Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 3. С. 198–207.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 3. P. 198–207.

УДК 517.927 DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-198-207
MSC 34L15, 34C10, 34B24
Оригинальное исследование

О нижней границе для минимального собственного значения оператора четвёртого порядка на графе

Уртаева А. А.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии О. М. Пенкиным*)

Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44-46
urtaeva-96@mail.ru

Аннотация. Данная статья посвящена получению нижних границ для минимального собственного значения дифференциального оператора четвертого порядка на метрическом графе, возникающего при моделировании плоских стержневых систем. На этом пути устанавливается аналог тождества Пиконе для уравнения четвертого порядка на сети. В качестве применения такого тождества получена теорема сравнения штурмовского типа для уравнения четвертого порядка на графе.

Ключевые слова: собственное значение, квантовый граф, уравнение на графе, уравнение четвертого порядка

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2024-1447.

Для цитирования: Уртаева А. А. 2024. О нижней границе для минимального собственного значения оператора четвёртого порядка на графе. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 198–207.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-198-207

Original Research

On the Lower Bound for the Minimum Eigenvalue of a Fourth-Order Operator on a Graph

Aleksandra A. Urtaeva
(*Article submitted by a member of the editorial board O. M. Penkin)*

North Ossetian State University after K. L. Khetagurova,
44-46 Vatutina St., Vladikavkaz, 362025, Russia
urtaeva-96@mail.ru

Abstract. In this article we obtain lower bounds for the minimum eigenvalue of a fourth-order differential operator on a metric graph, which is a model of a planar system of thin rods. In this way,we establish an analogue of the Picone identity for a fourth-order equation on a network. As an application of this identity, we formulate Sturm type comparison theorem for a fourth-order equation on a graph.

Keywords: Eigenvalue, Quantum Graph, Network Equation, Fourth Order Equation

Acknowledgements: The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. Agreement no 075-02-2024-1447.

For citation: Urtaeva A. A. 2024. On the Lower Bound for the Minimum Eigenvalue of a Fourth-Order Operator on a Graph. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 198–207. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-198-207

1. Введение. В данной статье мы изучаем краевую задачу на собственные значения для дифференциального оператора L четвертого порядка на графе Γ, которая возникает при моделировании малых деформаций плоских стержневых систем:

$$Lu(x) = \lambda\rho(x)u, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Оператор L задаётся обыкновенными дифференциальными уравнениями на рёбрах графа Γ, а в узлах графа оператор L задаётся наборами условий согласования (см. раздел 2, условия (5)–(6)). При этом под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [1], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах.

К настоящему времени подробно изучен вопрос об асимптотике спектра краевых задач 2-го и 4-го порядка на графах [2, 3, 4, 5], получены оценки кратностей собственных значений оператора Штурма-Лиувилля [6] и оператора четвёртого порядка на графе [7]. В данной работе мы даем оценку снизу ведущего собственного значения краевой задачи четвёртого порядка.

Имеется несколько подходов к получению таких оценок. Наиболее общим является операторный подход, развитый в работах М.А. Красносельского и его учеников [8]. Основная идея этого подхода заключается в том, что оценка снизу ведущего собственного значения краевой задачи эквивалентна оценке спектрального радиуса интегрального оператора, обращающего краевую задачу. Ядром такого интегрального оператора является функция Грина соответствующей краевой задачи. И тот факт, что положительность функции Грина задачи на графе обеспечивают оператору хорошие знакорегулярные свойства [1, 9, 10, 11, 12, 13], даёт возможность применения теории операторов, действующих в пространствах с конусами, для получения оценки ведущего собственного значения. Однако, если найти явный вид функции Грина задачи на графе невозможно, то упомянутый выше операторный подход не может быть применен для наших целей.

Другой подход при получении оценок ведущего собственного значения краевой задачи для лапласиана с краевыми условиями Дирихле на графе основан на принципе Рэлея и методе перестановок–симметризаций [14]. При симметризации Шварца (при симметричной перестановке) неотрицательной функции из $H^1(\mathbb{R})$ норма ее градиента в $L^2(\mathbb{R})$ не возрастает. Вместе с принципом Рэлея этот факт позволил получить оценку первого собственного значения лапласиана, подчиненного условиям Дирихле.

В настоящей статье мы даем оценку минимального собственного значения краевой задачи дифференциального оператора четвертого порядка на графе Γ аналогичную оценке Д.Р. Даннингера для билапласиана [15] (см. также [16]). В доказательстве используется аналог тождества Пиконе [17, Глава X].

2. Постановка задачи. В данной работе мы используем терминологию и обозначения работ [9, 18]. На протяжении всей статьи $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ обозначает связный и конечный *геометрический граф* без петель, с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством точек ребер графа $E(\Gamma)$. *Ребро* графа – это интервал конечной длины, а *вершина* графа – это концевая точка одного или нескольких ребер. Ребра графа обозначаются γ_i, вершины обозначаются a, b и т. д. Для любой $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов ребер, инцидентных вершине a, и через $|I(a)|$ обозначим количество элементов множества $I(a)$. Элементы множеств $J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| \geq 2\}$ и $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| = 1\}$ называются *внутренними* и *граничными* вершинами соответственно. Мы считаем, что $\Gamma = E(\Gamma) \cup J(\Gamma)$ и $\partial\Gamma \neq \varnothing$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф.

Введем функциональные пространства:

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \to \mathbb{R} \,|\, u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\};$$
$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \to \mathbb{R} \,|\, u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Через u_i будем обозначать сужение функции $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) на соответствующее ребро γ_i. Для функции $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$), произвольной вершины $a \in V(\Gamma)$ и $i \in I(a)$ полагаем $u_i(a) := \lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$. Обратим внимание, что $u_k(a)$ не обязательно равны $u_i(a)$ или $u(a)$, где $k, i \in I(a)$ $(k \neq i)$. Пространство непрерывных функций определяется равенством $C(\Gamma) = \{u \in C[\Gamma] \,|\, u_i(a) = u(a)\ (\forall a \in J(\Gamma), \forall i \in I(a))\}$.

