Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 4. С. 273–285.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 4. P. 273–285.

УДК 512.552
MSC 16T15, 16W25
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-273-285

О некоторых линейных отображениях коалгебр инцидентности

Кайгородов Е. В.[1], **Крылов П. А.**[2], **Туганбаев А. А.**[3]
(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)

[1] Горно-Алтайский государственный университет,
Россия, 649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1
gazetaintegral@gmail.com
[2] Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
krylov@math.tsu.ru
[3] Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Россия, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14, стр. 1
tuganbaev@gmail.com

Аннотация. Различные линейные отображения алгебры инцидентности $I(X, F)$ частично упорядоченного множества X над полем F всегда привлекали внимание специалистов. Исследовались автоморфизмы, изоморфизмы, дифференцирования, антиавтоморфизмы и инволюции. Работы, в которых изучались бы линейные отображения коалгебры инцидентности $\mathrm{Co}\,(X, F)$, неизвестны. Эта коалгебра является в определенном смысле двойственным объектом к алгебре $I(X, F)$. В данной статье найдено строение группы автоморфизмов и пространства дифференцирований коалгебры $\mathrm{Co}\,(X, F)$. Установлено также, что группа автоморфизмов коалгебры $\mathrm{Co}\,(X, F)$ антиизоморфна группе автоморфизмов алгебры $I(X, F)$, в то время как пространства дифференцирований этих объектов изоморфны. Доказательства основаны на том известном факте, что двойственная алгебра к коалгебре $\mathrm{Co}\,(X, F)$ канонически изоморфна алгебре $I(X, F)$.

Ключевые слова: автоморфизм, дифференцирование, алгебра инцидентности, коалгебра инцидентности

Благодарности: Исследование второго и третьего авторов выполнено за счет Российского научного фонда.

Для цитирования: Кайгородов Е. В., Крылов П. А., Туганбаев А. А. 2024. О некоторых линейных отображениях коалгебр инцидентности. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 273–285. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-273-285

Original Research

On Some Linear Mappings of Incidence Coalgebras

Evgeniy V. Kaigorodov[1], **Piotr A. Krylov**[2], **Askar A. Tuganbaev**[2],
(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)*

[1] Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkina St., Gorno-Altaisk 649000, Russia
gazetaintegral@gmail.com
[2] National Research Tomsk State University,
36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia
krylov@math.tsu.ru
[3] National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
14, Build. 1 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia
tuganbaev@gmail.com

Abstract. Various linear mappings of the incidence algebra $I(X, F)$ of the partially ordered set X over a field F have always attracted attention of specialists. Automorphisms, isomorphisms, derivations, antiautomorphisms and involutions have been studied. Works that would study linear mappings of the incidence coalgebra $\mathrm{Co}\,(X, F)$ are unknown. This coalgebra is in some sense a dual object to the algebra $I(X, F)$. This paper reveals the structure of the automorphism group and the derivation space of the coalgebra $\mathrm{Co}\,(X, F)$. It is found that the group of automorphisms of the coalgebra $\mathrm{Co}\,(X, F)$ is antiisomorphic to the group of automorphisms of the algebra $I(X, F)$, while the derivation spaces of these objects are isomorphic. The proofs are based on the well-known fact that the dual algebra to the coalgebra $\mathrm{Co}\,(X, F)$ is canonically isomorphic to the algebra $I(X, F)$.

Keywords: Automorphism, Derivation, Incidence Algebra, Incidence Coalgebra

Acknowledgements: The research of the second and third authors has been conducted at the expense of the Russian Science Foundation.

For citation: Kaigorodov E. V., Krylov P. A., Tuganbaev A. A. 2024. On Some Linear Mappings of Incidence Coalgebras. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 273–285. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-273-285

1. Введение. В данной статье для частично упорядоченного множества X и поля F изучаются автоморфизмы и дифференцирования коалгебры инцидентности $\mathrm{Co}\,(X, F)$ множества X над F. Известно, что алгебра, двойственная к коалгебре $\mathrm{Co}\,(X, F)$ канонически изоморфна алгебре инцидентности $I(X, F)$ частично упорядоченного множества X над полем F. Теория алгебр и коалгебр инцидентности представлена в книге [1]. За дополнительной информацией можно обратиться к статьям [2] и [3], содержащим также разнообразный материал о произвольных коалгебрах.

Строение группы автоморфизмов и пространства дифференцирований алгебры инцидентности $I(X, F)$ выяснено достаточно давно. Соответствующие результаты изложены в [1]. В дальнейшем эти результаты распространялись в довольно большом числе работ на более общие кольца инцидентности $I(X, R)$, где X – предупорядоченное множество и R – некоторое кольцо.

Среди работ, опубликованных после выхода книги [1], выделим следующие работы. В [4] вычисляется группа внешних автоморфизмов алгебры $I(X, F)$ для конечного предупорядоченного множества X и поля F. При этом развивается подход, основанный на когомологической интерпретации группы автоморфизмов. Обзор [5] посвящен автоморфизмам, антиавтоморфизмам, инволюциям и изоморфизмам колец инцидентности, см. также [6]. В [7] изучаются автоморфизмы финитарных алгебр инцидентности. При некоторых предположениях найдено строение группы внешних автоморфизмов такой алгебры. В [8] рассматривается ряд вопросов о мультипликативных автоморфизмах алгебры $I(X, F)$, где X – конечное частично упорядоченное множество и F – поле (об этих автоморфизмах см. конец раздела 4).

Много внимания также уделялось дифференцированиям колец инцидентности, как обычным, так и лиевым и йордановым дифференцированиям, см. [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

В ряде статей были введены и исследовались кольца, близкие в разных смыслах к обычным кольцам инцидентности (см., например, [3, 16] и [17]). С другой стороны, авторам неизвестны работы, в которых изучались автоморфизмы или дифференцирования коалгебр инцидентности.

При изучении автоморфизмов и дифференцирований мы переходим от коалгебры $\mathrm{Co}\,(X, F)$ к алгебре $I(X, F)$ и наоборот. Правда, обратный переход затруднен. В общем случае нельзя каким-то стандартным способом вернуться от алгебры $I(X, F)$ к коалгебре $\mathrm{Co}\,(X, F)$. При этом важно то, что автоморфизмы и дифференцирования коалгебры $\mathrm{Co}\,(X, F)$ индуцируют автоморфизмы и дифференцирования соответственно двойственной алгебры и затем алгебры $I(X, F)$.

Применение изложенного подхода привело к удовлетворительному описанию автоморфизмов и дифференцирований коалгебры $\mathrm{Co}\,(X, F)$ (теоремы 7.1 и 11.1). Именно, каждый автоморфизм является произведением трех стандартных автоморфизмов (здесь мы считаем автоморфизм стандартным, если его строение вполне понятно). А всякое дифференцирование является суммой двух стандартных дифференцирований.

Результаты и техника доказательств данной статьи могут служить примером при изучении автоморфизмов и дифференцирований коалгебр из других классов. В частности, в разделах 6 и 10 даны определения внутреннего автоморфизма и внутреннего дифференцирования коалгебры $\mathrm{Co}\,(X, F)$. В основном благодаря этим понятиям удалось получить разложения автоморфизмов и дифференцирований в теоремах 7.1 и 11.1.

Разделы 2–4 и 8 содержат различные и в целом известные факты о коалгебрах и алгебрах инцидентности, автоморфизмах и дифференцированиях алгебр инцидентности. Этот материал необходим в основных разделах и включен в статью для удобства чтения.

Группа автоморфизмов частично упорядоченного множества X обозначается через $\mathrm{Aut}\, X$. Для любых элементов $x, y \in X$ через $[x, y]$ обозначим подмножество $\{z \in X \mid x \leqslant z \leqslant y\}$. Оно называется интервалом в X. Далее считаем, что все интервалы в X конечны. В таком случае X называют локально конечным частично упорядоченным множеством.

