,v) = \frac{1}{2}\left(\mp c^2\right)^3\frac{u^3}{3!}\frac{v^2}{2!}$$

и

$$H^{\pm}_n(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\left(\mp c^2\right)^{n+1}}{n!(n+1)!}u^{n+1}v^n.$$

Теперь используем формулы для функций Бесселя первого рода и модифицированных функций Бесселя первого рода для $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (see [17]):

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+m} n!(m+n)!} x^{2n+m}, \qquad I_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+m} n!(m+n)!} x^{2n+m}$$

Суммируя ряд Неймана, получаем

$$H^{\pm}(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\mp c^2\right)^{n+1}}{n!(n+1)!} u^{n+1} v^n = \frac{c\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \begin{cases} -J_1(2c\sqrt{uv}); \\ I_1(2c\sqrt{uv}). \end{cases}$$

Используя асимптотические формулы для $0 < x \ll \sqrt{\alpha+1}$ вида

$$J_\alpha(x) \to \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha}$$

и соотношение $I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix)$, получаем, что соотношение (11) является верным.

Возвращаясь к переменным x и t, получаем

$$K^{\pm}(t,\tau) = \frac{c\sqrt{t+\tau}}{2\sqrt{t-\tau}} \begin{cases} -J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right); \\ I_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $K^{\pm}(t,-t) = 0$ и условие (8) выполнено. Теорема 2.1. полностью доказана.

3. Приложения операторов преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса к задачам Коши.

В этом разделе мы получим результаты, основанные на основной идее операторов преобразования: получить явное решение более сложной задачи из более простой.

Теорема 3.1. Пусть A – линейный оператор, действующий по переменным $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, а w есть решение задачи

$$w_{tt} = Aw, \qquad w = w(x,t), \tag{13}$$

$$w(x,0) = f(x), \qquad w_t(x,0) = g(x). \tag{14}$$

Тогда функция

$$w^c = S_+ w,$$

где

$$(S_+)_t w(x,t) = w(x,t) - \frac{c}{2} \int_{-t}^{t} \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right) w(x,\tau)\, d\tau$$

есть решение другой задачи

$$w^c_{tt} + c^2 w^c = Aw^c, \qquad w^c = w^c(x,t), \tag{15}$$

$$w^c(x,0) = f(x), \qquad w^c_t(x,0) = g(x). \tag{16}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что $w^c(x,0) = w(x,0)$, поэтому если w удовлетворяет первому условию в (14), тогда w^c удовлетворяет первому условию в (16) и наоборот.

Рассмотрим

$$w^c_t(x,t) = w_t(x,t) - \frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial t} \int_{-t}^{t} \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right) w(x,\tau)\, d\tau = w_t(x,t) - \frac{c}{2}\times$$

$$\times\left(\lim_{\tau\to t}\left(\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right) w(x,\tau)\right) - \lim_{\tau\to -t}\left(\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right) w(x,\tau)\right) + \right.$$

$$\left. + \int_{-t}^{t} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right) w(x,\tau)\, d\tau\right) =$$

$$= w_t(x,t) - \frac{c^2}{2}\left(t w(x,t) + \int_{-t}^{t}\left(\frac{tJ_0(c\sqrt{t^2-\tau^2})}{t-\tau} - \frac{\sqrt{t+\tau}}{c(t-\tau)^{3/2}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2})\right) w(x,\tau)\, d\tau\right).$$

Таким образом , устремляя к пределу $t \to 0$, получаем $w^c_t(x,0) = w_t(x,0)$.

Покажем, что если w удовлетворяет уравнению (13), тогда w^c удовлетворяет уравнению (15). Действительно,

$$(D_t^2+c^2)w^c=(D_t^2+c^2)S_+w=S_+D_t^2w=S_+Aw=ASw=Aw^c,$$

поэтому $(D_t^2+c^2)w^c=Aw^c$, и, следовательно, w^c удовлетворяет (15). Теорема 3.1. доказана.