Теперь определим производную функции на графе. Для этого вводим параметризацию каждого ребра $\gamma = (a, b) \subset E(\Gamma)$, где $a, b \in V(\Gamma)$, и ставим в соответствие каждой точке $x \in \gamma$ координату $t \in (0, l) \subset \mathbb{R}$, определяемую соотношением $x = a + t(b-a)/l$, где l – длина соответствующего ребра γ. Производная функции $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) в точке $x \in \gamma$ определяется как $u'(x) := \frac{d}{dt} u\,(a + t(b-a)/l)$.

Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) мы обозначаем пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) в любой вершине $a \in V(\Gamma)$ определено множество производных $u_i^{(j)}(a)$, $1 \leq j \leq n$, вдоль ребер, смежных с a. Производные нечетного порядка зависят от ориентации ребер. Для четной производной ориентация не важна.

Под интегралом функции $u \in C[E(\Gamma)]$ понимаем сумму интегралов

$$\int\limits_{\Gamma} u(x)dx := \sum_{\gamma_i \subset E(\Gamma)} \int\limits_0^{l_i} u_i(x(t))dt.$$

В статье рассматривается уравнение четвертого порядка на геометрическом графе Γ, которое коротко можно записать в виде

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Gamma. \tag{3}$$

При этом под дифференциальным уравнением (3) мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u')' + r_i(x)u_i = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \tag{4}$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_i'(a) = 0, \quad i \in I(a), \tag{5}$$

$$\sum_{i\in I(a)} D^3 u_i(a) + r(a)u(a) = f(a), \tag{6}$$

где $D^3 u = (pu'')' - qu'$ – третья квазипроизводная функции u.

Уравнение (4)–(6) возникает при моделировании малых деформаций стержневой системы с условиями упруго-шарнирного соединения (см. [9], [19], [15], [20]). В этом случае равенства (4)–(6) можно трактовать следующим образом: $u(x)$ обозначает смещение балки при выходе из состояния равновесия; условия (5) описывают классические локальные условия в узлах графа – перемещения всех стержней системы являются непрерывными и имеется упруго-шарнирное сочленение в вершине a. Последнее условие – это условие динамического равновесия.

Решением дифференциального уравнения (3) будем называть всякую функцию $u \in C^4[\Gamma]$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (4), а в каждой внутренней вершине – условиям (5), (6).

Таким образом, дифференциальный оператор $L : D \to C[\Gamma]$ определяется соотношениями

$$D = \{u \in C^4[\Gamma] : \ u \text{ удовлетворяет (5) на } J(\Gamma)\},$$

$$Lu(x) \equiv \begin{cases} (p(x)u'')'' - (q(x)u')' + r(x)u, & x \in E(\Gamma), \\ \sum\limits_{i\in I(a)} D^3 u_i(a) + r(a)u(a), & a \in J(\Gamma). \end{cases} \tag{7}$$

На протяжении всей статьи мы считаем, что выполнены условия:

• $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf\limits_{x\in E(\Gamma)} p(x) > 0$, $q \in C^1[E(\Gamma)]$, $q \geqslant 0$ на $E(\Gamma)$, $r, \rho \in C[\Gamma]$, $r \geqslant 0$ на Γ, $\rho > 0$ на $E(\Gamma)$ и $\rho \geqslant 0$ на $J(\Gamma)$;

• в граничных условиях и условиях согласования в узловых вершинах графа все производные вычисляются в направлении «от вершины»;

• $\beta(a) \geqslant 0$, $\vartheta(a) \geqslant 0$ и $\beta(a) + \vartheta(a) > 0$ для любой $a \in \partial\Gamma$;

• $\beta_i(a)\vartheta_i(a) = 0$ и $\beta_i(a) + \vartheta_i(a) > 0$ для любой $a \in J(\Gamma)$ и любого индекса $i \in I(a)$, причём $\sum\limits_{i\in I(a)} \vartheta_i(a) > 0$;

• для любого ребра $\gamma_i = (a, b)$ по крайней мере одна из величин $\max\limits_{x\in\gamma_i} q(x)$, $\vartheta_i(a)$, $\vartheta_i(b)$ положительна.

Отметим, что серия условий на коэффициенты уравнения и граничных условий определяется физическим смыслом задачи (см., например, [1, Глава 8] или [18]). Что касается последних условий, то при их нарушении задача оказывается вырожденной. В этом случае спектр задачи (1), (2) из строго положительного становится неотрицательным: первое собственное значение оказывается равным нулю (см. [1, Глава 8]).

3. Тождество Пиконе. Рассмотрим оператор $L : D \to C[\Gamma]$, порожденный соотношениями (7) с коэффициентами $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $q \in C^1[E(\Gamma)]$, $r \in C[\Gamma]$. Вместе с оператором L мы будем рассматривать оператор $\mathcal{L} : D \to C[\Gamma]$, порождаемый теми же соотношениями с заменой коэффициентов p, q, r на $\mathcal{P} \in C^2[E(\Gamma)]$, $\mathcal{Q} \in C^1[E(\Gamma)]$ и $\mathcal{R} \in C[\Gamma]$ соответственно.

Теорема 3.1. *Пусть функции $u, v \in C^4[\Gamma]$ непрерывны на Γ. Если $u/v \in C(\Gamma)$, то*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Gamma \frac{u}{v}\,(vLu - u\mathcal{L}v)\,dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a)\,(v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) \\
&= \int\limits_\Gamma [(p-\mathcal{P})\,u''^2 + (q-\mathcal{Q})\,u'^2 + (r-\mathcal{R})u^2]dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) \\
&+ \int\limits_\Gamma \mathcal{P}\left(u'' - \frac{u}{v}v''\right)^2 dx - 2\int\limits_\Gamma \mathcal{P}\frac{v''}{v}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx + \int\limits_\Gamma \mathcal{Q}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx \\
&+ \sum_{a\in\partial\Gamma} \frac{u}{v}(a)\left[u(a)\mathcal{D}^3 v(a) - v(a)D^3 u(a)\right] \\
&+ \sum_{a\in\partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a) + \sum_{a\in\partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2}(a)(\mathcal{P}v'')(a)v'(a) - 2\sum_{a\in\partial\Gamma} \frac{u}{v}(a)u'(a)(\mathcal{P}v'')(a) \\
&+ \sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)} (p_i u_i'')(a)u_i'(a) + \sum_{a\in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v^2}(a)\sum_{i\in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')(a)v_i'(a) \\
&- 2\sum_{a\in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a)\sum_{i\in I(a)} u_i'(a)(\mathcal{P}_i v_i'')(a).
\end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям вдоль Γ произведение uLu. Имеем

$$\int\limits_\Gamma u\, Lu\, dx = \int\limits_\Gamma [pu''^2 + qu'^2 + ru^2]dx + \sum_{a\in\partial\Gamma}[u'(pu'') - u\, D^3u]_{x=a} + \sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)}[u_i'(p_iu_i'') - u_i\, D^3u_i]_{x=a}.$$

Поскольку функция u непрерывна в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$, то

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma u\, Lu\, dx = \int\limits_\Gamma [pu''^2 + qu'^2 + ru^2]dx + \sum_{a\in\partial\Gamma}u'(a)(pu'')(a) - \sum_{a\in\partial\Gamma}u(a)D^3u(a)\\ + \sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)}u_i'(a)(p_iu_i'')(a) - \sum_{a\in J(\Gamma)}u(a)\left[\sum_{i\in I(a)}D^3u_i(a) + r(a)u(a)\right] + \sum_{a\in J(\Gamma)}r(a)u^2(a).\end{gathered}\tag{9}$$

Аналогично, интегрируя дважды по частям произведение $\frac{u^2}{v}\mathcal{L}v$, получим

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma \frac{u^2}{v}\mathcal{L}v\, dx = \int\limits_\Gamma \left[\mathcal{P}v''\left(\frac{u^2}{v}\right)'' + \mathcal{Q}v'\left(\frac{u^2}{v}\right)' + \mathcal{R}u^2\right]dx\\ + \sum_{a\in\partial\Gamma}\left[\left(\frac{u^2}{v}\right)'(\mathcal{P}v'') - \frac{u^2}{v}\mathcal{D}^3v\right]_{x=a} + \sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)}\left[\left(\frac{u_i^2}{v_i}\right)'(\mathcal{P}_iv_i'') - \frac{u_i^2}{v_i}\mathcal{D}^3v_i\right]_{x=a}\\ = \int\limits_\Gamma \left[\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{Q}u'^2 + \mathcal{R}u^2\right]dx + \int\limits_\Gamma\left[\mathcal{P}v''\left(\frac{u^2}{v}\right)'' - \mathcal{P}u''^2\right]dx + \int\limits_\Gamma\left[\mathcal{Q}v'\left(\frac{u^2}{v}\right)' - \mathcal{Q}u'^2\right]dx\\ + \sum_{a\in\partial\Gamma}\left[\left(\frac{u^2}{v}\right)'(\mathcal{P}v'') - \frac{u^2}{v}\mathcal{D}^3v\right]_{x=a} + \sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)}\left[\left(\frac{u_i^2}{v_i}\right)'(\mathcal{P}_iv_i'') - \frac{u_i^2}{v_i}\mathcal{D}^3v_i\right]_{x=a}.\end{gathered}$$

Вычислим производные дроби u^2/v. Тогда правая часть последнего равенства примет вид

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma \left[\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{Q}u'^2 + \mathcal{R}u^2\right]dx - \int\limits_\Gamma \mathcal{P}\left(u'' - \frac{u}{v}v''\right)^2dx\\ +2\int\limits_\Gamma \mathcal{P}\frac{v''}{v}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2dx - \int\limits_\Gamma \mathcal{Q}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2dx\\ - \sum_{a\in\partial\Gamma}\frac{u^2}{v^2}(a)(\mathcal{P}v'')(a)v'(a) + 2\sum_{a\in\partial\Gamma}\frac{u}{v}(a)u'(a)(\mathcal{P}v'')(a) - \sum_{a\in\partial\Gamma}\frac{u^2}{v}(a)\mathcal{D}^3v(a)\\ - \sum_{a\in J(\Gamma)}\frac{u^2}{v^2}(a)\sum_{i\in I(a)}(\mathcal{P}_iv_i'')(a)v_i'(a) + 2\sum_{a\in J(\Gamma)}\frac{u}{v}(a)\sum_{i\in I(a)}u_i'(a)(\mathcal{P}_iv_i'')(a)\\ - \sum_{a\in J(\Gamma)}\frac{u^2}{v}(a)\left[\sum_{i\in I(a)}\mathcal{D}^3v_i(a) + \mathcal{R}(a)v(a)\right] + \sum_{a\in J(\Gamma)}\mathcal{R}(a)u^2(a).\end{gathered}\tag{10}$$

Теперь, составляя разность $\int\limits_\Gamma \frac{u}{v}\,(vLu - u\mathcal{L}v)\,dx$, и привлекая (9), (10) и (7), получим (8).