Если V – линейное пространство над полем F (кратко, F-пространство), то V^* – двойственное пространство к V, т. е. $V^* = \mathrm{Hom}_F(V, F)$. Затем, $\mathrm{End}_F V$ – кольцо эндоморфизмов (т. е. линейных операторов) пространства V и $\mathrm{Aut}_F V$ – группа автоморфизмов (т. е. обратимых линейных операторов) пространства V. В качестве пространства V будет выступать какая-то алгебра A, либо коалгебра C и её двойственная алгебра C^*.

Пусть A – алгебра над полем F (кратко, F-алгебра). Тогда $\mathrm{Aut}\, A$ – группа автоморфизмов алгебры A, $\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\, A)$ – подгруппа внутренних автоморфизмов, $\mathrm{Der}\, A$ – пространство дифференцирований алгебры A, $\mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, A)$ – подпространство внутренних дифференцирований. Группу автоморфизмов коалгебры C тоже обозначаем через $\mathrm{Aut}\, C$.

Полупрямое произведение групп A и B обозначается через $A \rtimes B$. Такое обозначение носит условный характер, но оно удобно. Запись $G \cong A \rtimes B$ подразумевает, что группа G содержит нормальную подгруппу H и подгруппу E, для которых $G = H \cdot E$, $H \cap E = \langle e \rangle$, $A \cong H$, $B \cong E \cong G/H$. Отметим, что некоторые результаты данной статьи содержатся в препринте [18].

2. Коалгебры и двойственные алгебры. Пусть (C, Δ, ε) – некоторая коалгебра над полем F. Таким образом, C – F-пространство, Δ – коумножение в C, ε – коединица для C. Для обозначения этой коалгебры используем одну букву C.

Естественным образом можно так определить линейные отображения $m\colon C^*\otimes C^*\to C^*$ и $u\colon F\to C^*$, что получится F-алгебра $C^*=(C^*,m,u)$. Она называется двойственной алгеброй к коалгебре C. Единичным элементом алгебры C^* является коединица ε. Отметим, что если C – конечномерное пространство, то двойственность есть и в обратном направлении.

Немного детализируем только что сказанное. Умножение $m\colon C^*\otimes C^*\to C^*$ индуцируется коумножением Δ.

Пусть ω – это канонический изоморфизм $F\otimes F\to F$. Для произвольных элементов χ, ξ из C^* их произведение в C^* обозначим через $\chi\circ\xi$. Имеют место равенства

$$m(\chi\otimes\xi)=\chi\circ\xi=\omega(\chi\otimes\xi)\Delta.$$

Из них получается правило умножения в алгебре C^*, изложенное в следующей лемме.

Лемма 2.1. *Пусть $\chi,\xi\in C^*$. Далее пусть $c\in C$ и $\Delta(c)=\sum\limits_i a_i\otimes b_i$, где $a_i,b_i\in C$. Тогда справедливо равенство*

$$(\chi\circ\xi)(c)=\sum_i\chi(a_i)\xi(b_i).$$

Обозначим через Γ отображение $\mathrm{End}_FC\to\mathrm{End}_FC^*$, где $\Gamma(\varphi)=\varphi^*$ для каждого $\varphi\in\mathrm{End}_FC$. Здесь φ^* – линейное отображение пространства C^*, индуцированное φ, т. е. $\varphi^*(\chi)=\chi\varphi$ для любого $\chi\in C^*$. Если $\varphi\in\mathrm{Aut}_FC$, то понятно, что $\varphi^*\in\mathrm{Aut}_FC^*$.

Запишем следующий полезный факт.

Лемма 2.2. *Отображение Γ является антимономорфизмом F-алгебр $\mathrm{End}_FC\to\mathrm{End}_FC^*$ и групповым антимономорфизмом $\mathrm{Aut}_FC\to\mathrm{Aut}_FC^*$.*

Всюду далее X – некоторое локально конечное частично упорядоченное множество. Пусть C – векторное пространство, базис которого состоит из всех интервалов $[x,y]$ множества X. Определим отображения $\Delta\colon C\to C\otimes C$ и $\varepsilon\colon C\to F$, полагая

$$\Delta([x,y])=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}[x,z]\otimes[z,y],\quad \varepsilon([x,y])=\begin{cases}1, & \text{если } x=y;\\ 0, & \text{если } x\neq y\end{cases}$$

для всякого интервала $[x,y]$.

Тройка (C,Δ,ε) является коалгеброй, называемой коалгеброй инцидентности локально конечного частично упорядоченного множества X. Будем обозначать её $\mathrm{Co}\,(X,F)$. Или же, как раньше, одной буквой C.

3. Двойственная алгебра к $\mathrm{Co}\,(X,F)$ и алгебра $I(X,F)$. Приведем определение алгебры инцидентности (см. [1]). Положим

$$I(X,F)=\{f\colon X\times X\to R\mid f(x,y)=0,\ \text{если } x\nleqslant y\}.$$

Функции складываются поточечно и умножаются естественным образом на скаляры из F. Произведение функций задается формулой

$$(fg)(x,y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}f(x,z)\cdot g(z,y)$$

для любых $x,y\in X$. В результате получаем F-алгебру $I(X,F)$, называемую алгеброй инцидентности частично упорядоченного множества X над полем F. Если X – конечное множество, то алгебру $I(X,F)$ обычно называют кольцом структуральных матриц. Такие кольца являются одним из видов колец формальных матриц, последним посвящена книга [19].

Алгебру инцидентности $I(X,F)$ иногда будем обозначать буквой A. А коалгебру инцидентности $\mathrm{Co}\,(X,F)$ обозначаем через C, как договаривались в конце предыдущего раздела. Раскроем связи между алгебрами C^* и A.

Существуют взаимно обратные изоморфизмы F-алгебр

$$\Phi\colon C^*\to A \text{ и } \Psi\colon A\to C^*,\ \text{где } (\Phi(\chi))(x,y)=\chi([x,y]),\ \chi\in C^*,$$
$$(\Psi(f))([x,y])=f(x,y),\ f\in A,$$

для любых $x,y\in X$ со свойством $x\leqslant y$.

В свою очередь, Φ и Ψ индуцируют взаимно обратные изоморфизмы алгебр линейных отображений

$$\Phi^*\colon\mathrm{End}_FC^*\to\mathrm{End}_FA,\quad \Psi^*\colon\mathrm{End}_FA\to\mathrm{End}_FC^*,$$

где

$$\Phi^*(\eta)=\Phi\eta\Psi,\ \eta\in\mathrm{End}_FC^*,\quad \Psi^*(\xi)=\Psi\xi\Phi,\ \xi\in\mathrm{End}_FA.$$

Обозначим через Θ антимономорфизм алгебр $\Phi^*\Gamma\colon \mathrm{End}_F C \to \mathrm{End}_F A$ (см. лемму 2.2). Выясним, что окажется очень полезным, как действует Θ. Для произвольных $\varphi \in \mathrm{End}_F C$ и $f \in A$ можно записать равенства

$$(\Theta(\varphi))(f) = ((\Phi^*\Gamma)(\varphi))(f) = (\Phi^*(\Gamma(\varphi)))(f) = ((\Phi\Gamma(\varphi))\Psi)(f) =$$
$$= \Phi(\Gamma(\varphi)(\Psi(f))) = \Phi(\Psi(f)\varphi), \text{ где } \Psi(f)\varphi \in C^*.$$

Для любых $x, y \in X$, таких, что $x \leqslant y$, имеем равенство $\Phi(\Psi(f)\varphi)(x,y) = \Psi(f)(\varphi([x,y]))$. В итоге получили равенство $((\Theta(\varphi))(f))(x,y) = \Psi(f)(\varphi([x,y]))$.

Далее, если
$$\varphi([x,y]) = \alpha_1[x_1,y_1] + \ldots + \alpha_k[x_k,y_k], \text{ где } \alpha_i \in F,$$
то справедливы равенства

$$\Psi(f)(\varphi([x,y])) = \alpha_1\Psi(f)([x_1,y_1]) + \ldots + \alpha_k\Psi(f)([x_k,y_k]) = \alpha_1 f(x_1,y_1) + \ldots + \alpha_k f(x_k,y_k).$$

Таким образом, можем записать следующее предложение.