Аналогично, получается

Теорема 3.2. Пусть A является линейным оператором, действующим по переменным $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, а функция w является решением задачи

$$w_{tt}=Aw,\qquad w=w(x,t),$$

$$w(x,0)=f(x),\qquad w_t(x,0)=g(x).$$

Тогда функция

$$w^c=S_-w,$$

где

$$(S_-)_tw(x,t)=w(x,t)+\frac{c}{2}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}}I_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)w(x,\tau)\,d\tau$$

является решением другой задачи

$$w^c_{tt}-c^2w^c=Aw^c,\qquad w^c=w^c(x,t),$$

$$w^c(x,0)=f(x),\qquad w^c_t(x,0)=g(x).$$

Пример 3.1. Рассмотрим одномерное волновое уравнение следующего вида

$$w_{tt}=a^2w_{xx}$$

с начальными условиями

$$w(x,0)=f(x),\qquad w_t(x,0)=g(x).$$

Его решение даётся по формуле Д'Аламбера, см. [18, стр. 64]:

$$w(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}g(s)ds.$$

Тогда по теореме 3.1 получаем, что

$$w^c(x,t)=(S_+)_tw(x,t)=w(x,t)-\frac{c}{2}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}}J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)w(x,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}-\frac{c}{4}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}}J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)(f(x-a\tau)+f(x+a\tau))\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}g(s)ds-\frac{c}{4a}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}}J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\left(\int\limits_{x-a\tau}^{x+a\tau}g(s)ds\right)d\tau \tag{17}$$

является решением телеграфного уравнения

$$w^c_{tt}=a^2w^c_{xx}-c^2w^c.$$

$$w^c(x,0)=f(x),\qquad w^c_t(x,0)=g(x).$$

Преобразуем второе слагаемое в (17)

$$\frac{c}{4}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}}J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)(f(x-a\tau)+f(x+a\tau))\,d\tau=$$

$$=\frac{c}{4}\int\limits_{-t}^{t}\frac{t+\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}}J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)[f(x-a\tau)+f(x+a\tau)]\,d\tau=$$

$$= \frac{ct}{2}\int\limits_{-t}^{t}\frac{J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{t^2-\tau^2}}f(x-a\tau)\,d\tau = \{x+a\tau=s\} =$$

$$= \frac{ct}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{J_1\left(c\sqrt{t^2-\left(\frac{x-s}{a}\right)^2}\right)}{\sqrt{t^2-\left(\frac{x-s}{a}\right)^2}}f(s)\,ds.$$

Кроме того, в выражении

$$\int\tau\frac{J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{t^2-\tau^2}}d\tau = \frac{1}{c}\left(J_0(c\sqrt{t^2-\tau^2})-1\right)+C$$

мы преобразуем третье и четвёртое слагаемые в (17):

$$(S_+)_t\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}g(s)ds =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}g(s)\mathrm{d}s - \frac{c}{4a}\int\limits_{-t}^{t}\frac{t+\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}}J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\left(\int\limits_{x-a\tau}^{x+a\tau}g(s)ds\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}J_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-s)^2}{a^2}}\right)g(s)ds.$$

Окончательно, мы получаем известную формулу, см. [19, стр. 302]

$$w^c(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} - \frac{ct}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{J_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-s)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{(x-s)^2}{a^2}}}f(s)\mathrm{d}s +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}J_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-s)^2}{a^2}}\right)g(s)ds.$$

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение, которое встречается при изучении трансверсальных колебаний эластичного стержня

$$w_{tt} = -a^2 w_{xxxx}, \qquad w = w(x,t). \tag{18}$$

Добавим условие по переменной $x \in \mathbb{R}$

$$w(x,0) = f(x), \qquad w_t(x,t) = ag''(x). \tag{19}$$

Получаем задачу Коши для уравнения Буссинеска (см. [19, стр. 617]

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x-2p\sqrt{at})(\cos(p^2)+\sin(p^2))dp +$$

$$+\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x-2p\sqrt{at})(\cos(p^2)-\sin(p^2))dp.$$

Как следствие нашей теоремы 3.1 получаем, что

$$w^c(x,t) = (S_+)_t w(x,t) = w(x,t) - \frac{c}{2}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}}J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)w(x,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x-2p\sqrt{at})(\cos(p^2)+\sin(p^2))dp +$$

$$+\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-2p\sqrt{at})(\cos(p^2)-\sin(p^2))dp-$$

$$-\frac{c}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}}J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-2p\sqrt{a\tau})(\cos(p^2)+\sin(p^2))dp\right)d\tau-$$

$$-\frac{c}{2a\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}}J_1\left(c\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-2p\sqrt{a\tau})(\cos(p^2)-\sin(p^2))dp\right)d\tau$$