Следствие 3.1. *Пусть функция $u \in C^2[\Gamma]$ удовлетворяет условиям*

$$\begin{gathered}u_i(a) = u(a), \quad \forall a \in J(\Gamma),\ \forall i \in I(a);\\ u_i'(a) = 0,\ \text{если}\ \beta_i(a) = 0, \quad \forall a \in J(\Gamma),\ \forall i \in I(a).\end{gathered}\tag{11}$$

Если $v \in D$ и $u/v \in C(\Gamma)$, то

$$\begin{gathered}\mathcal{V}[u] := \int\limits_\Gamma [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{Q}u'^2 + \mathcal{R}u^2]dx + \sum_{a\in J(\Gamma)}\mathcal{R}(a)u^2(a)\\ = \int\limits_\Gamma \mathcal{P}\left(u'' - \frac{u}{v}v''\right)^2dx - 2\int\limits_\Gamma \mathcal{P}\frac{v''}{v}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2dx + \int\limits_\Gamma \mathcal{Q}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2dx\\ + \sum_{a\in\partial\Gamma}\frac{u^2}{v}(a)\mathcal{D}^3v(a) + \sum_{a\in\partial\Gamma}\frac{u^2}{v^2}(a)(\mathcal{P}v'')(a)v'(a) - 2\sum_{a\in\partial\Gamma}\frac{u}{v}(a)u'(a)(\mathcal{P}v'')(a)\\ + \int\limits_\Gamma \frac{u^2}{v}\mathcal{L}v dx + \sum_{a\in J(\Gamma)}\frac{u^2}{v}(a)\mathcal{L}v(a).\end{gathered}\tag{12}$$

Равенство (12) сразу следует из (8), (5) и условия $\beta_i(a)\vartheta_i(a) = 0$, выполненного для любых $a \in J(\Gamma)$ и $i \in I(a)$.

Следствие 3.2 (тождество Пиконе). *Если в условиях следствия 3.1 дополнительно предположить, что $u|_{\partial\Gamma} = 0$, то выполняется тождество*

$$\begin{gathered}\mathcal{V}[u] = \int\limits_\Gamma \mathcal{P}\left(u'' - \frac{u}{v}v''\right)^2 dx - 2\int\limits_\Gamma \mathcal{P}\frac{v''}{v}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx + \int\limits_\Gamma \mathcal{Q}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx \\ + \int\limits_\Gamma \frac{u^2}{v}\mathcal{L}v dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a)\mathcal{L}v(a).\end{gathered} \tag{13}$$

Следствие 3.3. *Пусть $u, v \in D$ и $u/v \in C(\Gamma)$. Тогда*

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma \frac{u}{v}\,(vLu - u\mathcal{L}v)\,dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a)\,(v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) \\ = \int\limits_\Gamma [(p-\mathcal{P})\,u''^2 + (q-\mathcal{Q})\,u'^2 + (r-\mathcal{R})u^2]dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) \\ + \int\limits_\Gamma \mathcal{P}\left(u'' - \frac{u}{v}v''\right)^2 dx - 2\int\limits_\Gamma \mathcal{P}\frac{v''}{v}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx + \int\limits_\Gamma \mathcal{Q}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx + \sum_{a\in\partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a).\end{gathered}$$

4. Теорема сравнения. Теоремы Штурма о перемежаемости и сравнении для уравнения второго порядка на графе впервые были установлены в работе Ю. В. Покорного и О. М. Пенкина [1]. В работах [15], [18] были доказаны аналоги теоремы Штурма о разделении нулей решений для уравнения четвёртого порядка на графе. В данном пункте, как первое следствие тождества Пиконе, мы приводим некоторые свойства дифференциальных неравенств и, в частности, теорему сравнения штурмовского типа для уравнения четвёртого порядка, заданного соотношениями (4)–(6).

Теорема 4.1. *Если существует нетривиальная функция $u \in D$, удовлетворяющая условиям*

$$\begin{gathered}u\,Lu \leqslant 0, \quad x \in \Gamma, \\ u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (u''u')|_{\partial\Gamma} \geqslant 0, \\ \mathcal{W}[u] := \int\limits_\Gamma [(p-\mathcal{P})\,u''^2 + (q-\mathcal{Q})\,u'^2 + (r-\mathcal{R})u^2]dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) \geqslant 0,\end{gathered}$$

то любое решение $v \in D$ системы неравенств

$$\begin{gathered}\mathcal{L}v(x) \geqslant 0, \quad x \in \Gamma, \\ v''(x) < 0, \quad x \in E(\Gamma),\end{gathered}$$

положительное хотя бы в одной точке графа Γ, имеет нуль в $\Gamma \cup \partial\Gamma$.

Доказательство. Действительно, если $v \neq 0$ в $\Gamma \cup \partial\Gamma$, то $v > 0$ на $\Gamma \cup \partial\Gamma$. Привлекая формулу (13), получим

$$\begin{gathered}0 \geqslant -\mathcal{W}[u] + \int\limits_\Gamma \frac{u}{v}\,(vLu - u\mathcal{L}v)\,dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a)\,(v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) \\ = \int\limits_\Gamma \mathcal{P}\left(u'' - \frac{u}{v}v''\right)^2 dx - 2\int\limits_\Gamma \mathcal{P}\frac{v''}{v}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx \\ + \int\limits_\Gamma \mathcal{Q}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx + \sum_{a\in\partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a) \geqslant 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Поскольку $(u''u')|_{\partial\Gamma} \geqslant 0$, то $(pu'')(a)u'(a) \geqslant 0$ для любой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$. Поэтому $u'' - \frac{u}{v}v'' \equiv 0$ и $u' - \frac{u}{v}v' \equiv 0$ на $E(\Gamma)$. Отсюда сразу получаем $u/v \equiv const$ на Γ. Но это противоречит равенствам $u|_{\partial\Gamma} = 0$ и $v|_{\partial\Gamma} > 0$. Теорема доказана.

Лемма 4.1. *Пусть нетривиальная функция $u \in C^2[\Gamma]$ удовлетворяет условиям* (11) *и*

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \qquad \mathcal{V}[u] \leqslant 0. \tag{15}$$

Тогда следующая система дифференциальных неравенств

$$\mathcal{L}v(x) \geqslant 0 \quad (x \in \Gamma), \quad v''(x) < 0 \quad (x \in E[\Gamma]), \quad v|_{\partial\Gamma} > 0 \tag{16}$$

не имеет решений в классе D.

Доказательство. Предполагая противное, рассмотрим решение $v \in D$ системы (16). Из непрерывности функции v и неравенств $v''(x) < 0$ на $x \in E[\Gamma]$, $v|_{\partial\Gamma} > 0$ следует $v > 0$ на Γ. Действительно, в противном случае v имеет точку неположительного глобального минимума $b \in J(\Gamma)$. Тогда из свойств коэффициентов условий (5) (см. конец раздела 2) следует, что для некоторого индекса $i_0 \in I(b)$ выполнено равенство $v'_{i_0}(b) = 0$, несовместимое с тем, что b – точка минимума и $v''_{i_0}(x) < 0$. Следовательно, $u/v \in C(\Gamma)$.

Подставляя функции u и v в тождество Пиконе, получим

$$0 \geqslant \mathcal{V}[u] = \int_\Gamma \mathcal{P}\left(u'' - \frac{u}{v}v''\right)^2 dx - 2\int_\Gamma \mathcal{P}\frac{v''}{v}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx$$
$$+ \int_\Gamma \mathcal{Q}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx + \int_\Gamma \frac{u^2}{v}\mathcal{L}v dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a)\mathcal{L}v(a) \geqslant 0.$$

Но тогда $u'' - \frac{u}{v}v'' \equiv 0$ и $u' - \frac{u}{v}v' \equiv 0$ на $E(\Gamma)$. Отсюда сразу получаем $u/v \equiv const$ на Γ. Но это невозможно ввиду условий леммы $u|_{\partial\Gamma} = 0$ и $v|_{\partial\Gamma} > 0$. Следовательно система (16) не разрешима в D. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Пусть существует нетривиальная функция* $u \in C^2[\Gamma]$, *удовлетворяющая условиям* (11) *и* (15). *Тогда любое решение* $v \in D$ *системы неравенств*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v(x) &\geqslant 0, \quad x \in \Gamma,\\ v''(x) &< 0, \quad x \in E(\Gamma), \end{aligned} \tag{17}$$

положительное хотя бы в одной точке графа Γ, *либо пропорциональна* u *на* Γ, *либо имеет нуль в* Γ.

Доказательство. Пусть $v \in D$ удовлетворяет (17) и положительна хотя бы в одной точке графа Γ. Если v равна нулю в некоторой точке графа Γ, то утверждение теоремы верно. Поэтому рассмотрим случай, когда v не имеет нулей в Γ. В этом случае $v|_{\partial\Gamma} \geq 0$ и из леммы 4.1 следует, что v имеет нуль в $\partial\Gamma$. Ввиду $v > 0$ на Γ и $v''(x) < 0$ на $E(\Gamma)$, все нули функции v из $\partial\Gamma$ простые. Поэтому, учитывая $u|_{\partial\Gamma} = 0$, имеем $u/v \in C(\Gamma)$.

Рассмотрим пространство $C_0^\infty(\Gamma)$ функций из $C^\infty[\Gamma]$, удовлетворяющих (11) и имеющих компактный носитель в Γ. Снабдим пространство $C_0^\infty(\Gamma)$ нормой

$$\|u\|_2 := \left(\int_\Gamma u''^2 + u'^2 + u^2\, dx\right)^{1/2} + \left(\sum_{a\in J(\Gamma)} u^2(a)\right)^{1/2} \tag{18}$$

и обозначим через $H_0^2(\Gamma)$ пополнение $C_0^\infty(\Gamma)$ по этой норме.

Пусть u удовлетворяет условиям теоремы. Очевидно, $u \in H_0^2(\Gamma)$. Пусть $\{u_{[m]}\}$ – последовательность функций из $C_0^\infty(\Gamma)$, сходящаяся к u в норме (18). Поскольку каждая из функций $u_{[m]}$ равна нулю в окрестности границы $\partial\Gamma$, то $u_{[m]}/v \in C(\Gamma)$ и стало быть выполняется равенство (13). Легко видеть, что $\mathcal{V}[u_{[m]}] \geq 0$. Поэтому, учитывая ограниченность $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ на $E(\Gamma)$ и $\mathcal{R}$ на Γ, имеем

$$\left|\mathcal{V}[u_{[m]}] - \mathcal{V}[u]\right| \leq K_1 \int_\Gamma \left|u''_{[m]}(u_{[m]} - u)''\right| + \left|u''(u_{[m]} - u)''\right| dx$$
$$+K_2 \int_\Gamma \left|u'_{[m]}(u_{[m]} - u)'\right| + \left|u'(u_{[m]} - u)'\right| dx + K_3 \int_\Gamma \left|u_{[m]}(u_{[m]} - u)\right| + \left|u(u_{[m]} - u)\right| dx$$
$$+K_4 \sum_{a\in J(\Gamma)} \left(\left|u_{[m]}(u_{[m]} - u)\right|(a) + \left|u(u_{[m]} - u)\right|(a)\right).$$

Привлекая неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\left|\mathcal{V}[u_{[m]}] - \mathcal{V}[u]\right| \leq K_5\left(\|u_{[m]}\|_2 + \|u\|_2\right)\|u_{[m]} - u\|_2.$$

Поскольку $\|u_{[m]} - u\|_2 \to 0$ при $m \to +\infty$, то $\mathcal{V}[u_{[m]}] \to \mathcal{V}[u]$, а значит, $\mathcal{V}[u] \geq 0$. Но по условиям теоремы $\mathcal{V}[u] \leq 0$. Следовательно, $\mathcal{V}[u] = 0$.

Пусть $\Gamma_\varepsilon = \{x \in \Gamma :\ d(x, \partial\Gamma) > \varepsilon\}$, где $d(x, \partial\Gamma)$ – минимальная длина маршрута в Γ от точки x до $\partial\Gamma$ и $\varepsilon > 0$. Положим

$$\mathcal{U}[u_{[m]}] := \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{P}\left(u''_{[m]} - \frac{u_{[m]}}{v}v''\right)^2 dx - 2\int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{P}\frac{v''}{v}\left(u'_{[m]} - \frac{u_{[m]}}{v}v'\right)^2 dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{Q}\left(u'_{[m]} - \frac{u_{[m]}}{v}v'\right)^2 dx.$$

Обозначая $w = u/v$, $w_{[m]} = u_{[m]}/v$, имеем (см. (10))

$$\mathcal{U}[u_{[m]}] = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{P}u''^2_{[m]} - \mathcal{P}v''(u_{[m]}w_{[m]})''\,dx + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{Q}u'^2_{[m]} - \mathcal{Q}(u_{[m]}w_{[m]})'\,dx.$$

Поскольку v'' ограничена на $E(\Gamma)$, то

$$\left|\mathcal{U}[u_{[m]}] - \mathcal{U}[u]\right| \le K_1^* \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left|u''_{[m]}(u_{[m]}-u)'' + u''(u_{[m]}-u)''\right| dx$$
$$+K_2^* \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left|(u_{[m]}(w_{[m]}-w))'' + (w(u_{[m]}-u))''\right| dx + K_3^* \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left|u'_{[m]}(u_{[m]}-u)' + u'(u_{[m]}-u)'\right| dx$$
$$+K_4^* \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left|(u_{[m]}(w_{[m]}-w))' + (w(u_{[m]}-u))'\right| dx.$$

Вновь, привлекая неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\left|\mathcal{U}[u_{[m]}] - \mathcal{U}[u]\right| \le K^* \left(\|u_{[m]}\|_{2,\Gamma_\varepsilon} + \|u\|_{2,\Gamma_\varepsilon}\right) \|u_{[m]} - u\|_{2,\Gamma_\varepsilon}$$
$$+K^*\|u_{[m]}\|_{2,\Gamma_\varepsilon}\|w_{[m]} - w\|_{2,\Gamma_\varepsilon} + K^*\|w\|_{2,\Gamma_\varepsilon}\|u_{[m]} - u\|_{2,\Gamma_\varepsilon}.$$

Так как $\inf\limits_{\Gamma_\varepsilon} v > 0$, то из определения функций $w_{[m]}$ и w следует, что $\|w_{[m]} - w\|_{2,\Gamma_\varepsilon} \to 0$ при $\|u_{[m]} - u\|_{2,\Gamma_\varepsilon} \to 0$. Значит, $\mathcal{U}[u_{[m]}] \to \mathcal{U}[u]$. Поскольку $0 \le \mathcal{U}[u_{[m]}] \le \mathcal{V}[u_{[m]}]$, а правая часть стремится к нулю, то $\mathcal{U}[u] = 0$. Отсюда сразу получаем $u'' - \frac{u}{v}v'' \equiv 0$ и $u' - \frac{u}{v}v' \equiv 0$ на $E(\Gamma_\varepsilon)$. Учитывая произвольность ε, окончательно получаем $u/v \equiv const$ на Γ, т. е. v пропорциональна u на Γ. Теорема доказана.

Теорема 4.3 (сравнения). *Если существует нетривиальное решение краевой задачи*

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (u''u')|_{\partial\Gamma} \geqslant 0, \tag{19}$$

удовлетворяющее условию $\mathcal{W}[u] \geqslant 0$, то любое решение $v \in D$ системы неравенств (17) *положительное хотя бы в одной точке графа* Γ, *либо пропорционально u на* Γ, *либо имеет нуль в* Γ.

Доказательство. Условие $\mathcal{W}[u] \geqslant 0$ эквивалентно

$$\mathcal{V}[u] \le \int\limits_{\Gamma} [pu''^2 + qu'^2 + ru^2]dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} r(a)u^2(a). \tag{20}$$

Поскольку $Lu = 0$ на Γ, то ввиду (9) и граничных условий (19)

$$\int\limits_{\Gamma} [pu''^2 + qu'^2 + ru^2]dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} r(a)u^2(a)$$
$$\le \int\limits_{\Gamma} [pu''^2 + qu'^2 + ru^2]dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} r(a)u^2(a) + \sum_{a\in\partial\Gamma} u'(a)(pu'')(a) = 0.$$

Следовательно выполнены все условия теоремы 4.2. Теорема доказана.

5. Нижняя оценка ведущего собственного значения. В данном разделе мы рассматриваем спектральную краевую задачу (1), (2). Устанавливается оценка снизу для ведущего собственного значения оператора L.

Как и в предыдущем пункте, вместе с оператором $L : D \to C[\Gamma]$, порожденным соотношениями (7) с коэффициентами $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $q \in C^1[E(\Gamma)]$, $r \in C[\Gamma]$, мы рассматриваем оператор $\mathcal{L} : D \to C[\Gamma]$, порождаемый теми же соотношениями (7), но с коэффициентами $\mathcal{P} \in C^2[E(\Gamma)]$, $\mathcal{Q} \in C^1[E(\Gamma)]$, $\mathcal{R} \in C[\Gamma]$.

Рассмотрим коэффициент ρ из правой части уравнения (1) и введем обозначения: $J_\rho(\Gamma) = \{a \in J(\Gamma)|\, \rho(a) > 0\}$, $\Gamma_\rho = E(\Gamma) \cup J_\rho(\Gamma)$.

Теорема 5.1. *Пусть λ_0 – наименьшее собственное краевой задачи* (1), (2), *а u – соответствующая собственная функция. Пусть, далее, v – произвольная функция из D, удовлетворяющая условиям:*

(i) $\inf\limits_{x\in\Gamma} v(x) > 0$;

(ii) $v''(x) \leqslant 0$ *на* $E(\Gamma)$;

(iii) $\mathcal{L}v(x) \geqslant 0$ *на* $J(\Gamma) \setminus J_\rho(\Gamma)$.

Если $\mathcal{W}[u] \geqslant 0$, *то*

$$\lambda_0 \geqslant \inf_{x\in\Gamma_\rho} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}. \tag{21}$$

Доказательство. Из (i) следует $u/v \in C(\Gamma)$. Поэтому мы можем привлечь следствие 3.3. Поскольку $Lu(x) = \lambda_0\rho(x)u$ для всех $x \in \Gamma$, то имеем

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \frac{u}{v}\,(vLu - u\mathcal{L}v)\,dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a)\,(v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a))\\
&= \int_\Gamma \lambda_0\rho u^2\,dx - \int_\Gamma \frac{u^2}{v}\mathcal{L}v\,dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} \lambda_0\rho(a)u^2(a) - \sum_{a\in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a)\mathcal{L}v(a)\\
&= \int_\Gamma [(p-\mathcal{P})\,u''^2 + (q-\mathcal{Q})\,u'^2 + (r-\mathcal{R})u^2]dx + \sum_{a\in J(\Gamma)} (r(a)-\mathcal{R}(a))u^2(a)\\
&+ \int_\Gamma \mathcal{P}\left(u'' - \frac{u}{v}v''\right)^2 dx - 2\int_\Gamma \mathcal{P}\frac{v''}{v}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx + \int_\Gamma \mathcal{Q}\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx + \sum_{a\in\partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a).
\end{aligned}$$

Из условий теоремы и неотрицательности коэффициентов краевых условий (2) следует неотрицательность правой части последнего равенства. Поэтому

$$0 \leqslant \lambda_0 \int_\Gamma \rho u^2\,dx - \int_\Gamma \rho u^2 \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}\,dx + \lambda_0 \sum_{a\in J(\Gamma)} \rho(a)u^2(a) - \sum_{a\in J(\Gamma)} u^2(a)\frac{\mathcal{L}v}{v}(a).$$

Наконец, привлекая условие (iii), получаем

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \lambda_0 \int_\Gamma \rho u^2\,dx + \lambda_0 \sum_{a\in J_\rho(\Gamma)} \rho(a)u^2(a) - \int_\Gamma \rho u^2\frac{\mathcal{L}v}{\rho v}\,dx - \sum_{a\in J_\rho(\Gamma)} \rho(a)u^2(a)\frac{\mathcal{L}v}{\rho v}(a)\\
&\leqslant \left(\lambda_0 - \inf_{x\in\Gamma_\rho}\frac{\mathcal{L}v}{\rho v}\right)\left(\int_\Gamma \rho u^2\,dx + \sum_{a\in J_\rho(\Gamma)} \rho(a)u^2(a)\right).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_\Gamma \rho u^2\,dx + \sum_{a\in J_\rho(\Gamma)} \rho(a)u^2(a) > 0,$$

получаем $\lambda_0 \geqslant \inf\limits_{x\in\Gamma_\rho} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}$. Теорема доказана.

6. Пример. Рассмотрим граф-звезду Γ, состоящий из m ребер $\gamma_i = (a_i, b)$, $i = \overline{1,m}$. Точка b – является единственной внутренней вершиной графа, а точки a_i образуют границу графа Γ. Длину ребра γ_i обозначим через l_i.

На графе-звезде Γ рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{gathered}
u^{IV} = \lambda u, \quad x \in E(\Gamma),\\
u_i(b) = u(b), \quad u_i'(b) = 0, \quad \forall i \in I(b), \qquad \sum_{i\in I(b)} u_i'''(b) = 0,\\
\beta(a_i)u''(a_i) - \vartheta(a_i)u'(a_i) = 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

Построим пробную функцию v для неравенства (21). В качестве оператора $\mathcal{L}$ возьмём оператор краевой задачи (22):

$$D = \{u \in C^4[\Gamma] : \ u_i(b) = u(b), \quad u_i'(b) = 0, \quad \forall i \in I(b)\},$$

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \begin{cases} u^{IV}(x), & x \in E(\Gamma),\\ \sum\limits_{i\in I(b)} u_i'''(x), & x = b. \end{cases}$$

При таком выборе оператора $\mathcal{L}$ очевидно $\Gamma_\rho = E(\Gamma)$ и выполнено тождество $\mathcal{W}[u] \equiv 0$.

Для определённости будем считать, что все рёбра графа направлены от внутренней вершины b к граничным вершинам a_i. Параметризуем каждое ребро γ_i, сопоставив ему гомеоморфно интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и определим функцию v на ребре γ_i формулой

$$v_i(x) = \sin\frac{\pi(l_i + \varepsilon - t(x))}{2(l_i+\varepsilon)}, \quad x \in \gamma_i, \quad t \in (0, l_i).$$

Очевидно, что построенная таким образом функция v положительна, непрерывна на Γ и $v_i'(b) = 0$ для всех $i \in I(b)$. Кроме того, $v''(x) < 0$ для всех $x \in E(\Gamma)$. Привлекая формулу (21), получим, что

$$\lambda_0 \geqslant \inf_{E(\Gamma)} \frac{v^{IV}}{v} = \inf_{i \in I(b)} \frac{\pi^4}{16(l_i + \varepsilon)^4}.$$

Положим $l = \max\limits_{i \in I(b)} \{l_i\}$. Тогда, устремляя $\varepsilon \to 0$, получим $\lambda_0 \geqslant \dfrac{\pi^4}{16 l^4}$.

Отметим, что полученная оценка для λ_0 не зависит от коэффициентов граничных условий и от количества рёбер в графе-звезде.

Благодарность. *Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за внимательное прочтение текста статьи и ценные замечания.*

Список литературы

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. *М. Физматлит* 2005, 272с.
2. Bondarenko N.P. Partial Inverse Sturm-Liouville Problems. *Mathematics,* 2023;11:2408.
3. Bondarenko N.P. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph with mixed boundary conditions. *J. Inverse Ill-Posed Probl,* 2018; 26:1–12.
4. Завгородний М.Г., Майорова С.П. Об одном уравнении математической физики четвертого порядка на графе. Сборник трудов «Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию». – Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008;88–102.
5. Yang Ch.-F. Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator on a d-star graph. *J. Math. Anal. Appl,* 2010;365(2):742–749.
6. Диаб А.Т., Калдыбекова Б.К., Пенкин О.М. О кратности собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля на графах. *Математические заметки,* 2016;99(4):489–501.
7. Кулаев Р.Ч., Уртаева А.А. О кратности собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка на графе, *Дифференциальные уравнения,* 2023;58(7):882–889.
8. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. *М.: Физматгиз,* 1962;394 с.
9. Borovskikh A.V., Lazarev, K.P. Fourth-order differential equations on geometric graphs *J. Math. Sci,* 2004;119(6):719–738.
10. Кулаев Р.Ч., Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе. *Математический сборник,* 2015;206(12):79–118.
11. Кулаев Р.Ч., О свойстве неосцилляции уравнения на графе. *Сибирский математический журнал,* 2016; 57(1):85–97.
12. Kulaev, R.Ch. On the disconjugacy property of an equation on a graph. *Sib. Math. J,* 2016;57(1):64–73.
13. Kulaev R.Ch. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph. *Mediterr. J. Math,* 2022;19(73).
14. Диаб А.Т., Кулешов П.А., Пенкин О.М. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе. *Математические заметки,* 2014;96(6):885–895.
15. Dunninger D.R. A Picone integral identity for a class of fourth order elliptic differential inequalities. *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat,* 1971;50:630–641.
16. Jaroš J. Picone's identity for the p-biharmonic operator with applications. *Electron. J. Diff. Equations,* 2011;122:1–6.
17. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. *Харьков: ОНТИ,* 1939;719 с.
18. Kulaev R.Ch., Urtaeva A.A. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2023;1–21.
19. Dekoninck B., Nicase, S. The eigenvalue problem for networks of beams. *Linear Algebra Appl,* 2000;314(1-3):165–189.
20. Кулаев Р.Ч. О функции Грина краевой задачи на графе-пучке. *Известия высших учебных заведений. Математика,* 2013; 2:56–66.

References

1. Pokorny YuV., Penkin OM., Borovskikh A.V., Pryadiev VL., Lazarev KP., Shabrov SA. Differential equations on geometric graphs. *M.: Fizmatlit,* 2005, 272p. (in Russian)
2. Bondarenko NP. Partial Inverse Sturm-Liouville Problems. *Mathematics*, 2023;11:2408.
3. Bondarenko NP. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph with mixed boundary conditions. *J. Inverse Ill-Posed Probl*, 2018;26:1–12.
4. Zavgorodnii MG. and Maiorova SP. Boundary Value Problems Describing Processes in Network Systems, in Mat. forum: Itogi nauki. Yug Rossii (Mathematical Forum: Scientific Results. South Russia), Vladikavkaz, 2010,48–64.

5. Yang Ch.-F. Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator on a d-star graph. *J. Math. Anal. Appl*, 2010;365(2):742–749.
6. Diab AT., Kaldybekova BK., Penkin OM. On the Multiplicity of Eigenvalues of the Sturm–Liouville Problem on Graphs, *Math. Notes*, 2016;99(4):492–502 p. (In Russian)
7. Kulaev RCh., Urtaeva AA. On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph, *Differential equations* , 2023;58(7):882–889. (In Russian)
8. Krasnoselsky MA. Positive solutions of operator equations. *М.: Физматгиз.*, 1962;394 p. (In Russian)
9. Borovskikh AV., Lazarev KP. Fourth-order differential equations on geometric graphs *J. Math. Sci,* 2004;119(6):719–738.
10. Kulaev RCh. Disconjugacy of fourth-order equations on graphs. *Sb. Math* 2015; 206(12):79–118. (in Russian)
11. Kulaev RCh. On the disconjugacy property of an equation on a graph. *Siberian Math. J,* 2016;57(1):85–97. (in Russian)
12. Kulaev RCh. On the disconjugacy property of an equation on a graph. *Sib. Math. J,* 2016;57(1):64–73.
13. Kulaev RCh. The qualitati ve theory of fourth-order differential equations on a graph. *Mediterr. J. Math,* 2022;19(73).
14. Diab AT., Kuleshov PA., Penkin OM. Estimate of the First Eigenvalue of the Laplacian on a Graph. *Math. Notes*, 2014;96(6):885–895. (In Russian)
15. Dunninger DR. A Picone integral identity for a class of fourth order elliptic differential inequalities. *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat,* 1971;50:630–641.
16. Jaroš J. Picone's identity for the p-biharmonic operator with applications. *Electron. J. Diff. Equations*, 2011;122:1–6.
17. Ains EL Ordinary differential equations. *Харьков: ОНТИ,* 1939;719 p. (In Russian)
18. Kulaev RCh., Urtaeva AA. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network. *Math. Meth. Appl. Sci,* 2023;1–21 .
19. Dekoninck B., Nicase S. The eigenvalue problem for networks of beams. *Linear Algebra Appl,* 2000;314(1-3):165–189.
20. Kulaev RCh. The Green function of the boundary value problem on a star-shaped graph. *Russian Math. (Iz. VUZ),* 2013;2:56–66. (in Russian)

Поступила в редакцию 12.07.2024
Поступила после рецензирования 19.08.2024
Принята к публикации 22.08.2024

Received July 12, 2024
Revised August 19, 2024
Accepted August 22, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Уртаева Александра Артуровна – ассистент кафедры алгебры и анализа, Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Aleksandra A. Urtaeva – Department Assistant Algebra and Analysis, North Ossetian State University after K. L. Khetagurova, Vladikavkaz, Russia

К содержанию