Предложение 3.1. *Пусть $\varphi \in \mathrm{End}_F C$, $f \in I(X,F)$, $[x,y]$ – интервал в X. Имеют место приведенные ниже утверждения.*

1. *Верно равенство $((\Theta(\varphi))(f))(x,y) = \Psi(f)(\varphi([x,y]))$. В частности, $\Psi(f)([x,y]) = f(x,y)$ (при $\varphi = 1$).*
2. *Если $\varphi([x,y]) = \alpha_1[x_1,y_1]+\ldots+\alpha_k[x_k,y_k]$, $\alpha_i \in F$, то $((\Theta(\varphi))(f))(x,y) = \alpha_1 f(x_1,y_1)+\ldots+\alpha_k f(x_k,y_k)$.*

4. О группе Aut $(I(X,F))$. Соберём вместе ряд сведений об алгебре инцидентности $I(X,F)$ и её группе автоморфизмов (см. подробности в [1] и [13]). Как и в прошлом разделе, алгебру $I(X,F)$ обозначаем также буквой A. Для группы автоморфизмов частично упорядоченного множества X используем символ $\mathrm{Aut}\,X$.

Напомним о некоторых специальных функциях из $I(X,F)$. Для данного $x \in X$ положим $e_x(x,x) = 1$ и $e_x(z,y) = 0$ для всех оставшихся пар (z,y). Система $\{e_x \mid x \in X\}$ состоит из попарно ортогональных идемпотентов в кольце L_1 (последнее кольцо определено в следующем абзаце).

Определим подкольцо L_1 и идеал M_1 в A. Положим

$$\begin{cases} L_1 \ = \{f \in A \mid f(x,y) = 0, \text{ если } x \neq y\}, \\ M_1 = \{f \in A \mid f(x,y) = 0, \text{ если } x = y\}. \end{cases}$$

Имеем прямую сумму F-пространств $A = L_1 \oplus M_1$. Таким образом, алгебра A является расщепляющимся расширением идеала M_1 с помощью подкольца L_1. Идеал M_1 можно рассматривать как L_1-L_1-бимодуль и как неунитальную алгебру.

Пусть дан произвольный элемент $x \in X$. Обозначим через R_x множество всех таких функций $f \in A$, что $f(z,y) = 0$ при $(z,y) \neq (x,x)$. Справедливо равенство $R_x = e_x A e_x$. Следовательно, R_x – кольцо с единицей e_x. Более точно, $R_x \cong F$.

Возьмем теперь два различных элемента x, y и положим

$$M_{xy} = \{f \in A \mid f(s,t) = 0, \text{ если } (s,t) \neq (x,y)\}.$$

Здесь $M_{xy} = e_x A e_y$ и, значит, M_{xy} есть R_x-R_y-бимодуль.

Произведение $\prod\limits_{x,y\in X} M_{xy}$ обладает естественной структурой L_1-L_1-бимодуля. Можно также определить в этом бимодуле умножение посредством формулы

$$(g_{xy})(h_{xy}) = (d_{xy}), \text{ где } d_{xy} = \sum_{x\leqslant z\leqslant y} g_{xz}h_{zy}.$$

После этого произведение $\prod\limits_{x,y\in X} M_{xy}$ становится (неунитальной) алгеброй.

Предложение 4.1. [13, предложение 3.1]. *Существуют канонические изоморфизмы алгебр $L_1 \cong \prod\limits_{x\in X} R_x$ и L_1-L_1-бимодулей и алгебр $M_1 \cong \prod\limits_{x,y\in X} M_{xy}$.*

В дальнейшем мы не будем различать соответствующие объекты относительно изоморфизмов, указанных в предложении 4.1.

Пусть φ – произвольный автоморфизм алгебры A. Исходя из прямой суммы F-пространств $A = L_1 \oplus M_1$, можно сопоставить автоморфизму φ 2×2 матрицу $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{smallmatrix}\right)$. Причем в нашем случае $\gamma = 0$ (см. [13, предложение 3.1]). Затем, α – автоморфизм алгебры L_1 и β – автоморфизм (неунитальной) алгебры M_1. Если $\delta = 0$, то β является также автоморфизмом L_1-L_1-бимодуля M_1.

Пусть v – какой-то обратимый элемент алгебры A. С его помощью можно получить автоморфизм μ_v этой алгебры, если положить $\mu_v(f) = v^{-1}fv$ для каждого $f \in A$. Такой автоморфизм называется внутренним автоморфизмом, определяемым элементом v. Все внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,A)$ в $\mathrm{Aut}\,A$. В нашем случае введенное понятие полезно детализировать, как это сделано в [13]. Обозначим через $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,A)$ (соответственно, $\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,A)$) подгруппу внутренних автоморфизмов, определяемых обратимыми элементами вида $1+g$, $g \in M_1$ (соответственно, определяемых обратимыми элементами алгебры L_1). Первая подгруппа нормальна в $\mathrm{Aut}\,A$ и имеет место полупрямое разложение

$$\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,A) = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,A) \rtimes \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,A).$$

В дополнение к $\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,A)$ введем еще две подгруппы группы $\mathrm{Aut}\,A$.

Пусть $\mathrm{Mult}\,A$ обозначает подгруппу в $\mathrm{Aut}\,A$, состоящую из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Такие автоморфизмы называются мультипликативными. Подойдем несколько иначе к их определению.

Определение 4.2. *Назовем мультипликативной системой такую систему ненулевых элементов $\{c_{xy} \in F \mid x < y\}$, что верно равенство $c_{xy} = c_{xz}c_{zy}$, как только $x < z < y$.*

Пусть $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Mult}\,A$. Для любых элементов x, y, $x < y$ существует ненулевой элемент c_{xy} поля F, для которого верно равенство $\beta(g) = c_{xy}g$ при всех $g \in M_{xy}$. Причем система $\{c_{xy} \mid x < y\}$ является мультипликативной (см. абзац перед [13, предложение 10.2]). Все эти утверждения вытекают из того, что β – автоморфизм алгебры M_1 и L_1-L_1-бимодуля M_1, как указано после предложения 4.1.

Таким образом, можно поставить в соответствие автоморфизму ψ мультипликативную систему $\{c_{xy} \mid x < y\}$. И обратно, всякая мультипликативная система $\{c_{xy} \mid x < y\}$ задает мультипликативный автоморфизм ψ. Именно, для элемента $g = (g_{xy}) \in M_1$ полагаем $\psi(g) = (c_{xy}g_{xy})$ и $\psi(f) = f$ для $f \in L_1$.

Можно записать следующий факт [13, предложение 10.2].

Предложение 4.3. *Имеется взаимно однозначное соответствие между мультипликативными автоморфизмами и мультипликативными системами элементов.*

Рассмотрим другой вид автоморфизмов. Пусть $\tau \in \mathrm{Aut}\,X$. Определим отображение $\eta_\tau \colon A \to A$, полагая $(\eta_\tau(f))(x, y) = f(\tau(x), \tau(y))$ для любых $f \in A$, $x, y \in X$.

Здесь η_τ – автоморфизм алгебры A и сопоставление $\tau \to \eta_\tau$ будет антиизоморфным вложением групп $\mathrm{Aut}\,X \to \mathrm{Aut}\,A$. Образ этого вложения обозначим символом $\mathrm{Aut}_A X$. Автоморфизмы вида η_τ назовем порядковыми.

Приведем основной результат о строении группы $\mathrm{Aut}\,A$. Он содержится в [1, теорема 7.3.6]. Некоторые его усиления и уточнения получены в [13, следствие 9.4].

Теорема 4.4. *Имеют место следующие равенства групп*

$$\mathrm{Aut}\,A = (\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,A) \cdot \mathrm{Mult}\,A) \rtimes \mathrm{Aut}_A X = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,A) \rtimes \mathrm{Mult}\,A \rtimes \mathrm{Aut}_A X.$$

5. Группа Aut C и её подгруппы. Пусть $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ и $C' = (C', \Delta', \varepsilon')$ – произвольные коалгебры над полем F. Линейное отображение $\varphi \colon C \to C'$ называется гомоморфизмом коалгебры C в коалгебру C' при условии, что $(\varphi \otimes \varphi)\Delta = \Delta'\varphi$ и $\varepsilon'\varphi = \varepsilon$.

Если $\varphi \colon C \to C$ – гомоморфизм коалгебр и φ – биекция, то φ называют автоморфизмом коалгебры C. Все автоморфизмы коалгебры C образуют группу относительно композиции. Она обозначается $\mathrm{Aut}\,C$ и называется группой автоморфизмов коалгебры C.

Напомним, что $\mathrm{Aut}\,C^*$ – это группа автоморфизмов двойственной алгебры C^* (см. раздел 2).

Утверждение следующей известной леммы проверяется простыми вычислениями.

Лемма 5.1. *Если $\varphi \in \mathrm{Aut}\,C$, то $\varphi^* \in \mathrm{Aut}\,C^*$.*

До конца этого раздела буквой C обозначаем коалгебру инцидентности $\mathrm{Co}\,(X, F)$, а буквой A – алгебру инцидентности $I(X, F)$. Для алгебры A можно ввести аналоги матричных единиц. Пусть $x, y \in X$ и $x < y$. Обозначим через e_{xy} такую функцию $X \times X \to R$, что $e_{xy}(s, t) = 1$, если $s = x$, $t = y$, и $e_{xy}(s, t) = 0$ для всех других пар (s, t). Функции e_{xy} обладают следующим свойством: если $x < z < y$, то $e_{xz}e_{zy} = e_{xy}$.

Ввиду лемм 2.2, 5.1 и материала раздела 3 мы располагаем групповыми антимономорфизмами $\Gamma \colon \mathrm{Aut}\,C \to \mathrm{Aut}\,C^*$ и $\Theta \colon \mathrm{Aut}\,C \to \mathrm{Aut}\,A$. Теперь определим в $\mathrm{Aut}\,C$ подгруппы, аналогичные подгруппам $\mathrm{Mult}\,A$ и $\mathrm{Aut}_A X$ в $\mathrm{Aut}\,A$ из раздела 4.

Пусть дана мультипликативная система элементов $\{d_{xy} \mid x < y\}$ (подобные системы появились в разделе 4). Определим отображение $\lambda \colon C \to C$, положив $\lambda([x, y]) = d_{xy}[x, y]$ для всякого базисного вектора $[x, y]$, где $x < y$, пространства C и $\lambda([x, x]) = [x, x]$ для всякого вектора $[x, x]$. Естественным образом λ продолжается до линейного отображения пространства C. Проверка подтверждает, что λ – автоморфизм коалгебры C. Будем называть его мультипликативным автоморфизмом, соответствующим мультипликативной системе $\{d_{xy} \mid x < y\}$.

Все мультипликативные автоморфизмы коалгебры C образуют подгруппу в $\mathrm{Aut}\,C$, которую обозначим через $\mathrm{Mult}\,C$.

Предложение 5.2. *Группы* $\operatorname{Mult} C$ *и* $\operatorname{Mult} A$ *изоморфны, причем изоморфизм осуществляется отображением* Θ.

Доказательство. Прежде заметим, что группы $\operatorname{Mult} A$ и $\operatorname{Mult} C$ абелевы.

Пусть $\lambda \in \operatorname{Mult} C$ и $\{d_{xy} \,|\, x < y\}$ – соответствующая мультипликативная система. Таким образом $\lambda([x,y]) = d_{xy}[x,y]$ для всех базисных векторов $[x,y]$ пространства C (можно считать, что $d_{xx} = 1$ для всех векторов вида $[x,x]$). На основании предложения 3.1 для любой пары (s,t) с условием $s \leqslant t$ можно записать равенства

$$((\Theta(\lambda))(e_{xy}))(s,t) = d_{st}e_{xy}(s,t) = \begin{cases} d_{xy}, & \text{если } (s,t) = (x,y); \\ 0, & \text{если } (s,t) \neq (x,y). \end{cases}$$

Откуда получаем $(\Theta(\lambda))(e_{xy}) = d_{xy}e_{xy}$. Делаем вывод, что $\Theta(\lambda)$ – мультипликативный автоморфизм алгебры A, соответствующий системе $\{d_{xy} \,|\, x < y\}$ (надо еще принять во внимание предложение 4.3). Таким образом, $\Theta(\lambda) \in \operatorname{Mult} A$.

Возьмем теперь некоторый автоморфизм $\psi \in \operatorname{Mult} A$. И пусть ему соответствует мультипликативная система $\{c_{xy} \,|\, x < y\}$ из предложения 4.3. Обозначим через δ мультипликативный автоморфизм коалгебры C, соответствующий системе $\{c_{xy} \,|\, x < y\}$. Из предыдущего абзаца следует, что $\Theta(\delta) = \psi$. Можно утверждать, что ограничение Θ на $\operatorname{Mult} C$ отображает $\operatorname{Mult} C$ на $\operatorname{Mult} A$ и, значит, является изоморфизмом $\operatorname{Mult} C \to \operatorname{Mult} A$. ■

Теперь рассмотрим аналог порядковых автоморфизмов для коалгебры C. Пусть дан автоморфизм τ частично упорядоченного множества X. Зададим отображение $\zeta_\tau \colon C \to C$, полагая $\zeta_\tau([x,y]) = [\tau(x),\tau(y)]$ для каждого базисного вектора $[x,y]$. В результате получаем автоморфизм ζ_τ коалгебры C. Сопоставление $\tau \to \zeta_\tau$ является групповым мономорфизмом $\operatorname{Aut} X \to \operatorname{Aut} C$. Его образ обозначим через $\operatorname{Aut}_C X$.

Предложение 5.3. *Отображение* Θ *осуществляет групповой антиизоморфизм* $\operatorname{Aut}_C X \to \operatorname{Aut}_A X$.

Доказательство. Пусть $\tau \in \operatorname{Aut} X$, η_τ – автоморфизм алгебры A, определенный после предложения 4.3 и ζ_τ – автоморфизм коалгебры C, введенный выше. Опираясь на предложение 3.1, можно заметить, что Θ переводит ζ_τ в η_τ. Отсюда вытекает требуемый результат. ■

6. Внутренние автоморфизмы коалгебры Co (X,F). Введем понятие внутреннего автоморфизма коалгебры. Цель раздела – убедиться, что группа внутренних автоморфизмов коалгебры $\operatorname{Co}(X,F)$ антиизоморфна группе внутренних автоморфизмов алгебры $I(X,F)$.

Пусть теперь C – произвольная коалгебра.

Определение 6.1. *Автоморфизм* ν *коалгебры* C *будем называть внутренним, если* ν^* *– внутренний автоморфизм двойственной алгебры* C^*.

Все внутренние автоморфизмы коалгебры C образуют нормальную подгруппу в $\operatorname{Aut} C$, которую обозначаем через $\operatorname{In}(\operatorname{Aut} C)$.

С этого момента и до конца раздела 7 буква C снова обозначает коалгебру инцидентности Co (X,F), а A – алгебру инцидентности $I(X,F)$.

Пусть $\nu \in \operatorname{In}(\operatorname{Aut} C)$. Согласно определению, имеем включение $\nu^* \in \operatorname{In}(\operatorname{Aut} C^*)$. И затем можно убедиться, что $\Phi^*(\nu^*) \in \operatorname{In}(\operatorname{Aut} A)$. Таким образом, получаем групповое антиизоморфное вложение $\Theta \colon \operatorname{In}(\operatorname{Aut} C) \to \operatorname{In}(\operatorname{Aut} A)$ (см. начало раздела 5).

Исходя из произвольной обратимой функции h алгебры A определим некоторые элементы поля F. Возьмем конкретные элементы x,y множества X, причем $x \leqslant y$. Для элементов $s,t \in X$ с условием $x \leqslant s \leqslant t \leqslant y$ положим

$$\alpha_{xy}(s,t) = h^{-1}(x,s) \cdot h(t,y). \tag{1}$$

Лемма 6.2. *Справедливы записанные ниже утверждения.*

1. *Для элементов* $x,s,r,t,y \in X$ *с условием* $x \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant y$ *верно равенство*

$$\alpha_{xy}(s,t) = \alpha_{xr}(s,r) \cdot \alpha_{ry}(r,t).$$

2. *Пусть даны* $x,p,q,u,v,y \in X$ *с условием* $x \leqslant p \leqslant q < u \leqslant v \leqslant y$. *Тогда сумма* $\sum\limits_{q \leqslant z \leqslant u} \alpha_{xz}(p,q) \cdot \alpha_{zy}(u,v)$ *равна нулю.*

3. *Справедливы равенства*

$$\alpha_{xx}(x,x) = 1, \quad \sum_{x \leqslant s \leqslant y} \alpha_{xy}(s,s) = 0 \quad \textit{при} \quad x < y.$$

Доказательство. 1. Согласно формуле (1) имеем

$$\alpha_{xr}(s,r) \cdot \alpha_{ry}(r,t) = h^{-1}(x,s)h(r,r)h^{-1}(r,r) \cdot h(t,y).$$

Осталось заметить, что $h(r,r)\cdot h^{-1}(r,r)=1$.

2. Можно записать равенства

$$\sum_{q\leqslant z\leqslant u}\alpha_{xz}(p,q)\cdot\alpha_{zy}(u,v)=\sum_{q\leqslant z\leqslant u}h^{-1}(x,p)\cdot h(q,z)\cdot h^{-1}(z,u)\cdot h(v,y)=$$
$$=h^{-1}(x,p)\cdot h(v,y)\left(\sum_{q\leqslant z\leqslant u}h(q,z)\cdot h^{-1}(z,u)\right)=$$
$$=h^{-1}(x,p)\cdot h(v,y)\cdot hh^{-1}(q,u)=h^{-1}(x,p)\cdot h(v,y)\cdot 1_A(q,u)=0$$

(здесь 1_A – тождественное отображение алгебры A).

Равенства из утверждения 3 проверяются непосредственно. ■

По-прежнему, h – некоторая обратимая функция в A. Зададим линейное отображение ν пространства C, полагая для любого его базисного вектора $[x,y]$:

$$\nu([x,y])=\sum_{x\leqslant s\leqslant t\leqslant y}\alpha_{xy}(s,t)[s,t]=\sum_{x\leqslant s\leqslant t\leqslant y}h^{-1}(x,s)[s,t]h(t,y). \tag{2}$$

Обозначим через μ внутренний автоморфизм алгебры A, определяемый её обратимым элементом h.

Предложение 6.3. *Отображение ν является внутренним автоморфизмом коалгебры C. Кроме того, верно равенство $\Theta(\nu)=\mu$.*

Доказательство. Проверим справедливость равенства $\Delta\nu=(\nu\otimes\nu)\Delta$, где, как и раньше, Δ – коумножение в C.

Возьмем произвольный интервал $[x,y]$. Вычисляя, приходим к равенствам

$$\Delta\nu([x,y])=\sum_{x\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant y}\alpha_{xy}(s,t)([s,r]\otimes[r,t]), \tag{3}$$

$$(\nu\otimes\nu)\Delta([x,y])=\sum_{x\leqslant p\leqslant q\leqslant z\leqslant u\leqslant v\leqslant y}\alpha_{xz}(p,q)\alpha_{zy}(u,v)([p,q]\otimes[u,v]). \tag{4}$$

Нужно убедиться в совпадении коэффициентов при одинаковых базисных векторах пространства $C\otimes C$, присутствующих в правых частях равенств (3) и (4).

Между слагаемыми в (3) и слагаемыми в (4), для которых $q=z=u$, имеется взаимно однозначное соответствие. Конкретному слагаемому $\alpha_{xy}(s,t)([s,r]\otimes[r,t])$ в (3) соответствует слагаемое $\alpha_{xr}(s,r)\alpha_{ry}(r,t)([s,r]\otimes[r,t])$ в (4). Ввиду леммы 6.2 $\alpha_{xy}(s,t)=\alpha_{xr}(s,r)\alpha_{ry}(r,t)$.

Теперь покажем, что сумма всех слагаемых в (4) с условием $q<u$, равна нулю. Для этого данную сумму мы разобьем на сумму определенных слагаемых. И затем будет нетрудно заметить, что все подобные слагаемые равны нулю.

Возьмем какой-нибудь базисный вектор $[p,q]\otimes[u,v]$, для которого $q<u$. Слагаемых с данным базисным вектором имеется несколько за счет того, что z принимает значения из интервала $[q,u]$. Коэффициент при выбранном векторе равен $\sum_{q\leqslant z\leqslant u}\alpha_{xz}(p,q)\alpha_{zy}(u,v)$. Последнее выражение равно нулю по лемме 6.2. Равенство $\Delta\nu=(\nu\otimes\nu)\Delta$ установлено.

Еще требует проверки равенство $\varepsilon\nu=\varepsilon$. Пусть $[x,y]$ – произвольный базисный вектор коалгебры C. Если $x=y$, то $\varepsilon([x,x])=1$ и $\nu([x,x])=\alpha_{xx}(x,x)[x,x]$, где $\alpha_{xx}(x,x)=1$ по лемме 6.2.

Если $x<y$, то $\varepsilon([x,y])=0$. По лемме 6.2 имеем $\sum_{x\leqslant s\leqslant y}\alpha_{xy}(s,s)=0$. С учетом равенства (2) отсюда все получается.

Остается проверить, что ν – биекция. Сначала убедимся в справедливости равенства $\Theta(\nu)=\mu$. Потом будет легко установить биективность ν.

Пусть $f\in A$ и $x,y\in X$ $(x\leqslant y)$. На основании предложения 3.1 имеем равенство

$$((\Theta(\nu))(f))(x,y)=\sum_{x\leqslant s\leqslant t\leqslant y}\alpha_{xy}(s,t)f(s,t).$$

Запишем также равенство $(\mu(f))(x,y)=h^{-1}fh(x,y)$ и проведем некоторые вычисления:

$$h^{-1}fh(x,y)=\sum_{x\leqslant t\leqslant y}(h^{-1}f)(x,t)\cdot h(t,y)=\sum_{x\leqslant t\leqslant y}\left(\sum_{x\leqslant s\leqslant t}h^{-1}(x,s)f(s,t)\right)\cdot h(t,y)=$$
$$=\sum_{x\leqslant s\leqslant t\leqslant y}h^{-1}(x,s)\cdot h(t,y)\cdot f(s,t)=\sum_{x\leqslant s\leqslant t\leqslant y}\alpha_{xy}(s,t)f(s,t).$$

Равенство $\Theta(\nu)=\mu$ действительно имеет место.

Аналогично (1) положим
$$\beta_{xy}(s,t) = h^{-1}(t,y)h(x,s).$$
После чего определим линейное отображение $\varkappa\colon C \to C$ посредством равенства
$$\varkappa([x,y]) = \sum_{x\leqslant s\leqslant t\leqslant y} \beta_{xy}(s,t)[s,t].$$
Как и для ν можно проверить, что $\varkappa$ – гомоморфизм коалгебр и $\Theta(\varkappa) = \mu^{-1}$. Теперь из равенств $\Theta(\nu\varkappa) = 1 = \Theta(\varkappa\nu)$ заключаем, что $\nu\varkappa = 1 = \varkappa\nu$ и ν, $\varkappa$ – взаимно обратные изоморфизмы. Последние равенства также проверяются прямыми вычислениями.

Итак, ν – внутренний автоморфизм коалгебры C и $\Theta(\nu) = \mu$. Доказательство предложения завершено. ■

Можно сделать вывод, что все внутренние автоморфизмы коалгебры C могут быть получены исходя из обратимых элементов алгебры A с помощью формул (1) и (2). Следующее утверждение придает точный смысл последней фразе.

Следствие 6.4. *Ограничение отображения Θ на $\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,C)$ является антиизоморфизмом между группами $\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,C)$ и $\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,A)$.*

Положим $\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,C) = \Theta^{-1}(\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,A))$, $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,C) = \Theta^{-1}(\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,A))$. Перед определением 4.2 записано полупрямое разложение $\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,A) = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,A) \rtimes \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,A)$. Принимая теперь во внимание следствие 6.4, запишем такой факт.

Следствие 6.5. *Справедливо полупрямое разложение групп*
$$\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,C) = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,C) \rtimes \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,C).$$

7. Строение группы Aut *C*. У нас есть теорема 4.4 о строении группы $\mathrm{Aut}\,(I(X,F))$, а также предложения 5.2, 5.3 и следствия 6.4, 6.5. Они позволяют сформулировать главный результат разделов 5–7. Заметим, что обозначение $\mathrm{Aut}_C X$ появилось перед предложением 5.3.

Теорема 7.1. *Пусть A – алгебра инцидентности $I(X,F)$ и C – коалгебра инцидентности $\mathrm{Co}\,(X,F)$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Имеют место равенства*
$$\mathrm{Aut}\,C = (\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\,C)\cdot \mathrm{Mult}\,C) \rtimes \mathrm{Aut}_C X = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,C) \rtimes \mathrm{Mult}\,C \rtimes \mathrm{Aut}_C X.$$
2. *Группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,C$ и $\mathrm{Aut}\,A$ антиизоморфны. Антиизоморфизм получается, например, с помощью отображения Θ.*

Доказательство. 1. Возьмем произвольный автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\,C$. Тогда $\Theta(\varphi) \in \mathrm{Aut}\,A$ (см. лемму 5.1 и начало раздела 5). По теореме 4.4 имеем равенство $\Theta(\varphi) = \mu\psi\tau$, где $\mu \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,A)$, $\psi \in \mathrm{Mult}\,A$, $\tau \in \mathrm{Aut}_A X$. Теперь на основании предложений 5.2, 5.3 и следствия 6.4 можем записать
$$\Theta(\nu) = \mu,\ \Theta(\lambda) = \psi,\ \Theta(\sigma) = \tau,$$
где $\nu \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,C)$, $\lambda \in \mathrm{Mult}\,C$, $\sigma \in \mathrm{Aut}_C X$. Откуда $\Theta(\sigma\lambda\nu) = \Theta(\nu)\Theta(\lambda)\Theta(\sigma)$. Следовательно, $\varphi = \sigma\lambda\nu$ или $\varphi = \nu'\lambda'\sigma$ для некоторых $\nu' \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,C)$, $\lambda' \in \mathrm{Mult}\,C$. Утверждение 1 доказано. Одновременно фактически доказано утверждение 2. ■

8. О пространстве Der (*I*(*X*, *F*)). Изложим основные факты о пространстве дифференцирований $\mathrm{Der}\,(I(X,F))$ алгебры инцидентности $I(X,F)$. Последнюю алгебру по-прежнему обозначаем буквой A.

Сформулируем несколько известных определений.

Пусть R – алгебра над некоторым коммутативным кольцом T. Отображение $d\colon R \to R$ называется дифференцированием алгебры R, если d – эндоморфизм T-модуля R, и выполняется равенство $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ для каждых $a, b \in R$. Все дифференцирования алгебры R образуют T-модуль. Обозначим его через $\mathrm{Der}\,R$.

Для элемента $c \in R$ определим отображение d_c из R в R, считая, что $d_c(a) = ac - ca$, $a \in R$. Тогда d_c – дифференцирование, называемое внутренним. Говорят, что d_c определяется элементом c. Внутренние дифференцирования алгебры R образуют подмодуль T-модуля $\mathrm{Der}\,R$. Для его обозначения используем символ $\mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\,R)$.

Есть понятие дифференцирования в более общей форме. Пусть N – R-R-бимодуль. Дифференцированием алгебры R со значениями в бимодуле N называется гомоморфизм T-модулей $d\colon R \to N$, удовлетворяющий равенству $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ для всех $a, b \in R$. Такое дифференцирование называется внутренним, если найдется элемент $c \in N$ со свойством $d(a) = ac - ca$, $a \in R$.

Будем использовать материал и обозначения, содержащиеся в начале раздела 4. Так, окажется полезным расщепляющееся расширение $A = L_1 \oplus M_1$.

Возьмем произвольное дифференцирование d алгебры A. Как и в случае автоморфизмов, дифференцированию d можно сопоставить матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ относительно прямого разложения $A = L_1 \oplus M_1$. И что важно, $\gamma = 0$ согласно [13, лемма 14.1]. Справедливо следующее утверждение [13, следствия 14.3, 15.4].

Следствие 8.1.

1. *Всякое дифференцирование d алгебры инцидентности A имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$. Здесь α – дифференцирование алгебры L_1, β – дифференцирование алгебры M_1 (как неунитальной алгебры), δ – дифференцирование алгебры L_1 со значениями в L_1-L_1-бимодуле M_1.*

2. *Если $\delta = 0$, то дополнительно выполняются равенства*

$$\beta(ad) = \alpha(a)d + a\beta(d), \quad \beta(cb) = \beta(c)b + c\alpha(b)$$

для всех $a, b \in L_1$ и $c, d \in M_1$.

Обозначим через $\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\, A)$ (соответственно, $\mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\, A)$) подпространство внутренних дифференцирований алгебры A, определяемых элементами из L_1 (соответственно, из M_1).

Лемма 8.2 [13, лемма 15.1]. *Имеет место прямое разложение пространств*

$$\mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, A) = \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\, A) \oplus \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\, A).$$

Пусть символ $\mathrm{Add}\, A$ обозначает подпространство в $\mathrm{Der}\, A$, состоящее из дифференцирований вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Такие дифференцирования называются аддитивными. Подобно мультипликативным автоморфизмам их можно еще определить, исходя из определенных систем элементов поля F (см. [13]).

Определение 8.3. *Назовем аддитивной системой такую систему элементов $\{c_{xy} \in F \,|\, x < y\}$, что верно равенство $c_{xy} = c_{xz} + c_{zy}$ для любых $x, z, y \in X$ с условием $x < z < y$.*

Если $d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Add}\, A$, то для каждых $x, y \in X$ с условием $x < y$ существует элемент $c_{xy} \in F$, для которого $\beta(b) = c_{xy}b$, где b – произвольный элемент из M_{xy}. При этом система элементов $\{c_{xy} \,|\, x < y\}$ является аддитивной. Здесь нужно учесть, что в силу следствия 8.1 β является дифференцированием алгебры M_1 и эндоморфизмом L_1-L_1-бимодуля M_1.

Получается, что данному аддитивному дифференцированию d можно поставить в соответствие аддитивную систему элементов c_{xy} $(x, y \in X,\ x < y)$ поля F. И обратно, всякая аддитивная система элементов $\{c_{xy} \in F \,|\, x < y\}$ приводит к аддитивному дифференцированию. Более точно, если $g = (g_{xy}) \in M_1$, то надо положить $d(g) = (c_{xy}g_{xy})$ и $d(f) = 0$ для $f \in L_1$.

На основании изложенного запишем такое утверждение.

Предложение 8.4. *Существует взаимно однозначное соответствие между аддитивными дифференцированиями алгебры A и аддитивными системами элементов поля F.*

В конце раздела запишем теорему, раскрывающую строение пространства $\mathrm{Der}\, A$.

Теорема 8.5. *Справедливо равенство* $\mathrm{Der}\, A = \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\, A) \oplus \mathrm{Add}\, A$.

9. Пространство дифференцирований Der *C*. Пусть теперь C – произвольная коалгебра (C, Δ, ε).

Определение 9.1. *Линейное отображение $d\colon C \to C$ называется дифференцированием коалгебры C, если выполняется равенство $\Delta d = (d \otimes 1)\Delta + (1 \otimes d)\Delta$.*

Все дифференцирования коалгебры C образуют F-пространство. Будем называть его пространством дифференцирований коалгебры C. Фиксируем для его обозначения символ $\mathrm{Der}\, C$.

Как и в случае леммы 5.1, мы опустим доказательство следующей леммы.

Лемма 9.2. *Если $d \in \mathrm{Der}\, C$, то $d^* \in \mathrm{Der}\, C^*$.*

Начиная с этого места и до конца статьи *C* – вновь коалгебра инцидентности Co (*X*, *F*).

Из леммы 9.2 вытекает наличие групповых мономорфизмов $\Gamma\colon \mathrm{Der}\, C \to \mathrm{Der}\, C^*$, $d \to d^*$, $\Theta\colon \mathrm{Der}\, C \to \mathrm{Der}\, A$, где A – алгебра инцидентности $I(X, F)$. Здесь нужно еще учесть, что изоморфизм Φ^* отображает $\mathrm{Der}\, C^*$ на $\mathrm{Der}\, A$ (отображение Γ появилось в конце раздела 2, а Φ^* и Θ – в начале раздела 3). Теорема 11.1 фактически утверждает, что в действительности Γ и Θ являются изоморфизмами.

В предыдущем разделе были определены аддитивные дифференцирования и соответствующие им аддитивные системы элементов (см. предложение 8.4). Сейчас проведем аналогичные рассмотрения относительно коалгебры C.

Пусть дана аддитивная система элементов $\{c_{xy} \in F \,|\, x < y\}$ (см. определение 8.3). Определим отображение $\lambda\colon C \to C$, полагая $\lambda([x, y]) = c_{xy}[x, y]$ для любого базисного вектора $[x, y]$ пространства C с условием $x < y$, и $\lambda([x, x]) = 0$ для любого x. Тогда λ – дифференцирование коалгебры C. Назовем его аддитивным дифференцированием, соответствующим аддитивной системе $\{c_{xy} \in F \,|\, x < y\}$.

Все аддитивные дифференцирования образуют пространство, которое мы обозначим через $\mathrm{Add}\, C$.

Предложение 9.3. *Пространства* $\mathrm{Add}\, A$ *и* $\mathrm{Add}\, C$ *изоморфны. Отображение* Θ *является изоморфизмом этих пространств.*

Доказательство. Можно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства предложения 5.2. ■

10. Внутренние дифференцирования коалгебры Co (X, F). Введем понятие внутреннего дифференцирования коалгебры инцидентности $C = \mathrm{Co}\,(X, F)$. Следующее определение имеет смысл и для произвольной коалгебры.

Определение 10.1. *Дифференцирование v коалгебры C назовем внутренним, если v^* – внутреннее дифференцирование двойственной алгебры C^*.*

Все внутренние дифференцирования коалгебры C образуют подпространство, которое мы обозначим через $\mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, C)$.

Пусть $v \in \mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, C)$. Несложно убедиться, что в таком случае $\Phi^*(v^*) \in \mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, A)$. Поэтому мы располагаем изоморфным вложением пространств

$$\Theta\colon \mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, C) \to \mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, A).$$

Цель дальнейших рассмотрений показать, что эти пространства изоморфны. И таким образом можно будет утверждать, что дифференцирование v коалгебры C является внутренним в точности тогда, когда $\Theta(v)$ – внутреннее дифференцирование алгебры A.

Пусть g – некоторая функция из кольца A и μ – внутреннее дифференцирование, определяемое этой функцией.

Для любых $x, y \in X$ $(x \leqslant y)$ положим

$$v([x, y]) = \sum_{x \leqslant u \leqslant y} [x, u] g(u, y) - \sum_{x \leqslant v \leqslant y} g(x, v)[v, y]. \tag{5}$$

Получили линейное отображение v пространства C.

Предложение 10.2. *Отображение v является дифференцированием коалгебры C. Кроме того, $\Theta(v) = \mu$.*

Доказательство. Требуется проверить, что верно равенство $\Delta v = (v \otimes 1)\Delta + (1 \otimes v)\Delta$.

Возьмем произвольный базисный вектор $[x, y]$ пространства C. Вычисляя, находим, что имеют место равенства

$$\Delta v([x, y]) = \sum_{x \leqslant s \leqslant u \leqslant y} g(u, y)([x, s] \otimes [s, u]) - \sum_{x \leqslant v \leqslant t \leqslant y} g(x, v)([v, t] \otimes [t, y]), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} ((v \otimes 1)\Delta + (1 \otimes v)\Delta)([x, y]) = \\ = \left[\sum_{x \leqslant v \leqslant p \leqslant y} g(p, y)([x, v] \otimes [v, p]) - \sum_{x \leqslant \ell \leqslant z \leqslant y} g(x, \ell)([\ell, z] \otimes [z, y]) \right] + \\ + \left[\sum_{x \leqslant k \leqslant z \leqslant y} g(k, z)([x, k] \otimes [z, y]) - \sum_{x \leqslant v \leqslant q \leqslant y} g(v, q)([x, v] \otimes [q, y]) \right]. \end{gathered} \tag{7}$$

Выражение в первой паре квадратных скобок в (7) совпадает с правой частью равенства (6), а выражение во второй паре квадратных скобок равно нулю.

Почему $\Theta(v) = \mu$? Пусть $f \in A$, x, y – элементы из X с условием $x \leqslant y$. На основании предложения 3.1 получаем из (5) равенство

$$((\Theta(v))(f))(x, y) = \sum_{x \leqslant u \leqslant y} g(u, y) f(x, u) - \sum_{x \leqslant v \leqslant y} g(x, v) f(v, y).$$

Его правая часть совпадает с правой частью равенства $(\mu(f))(x, y) = (fg - gf)(x, y)$. ■

Опираясь на предложения 9.3 и 10.2, можем записать следующий результат.

Следствие 10.3. *Существует групповой изоморфизм* $\Theta\colon \mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, C) \to \mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, A)$.

Получается, что любое внутреннее дифференцирование коалгебры C имеет вид, указанный в (5).

Перед следствием 6.5 были определены подгруппы внутренних автоморфизмов $\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\, C)$ и $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\, C)$. Похожим образом можно ввести подпространства внутренних дифференцирований $\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\, C)$ и $\mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\, C)$ коалгебры C. И тогда из леммы 8.2 и следствия 10.3 выводится такое утверждение.

Следствие 10.4. *Справедливо прямое разложение F-пространств*

$$\mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, C) = \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\, C) \oplus \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\, C).$$

11. Описание пространства дифференцирований Der C. Запишем теорему, содержащую полную информацию о строении пространства дифференцирований коалгебры C.

Теорема 11.1. *Пусть A – алгебра инцидентности $I(X, F)$ и C – коалгебра инцидентности* $\mathrm{Co}\,(X, F)$.

1. *Имеют место равенства* $\mathrm{Der}\, C = \mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\, C) + \mathrm{Add}\, C = \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\, C) \oplus \mathrm{Add}\, C$.

2. *Пространства дифференцирований* $\mathrm{Der}\, C$ *и* $\mathrm{Der}\, A$ *изоморфны.*

Доказательство. 1. Возьмем произвольное дифференцирование d коалгебры C. Тогда $\Theta(d) \in \mathrm{Der}\, A$; см. лемму 9.2 и текст после её доказательства. И можно записать $\Theta(d) = \mu + \psi$, где $\mu \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\, A)$, $\psi \in \mathrm{Add}\, A$ (теорема 8.5). Ввиду следствия 10.3 и предложения 9.3 найдутся дифференцирования $\nu \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\, C)$ и $\lambda \in \mathrm{Add}\, C$, для которых $\Theta(\nu) = \mu$ и $\Theta(\lambda) = \psi$. Откуда $\Theta(\nu + \lambda) = \mu + \psi = \Theta(d)$ и, значит, $d = \nu + \lambda$.

2. Искомым изоморфизмом служит Θ. Это видно из пункта 1 доказательства, а также из предложения 9.3 и следствия 10.3. ■

Открытые вопросы.

1. Можно ли определить в каком-то смысле внутренний автоморфизм произвольной коалгебры C (в частности, коалгебры инцидентности C) в терминах самой коалгебры, т. е. без обращения к двойственной алгебре C^*?

2. Аналогичный вопрос имеет смысл и относительно внутреннего дифференцирования коалгебры C (см. определения 6.1 и 10.1).

12. Заключение. В данной статье найдено строение группы автоморфизмов и пространства дифференцирований коалгебры инцидентности $\mathrm{Co}\,(X, F)$, где X – произвольное частично упорядоченное множество и F – некоторое поле. Также установлены связи указанных группы и пространства с группой автоморфизмов и пространством дифференцирований алгебры инцидентности $I(X, F)$.

Все это можно применять при исследовании автоморфизмов и дифференцирований различных обобщений коалгебр инцидентности и близких к ним объектов.

Так, более широкий класс по сравнению с коалгебрами инцидентности образуют редуцированные коалгебры инцидентности. Конкретная такая коалгебра – это некоторая факторкоалгебра коалгебры инцидентности. Она определяется с помощью некоторого отношения эквивалентности на множестве всех интервалов частично упорядоченного множества X. Равенства в конце раздела 2 фактически индуцируют отображения коумножения и коединицы редуцированной коалгебры инцидентности.

Как известно, биалгебры и, в частности, алгебры Хопфа являются прежде всего коалгебрами. Теория коалгебр, биалгебр и алгебр Хопфа инцидентности изложена в книге [1]. Нахождение строения групп автоморфизмов и пространств дифференцирований редуцированных коалгебр, биалгебр и алгебр Хопфа инцидентности кажется весьма важной и перспективной задачей.

Список литературы

1. Spiegel E., O'Donnell C.J. Incidence Algebras. New York: Marcel Dekker; 1997. 335 p. https://doi.org/10.1017/S00130915000-20368
2. Aquiar M., Santos W.F. Galois connections for incidence Hopf algebras of partially ordered sets. *Advances in Mathematics.* 2000;151(1):71–100. https://doi.org/10.1006/aima.1999.1864
3. Schmitt W.R. Incidence Hopf algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra.* 1994;96(3):299–330. https://doi.org/10.1016/0022-4049(94)90105-8
4. Drozd Y., Kolesnik P. Automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra.* 2007;35(12):3851–3854. https://doi.org/10.1080/00927870701511756
5. Brusamarello R., Lewis D.W. Automorphisms and involutions on incidence algebras. *Linear and Multilinear Algebra.* 2011;59(11):1247–1267. https://doi.org/10.1080/03081087.2010.496113
6. Fornaroli É.Z., Pezzott R.E.M. Classification of involutions on finitary incidence algebras of non-connected posets. *arXiv:2209.09690.* 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.09690
7. Khrypchenko M. Automorphisms of finitary incidence rings. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2010;9(2):78–97.
8. Brusamarello R., Fornaroli É.Z., Santulo E.A. Jr. Multiplicative automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra.* 2015;43(2):726–736. https://doi.org/10.1080/00927872.2013.847951
9. Fornaroli É.Z., Pezzott R.E.M. Additive derivations of incidence algebras. *Communications in Algebra.* 2021;49(4):1816–1828. http://doi.org/10.1080/00927872.2020.1854775
10. Kaygorodov I., Khrypchenko M., Wei F. Higher Derivations of Finitary Incidence Algebras. *Algebras and Representation Theory.* 2019;22:1331–1341. https://doi.org/10.1007/s10468-018-9822-4
11. Khrypchenko M. Derivations of Finitary Incidence Rings. *Communications in Algebra.* 2012;40(7):2503–2522. http://doi.org/10.1080/00927872.2011.580441
12. Khrypchenko M. Isomorphisms and derivations of partial flag incidence algebras. *International Journal of Algebra and Computation.* 2022;32(1):193–209. https://doi.org/10.1142/S0218196722500084
13. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence Rings: Automorphisms and Derivations. *arXiv:2305.02984.* 2023. https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.02984
14. Xiao Z. Jordan derivations of incidence algebras. *Rocky Mountain Journal of Mathematics.* 2015;45(4):1357–1368. http://doi.org/10.1216/RMJ-2015-45-4-1357

15. Yang Y., Wei F. Nonlinear Lie-Type derivations of finitary incidence algebras and related topics. *arXiv:2105.10685.* 2021. https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.10685
16. Leroux P., Sarraillé J. Structure of incidence algebras of graphs. *Communications in Algebra.* 1981;9(15):1479–1517.
17. Tapkin D.T. Isomorphisms of formal matrix incidence rings. *Russian Mathematics.* 2017;61:73–79. https://doi.org/10.3103/S1066369X1712009X
18. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence Coalgebras: Automorphisms and Derivations. *arXiv:2312.05504.* 2023. https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.05504
19. Krylov P., Tuganbaev A. Formal Matrices. Berlin: Springer-Verlag; 2017. 156 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-53907-2

References

1. Spiegel E., O'Donnell CJ. Incidence Algebras. New York: Marcel Dekker; 1997. 335 p. https://doi.org/10.1017/S00130915000-20368
2. Aquiar M., Santos WF. Galois connections for incidence Hopf algebras of partially ordered sets. *Advances in Mathematics.* 2000;151(1):71–100. https://doi.org/10.1006/aima.1999.1864
3. Schmitt WR. Incidence Hopf algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra.* 1994;96(3):299–330. https://doi.org/10.1016/0022-4049(94)90105-8
4. Drozd Y., Kolesnik P. Automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra.* 2007;35(12):3851–3854. https://doi.org/10.1080/00927870701511756
5. Brusamarello R., Lewis DW. Automorphisms and involutions on incidence algebras. *Linear and Multilinear Algebra.* 2011;59(11):1247–1267. https://doi.org/10.1080/03081087.2010.496113
6. Fornaroli ÉZ., Pezzott REM. Classification of involutions on finitary incidence algebras of non-connected posets. *arXiv:2209.09690.* 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.09690
7. Khrypchenko M. Automorphisms of finitary incidence rings. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2010;9(2):78–97.
8. Brusamarello R., Fornaroli ÉZ., Santulo EA. Jr. Multiplicative automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra.* 2015;43(2):726–736. https://doi.org/10.1080/00927872.2013.847951
9. Fornaroli ÉZ., Pezzott REM. Additive derivations of incidence algebras. *Communications in Algebra.* 2021;49(4):1816–1828. http://doi.org/10.1080/00927872.2020.1854775
10. Kaygorodov I., Khrypchenko M., Wei F. Higher Derivations of Finitary Incidence Algebras. *Algebras and Representation Theory.* 2019;22:1331–1341. https://doi.org/10.1007/s10468-018-9822-4
11. Khrypchenko M. Derivations of Finitary Incidence Rings. *Communications in Algebra.* 2012;40(7):2503–2522. http://doi.org/10.1080/00927872.2011.580441
12. Khrypchenko M. Isomorphisms and derivations of partial flag incidence algebras. *International Journal of Algebra and Computation.* 2022;32(1):193–209. https://doi.org/10.1142/S0218196722500084
13. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence Rings: Automorphisms and Derivations. *arXiv:2305.02984.* 2023. https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.02984
14. Xiao Z. Jordan derivations of incidence algebras. *Rocky Mountain Journal of Mathematics.* 2015;45(4):1357–1368. http://doi.org/10.1216/RMJ-2015-45-4-1357
15. Yang Y., Wei F. Nonlinear Lie-Type derivations of finitary incidence algebras and related topics. *arXiv:2105.10685.* 2021. https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.10685
16. Leroux P., Sarraillé J. Structure of incidence algebras of graphs. *Communications in Algebra.* 1981;9(15):1479–1517.
17. Tapkin DT. Isomorphisms of formal matrix incidence rings. *Russian Mathematics.* 2017;61:73–79. https://doi.org/10.3103/S1066369X1712009X
18. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence Coalgebras: Automorphisms and Derivations. *arXiv:2312.05504.* 2023. https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.05504
19. Krylov P., Tuganbaev A. Formal Matrices. Berlin: Springer-Verlag; 2017. 156 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-53907-2

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.09.2024 — Received September 15, 2024
Поступила после рецензирования 01.11.2024 — Revised November 1, 2024
Принята к публикации 07.11.2024 — Accepted November 7, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кайгородов Евгений Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, Горно-Алтайский государственный университет, г. Горно-Алтайск, Россия

Крылов Петр Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры, Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Туганбаев Аскар Аканович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Evgeniy V. Kaigorodov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia

Piotr A. Krylov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor f the Department of Algebra, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia

Askar A. Tuganbaev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

К содержанию