есть решение задачи Коши для возмущённого уравнения типа Буссинеска со спектральным параметром.

$$w^c_{tt}=-a^2w^c_{xxxx}-c^2w^c.$$

$$w^c(x,0)=f(x),\qquad w^c_t(x,0)=ag''(x).$$

4. Заключение. Мы используем метод теории операторов преобразования для связи возмущённых уравнений с невозмущёнными. Этот метод также может быть применён для вывода похожих формул для других уравнений или областей. Следует отметить, что метод существенно использует интегрирование по частям, при котором внеинтегральные члены должны сократиться. Рассмотрены в качестве примеров явные формулы для решений задачи Коши для уравнения Гельмгольца и уравнения Буссинеска со спектральным параметром.

References

1. Carroll RW, Showalter RE. Singular and Degenerate Cauchy problems. Academic Press, New York; 1976. 343 p.
2. Katrakhov VV., Sitnik SM. The Transmutation Method and Boundary-Value Problems for Singular Elliptic Equations. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.* 2018;64(2):211–426. (in Russian)
3. Kravchenko VV. , Sitnik SM. (Eds.) Some recent developments in the transmutation operator approach. Springer International Publishing, Cham; 2020. 686 p.
4. Shishkina EL., Sitnik SM. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam; 2020. 592 p.
5. Erdélyi A. On fractional integration and its application to the Hankel transforms. *Quart. J. Math. Oxford.* 1940;11:293–303.
6. Erdélyi A. An integral equation involving Legendre functions. *SIAM Rev.* 1964;12:1:15–30.
7. Erdélyi A. An application of fractional integrals. *J. Analyse Math.* 1965;14:113–126.
8. Erdélyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals. *Glasgow Math. J.* 1967;8:1:50–54.
9. Vekua IN. New Methods for Solving Elliptic Equations. North-Holland Series in Applied Mathematics & Mechanics), North–Holland Publishing Company, 1967. 358 p.
10. Lowndes JS. An application of some fractional integrals. *Glasg. Math. J.* 1979;20:1:35–41.
11. Lowndes JS. On some generalizations of Riemann—Liouville and Weil fractional integrals and their applications. *Glasg. Math. J.* 1981;22:2:73–80.
12. Lowndes JS. Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients. *Proc. Edinb. Math. Soc.* 1983;26:3:97–105.
13. Sitnik SM., Lyakhovetskii GV. The Vekua-Erdelyi-Lowndes transmutations. Preprint. Institute of automation and control processes of the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, 1994. (in Russian).
14. Sitnik SM., Lyakhovetskii GV. Construction of Vekua-Erdelyi-Laundes transformation operators. "Differential equations, theory of functions and applications". International conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Academician Ilya Nestorovich Vekua. Abstracts of reports. Novosibirsk, 2007, 469–470. (in Russian).
15. Karimov ShT. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order, *Filomat* 2018;32:3:873–883.
16. Beerends RJ. A transmutation property of the generalized Abel transform associated with root system A_2. *Indag. Math. (N.S.).* 1990;1:155–168.
17. Abramowitz M., Stegun I. (Eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, 1972. 1060 p.
18. Karapetyants AN., Kravchenko VV. Methods of Mathematical Physics: Classical and Modern. Birkhäuser, Cham, Switzerland, 2022. 405 p.
19. Polyanin AD. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. Chapman & Hall/CRC Press, 2002. 800 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.11.2023
Поступила после рецензирования 10.01.2024
Принята к публикации 14.02.2024

Received November 27, 2023
Revised January 10, 2024
Accepted February 14, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладного и математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Алзамили Хитам – аспирант кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Кудоси Абдул Мохаммад – аспирант кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Ситник Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ilina L. Shishkina – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied and Mathematical Analysis, Voronezh State Univetsity, Voronezh, Russia

Alzamili Khitam – Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Qudosi Abdul Mohammad – Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Sergei M. Sitnik – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia