Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 2. С. 87–96.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 2. P. 87–96.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.926.4
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-87-96
MSC 34A30, 34E05
Оригинальное исследование

Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка

Архипов В. П. [1], **Глушак А. В.** [2]
[1] Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru
[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка рассматривается задача Коши с начальными условиями в точке вырождения. Вид начальных условий зависит от знака коэффициента при первой производной. Установлена разрешимость соответствующих начальных задач и определены первые асимптотики построенных решений. Приводятся примеры.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, точка вырождения, асимптотические представления, степенная асимптотика решений

Для цитирования: Архипов В. П., Глушак А. В. 2024. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 87–96.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-87-96

Original Research

Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations

Viktor P. Arkhipov [1], **Alexander V. Glushak** [2]
[1] Oryel State University named after I. S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Oryel, 302026, Russia
varhipov@inbox.ru
[2] Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia
Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. For ordinary linear degenerate differential equations second order Cauchy problem with initial conditions at the point of degeneracy is considered. The type of initial conditions depends on the sign of the coefficient of the first derivative. The solvability of the corresponding initial problems is established and the first asymptotic of the constructed solutions are determined. Examples are given.

Keywords: Degenerate Differential Equations, Point of Degeneration, Asymptotic Representations, Power Asymptotic Behavior of Solutions

For citation: Arkhipov V. P., Glushak A. V. 2024. Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 87–96. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-87-96

---

1. Введение. Изучение дифференциальных уравнений с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной проводилось во многих работах. К таким уравнениям приводит исследование уравнений в частных производных переменного типа, а также установление асимптотических разложений бисингулярных задач (см. [1]). Подробно вопрос существования гладких решений вырождающихся уравнений первого и второго порядка исследовал В. П. Глушко в [2, 3, 4, 5].

Асимптотические формулы решений для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t) \tag{1}$$

в окрестности точки $t = 0$ вырождения его старшего коэффициента ($a(0) = 0$) были получены в [6], [7].

В работах [8], [9] не только исследована гладкость решений уравнения (1), но и получены их асимптотические разложения по специально построенным асимптотическим последовательностям функций. В [9] уравнение (1) рассматривалось в комплексной плоскости и были получены оценки по параметру решений двухточечных краевых задач. Двусторонние асимптотики решений в окрестности точки вырождения, которая находится внутри интервала, получены в [7].

В настоящей работе, которая является продолжением [10], рассматривается вопрос нахождения решений задачи Коши в случае, когда начальные условия задаются непосредственно в точке вырождения. Кроме того, с помощью установленных в [10] асимптотических формул получены первые асимптотики решений в окрестности точки вырождения.

2. Основные предположения. Нас будет интересовать локальная вблизи точки вырождения разрешимость задачи Коши для вырождающегося при $t = 0$ уравнения (1), поэтому будем рассматривать это уравнение на отрезке $[0, \delta]$. Для упрощения формулировок об асимптотике решений будем предполагать, что коэффициенты уравнения и правая часть удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) и правая часть $f(t)$ — действительные бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0, \delta]$ функции, причем $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ при $t \in (0, \delta]$ и $b(0) \neq 0$.

В работах [8, 9] построены разложения решений уравнения (1) по асимптотическим рядам специально выбранных функций. В настоящем разделе приведем некоторые из этих результатов, которые понадобятся для наших дальнейших исследований.

Определим следующие функции

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)}, \quad s(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau, \quad w(t) = \int_t^\delta \frac{d(\tau)}{a(\tau)}\, d\tau, \tag{2}$$

$$h(t) = \frac{1}{4d(t)} \left(a(t) \left(\frac{d'(t)}{d(t)} \right)^2 - 2 \left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)} \right)' - 2b'(t) \right), \tag{3}$$

$$v_k(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_t^\delta \frac{b(\tau) - (-1)^k d(\tau)}{2a(\tau)}\, d\tau \right) \in C^\infty(0, \delta], \quad k = 1,\ 2. \tag{4}$$

В силу непрерывности входящих в эти выражения функций можно выбрать достаточно малое $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось

Условие 2. Существует такое $\delta > 0$, что на отрезке $t \in [0, \delta]$ справедливы неравенства

$$d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)} > \frac{|b(0)|}{2}, \qquad \int_0^\delta |h(t)|\, dt < \frac{1}{2}.$$

При $f(t) \equiv 0$ линейно независимые решения однородного уравнения (1) могут быть представлены в виде

$$u_1(t) = \Phi(t) v_1(t), \quad u_2(t) = \Psi(t) v_2(t). \tag{5}$$

Функция $\Phi(t)$ — решение задачи

$$\Phi(t) = 1 + K_1 \Phi(t), \quad \Phi(0) = 1, \tag{6}$$

где K_1 — интегральный оператор

$$K_1 \varphi(t) = \int_0^\delta k_1(t, \tau) \varphi(\tau)\, d\tau$$

с ядром $k_1(t, \tau) = h(\tau)$ при $0 \le \tau \le t \le \delta$ и $k_1(t, \tau) = h(\tau) \exp\left(w(\tau) - w(t)\right)$ при $t \le \tau \le \delta$, функции $h(t),\ w(t)$ введены в (2), (3).

Аналогично, функция $\Psi(t)$ — решение задачи

$$\Psi(t) = 1 + K_2 \Psi(t), \quad \Psi(0) = 1, \tag{7}$$

где K_2 — интегральный оператор

$$K_2 \psi(t) = \int_0^t k_2(t, \tau) \psi(\tau)\, d\tau$$

с ядром $k_2(t, \tau) = -h(\tau) \left(1 - \exp\left(w(t) - w(\tau)\right)\right)$ при $0 \le \tau \le t \le \delta$.

При выполнении условий 1 и 2 ядра интегральных операторов $K_1,\ K_2$ являются ограниченными, а в случае «сильного» вырождения – и непрерывными функциями в квадрате $[0,\delta]\times[0,\delta]$. Выполнение этих условий обеспечивает для операторов $K_1,\ K_2$ справедливость условий сжатия в $C[0,\delta]$ и существование единственных решений уравнений (6), (7) в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов

$$\Phi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t),\ \ \varphi_0(t)=1,\ \ \varphi_{k+1}(t)=K_1\varphi_k(t), \tag{8}$$

$$\Psi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t),\ \ \psi_0(t)=1,\ \ \psi_{k+1}(t)=K_2\psi_k(t). \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1 и 2. Тогда функции $u_1(t)=\Phi(t)v_1(t), u_2(t)=\Psi(t)v_2(t)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), а общее решение этого уравнения представимо на $[0,\delta]$ в виде*

$$u(t)=C_1u_1(t)+C_2u_2(t)+u_*(t), \tag{10}$$

где все входящие в эти выражения функции определяются соотношениями (2)–(5), а частное решение уравнения (1) $u_*(t)$ имеет вид

$$u_*(t)=\int_0^{\delta}G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(t,\tau)=-\frac{\Phi(t)\Psi(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(-\int_{\tau}^{t}\frac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right),\ \ 0<\tau\le t,$$

$$G(t,\tau)=-\frac{\Phi(t)\Psi(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(\int_{t}^{\tau}\frac{b(\xi)-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right),\ \ t\le\tau\le\delta.$$

При этом, если $b(0)<0$, то $u_i(t)\in C^n[0,\delta],\ i=1,2,\ n=\max(k\in\mathbb{N}:b(0)+ka'(0)<0)$ и

$$\lim_{t\to0+}u_2^{(k)}(t)=0\ (0\le k\le n),\ \ \lim_{t\to0+}u_1(t)=U_1>0,\ \ u_*(t),\ u(t)\in C^n[0,\delta].$$

Если $b(0)>0$, то $u_2(t)\in C^\infty[0,\delta]$, $u_2(0)>0$, $u_1(t)\in C^\infty(0,\delta]$ и

$$\lim_{t\to0+}u_1(t)=+\infty,\ \ u_*(t)\in C^\infty[0,\delta],\ \ u(t)\in C^\infty[0,\delta]\ \text{при}\ C_1=0.$$

Результаты работы [10] позволяют говорить не только о разрешимости задачи Коши, но и выписать первые асимптотики её решений в окрестности нуля. В дальнейшем мы остановимся лишь на исследовании сильных степенных вырождений и поскольку нас интересуют локальные результаты разрешимости, то в дальнейшем будем считать выполненным следующее условие.

Условие 3. Пусть $a(t)=t^ma_0(t),\ a_0(0)>0,\ m\in\mathbb{N},\ m\ge2$, что означает сильное вырождение, и $b(t)=b=const\ne0$ при всех $t\in[0,\delta]$.

В статье [10] указано, что при выполнении условия 3 справедливы асимптотические представления:

$$a(t)=t^mO(1),\ h(t)=t^{2m-2}O(1),\ d(t)=|b|(1+t^mO(1)),\ s(t)=t^{2m-1}O(1), \tag{11}$$

где функции $d(t),\ h(t),\ s(t)$ определены в (2), (3).

Асимптотические представления (11) позволяют установить ряд утверждений о разрешимости задачи Коши для уравнения (1).

Теорема 1 фактически определяет постановку начальных условий в точке $t=0$ в зависимости от знака $b=b(0)\ne0$, поэтому в дальнейшем при исследовании следует различать два случая: $b(0)>0$ и $b(0)<0$.

3. Задача Коши при $b=b(0)>0$. Установим три утверждения, справедливые для рассматриваемого случая $b>0$.

Теорема 2. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия 1–3 и $b>0$. Тогда существует единственное решение $u(t)\in C^\infty[0,\delta]$ этого уравнения, удовлетворяющее условию*

$$u(0)=u_0, \tag{12}$$

для которого при $t \longrightarrow 0+$ имеет место асимптотическое представление:

$$u(t) = \frac{\sqrt{b}\, u_0}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{c(\tau)\, d\tau}{d_1(\tau)}\right)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) - \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right)\right) +$$

$$+A(t)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) +$$

$$+B(t)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1), \tag{13}$$

где $d_1(t) = (|b| + d(t))/2 \neq 0$,

$$A(t) = -\int\limits_0^t \left(1 - s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} - \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right) \exp\left(-\int\limits_\xi^t \frac{d_1(\tau)\, d\tau}{a(\tau)}\right) \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}},$$

$$B(t) = \int\limits_0^t \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right) \exp\left(-\int\limits_\xi^t \frac{c(\tau)\, d\tau}{d_1(\tau)}\right) \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}.$$

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде

$$u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + w_*(t) \tag{14}$$

где $w_*(t)$ — такое частное решение уравнения (1), что $w_*(0) = 0$. Отметим, что $w_*(t)$ легко подобрать, используя решения $u_*(t)$ и $u_2(t)$. Из теоремы 1 следует, что для выполнения условия (12) необходимо в (14) положить $C_1 = 0$ и тогда

$$C_2 = \frac{u_0}{u_2(0)} = \frac{u_0}{v_2(0)},$$

где $v_2(t)$ определена равенством (4), причем $v_2(0) > 0$.

При таком выборе постоянных C_1 и C_2 определяемая равенством (14) функция $u(t)$ и будет требуемым единственным решением.

Асимптотические представления при $t \longrightarrow 0+$ для $u_2(t)$ и $w_*(t)$ установлены в [10] и они имеют вид:

$$u_2(t) = v_2(t)\Psi(t), \quad \Psi(t) = \left(1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) - \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1)\right), \tag{15}$$

$$w_*(t) = A(t)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) +$$

$$+B(t)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1). \tag{16}$$

Подставив разложения (15), (16) в решение (14), получим требуемое асимптотическое представление (13). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует однопараметрическое семейство функций $\tilde{u}(t) \in C^\infty(0, \delta]$, каждая функция которого является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to 0+} \tilde{u}(t) \exp\left(-b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) = w_0. \tag{17}$$

Для всех функций этого семейства при $t \longrightarrow 0+$ имеет место асимптотическое представление:

$$\tilde{u}(t) = \frac{\sqrt{b}\, w_0}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) \exp\left(\int\limits_0^t \frac{c(\tau)\, d\tau}{d_1(\tau)}\right) \times$$

$$\times \left(1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) + \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1)\right) + w_*(t) + Cu_2(t), \tag{18}$$

где $u_2(t)$ определено в (5), (9), (4), $w_*(t)$ — такое частное решение уравнения (1), что $w_*(0) = 0$, а C — произвольная постоянная.

Доказательство. Как доказано в [8], при $b > 0$ входящие в общее решение (14) функции $u_2(t)$ и $w_*(t)$ ограничены на $[0, \delta]$, а $\lim\limits_{t\to 0+} v_1^{(n)}(t) = \lim\limits_{t\to 0+} u_1^{(n)}(t) = +\infty$ для $n \in \mathbb{N}_0$.

Асимптотические представления при $t \to 0+$ для $u_1(t)$ и $w_*(t)$ также установлены в [10], они имеют вид

$$u_1(t) = v_1(t)\Phi(t), \quad \Phi(t) = \left(1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) + \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1)\right). \tag{19}$$

$$w_*(t) = A(t)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) +$$

$$+B(t)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1), \tag{20}$$

и из (19), (20) вытекает требуемое асимптотическое представление (18).

Отметим также, что асимптотическое представление (18) может быть записано в виде

$$\tilde{u}(t) = w_0 \exp\left(b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right)(1 + o(1)) + w_*(t) + Cu_2(t).$$

Учитывая (15), (16), (19), далее для общего решения (14) вычислим предел

$$\lim_{t\to 0+} u(t)\exp\left(-b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) = C_1 \lim_{t\to 0+} v_1(t)\Phi(t)\exp\left(-b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) =$$

$$= \frac{C_1}{\sqrt{b}} \lim_{t\to 0+} \exp\left(\int\limits_t^\delta \frac{(-b + a(\tau))\,d\tau}{2a(\tau)}\right) = \frac{C_1}{\sqrt{b}} \exp\left(-\int\limits_0^\delta \frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right). \tag{21}$$

Если выбрать

$$C_1 = w_0\sqrt{b}\,\exp\left(\int\limits_0^\delta \frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right),$$

то для функции $\tilde{u}(t) = C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + w_*(t)$ из (19), (21) после несложных преобразований вытекает справедливость равенства (17). Теорема доказана.

Установленные в [10] асимптотические представления позволяют рассмотреть вопрос о разрешимости уравнения (1) и для неограниченной в окрестности точки $t = 0$ правой части уравнения $f(t)$ специального вида.

Теорема 4. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия 1–3, $b > 0$ и правая часть имеет вид*

$$f(t) = \exp\left(b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right)f_0(t), \quad f_0(t) \in C^\infty[0, \delta].$$

Тогда существует однопараметрическое семейство $\tilde{u}(t) \in C^\infty(0, \delta]$ решений уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (17). Для всех функций семейства имеет место асимптотическое представление:

$$\tilde{u}(t) = \frac{(w_0 - \varphi_0)\sqrt{b}}{\sqrt{d(t)}}\exp\left(b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right)\exp\left(\int\limits_0^t \frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right) \times$$

$$\times \left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) - \Phi(t)\int\limits_0^t \frac{\Psi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_\tau^t \frac{c(\xi)\,d\xi}{d_1(\xi)}\right) -$$

$$-\Psi(t)\int\limits_t^\delta \frac{\Phi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(-\int\limits_t^\tau \frac{(b + d(\xi))\,d\xi}{2a(\xi)}\right)d\tau + t^{4m-2}O(1) + Cu_2(t), \tag{22}$$

где $Cu_2(t)$ — произвольная функция из семейства ограниченных решений однородного уравнения (1),

$$\varphi_0 = -\lim_{t\to 0+}\int\limits_t^\delta \frac{\Phi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{bd(\tau)}}\exp\left(-\int\limits_t^\tau \frac{(b + d(\xi))\,d\xi}{2a(\xi)}\right)d\tau.$$

Доказательство. Согласно теореме 1, общее решение уравнения (1) представимо на $(0,\delta]$ в виде $u(t) = C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + u_*(t)$ (см. (10)), где $u_*(t)$ — частное решение, для которого справедливо представление

$$u_*(t) = \int\limits_0^\delta G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = -\Phi(t)\int\limits_0^t \frac{\Psi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{(b+d(\xi))\,d\xi}{2a(\xi)}\right)\exp\left(\int\limits_\tau^\delta \frac{b\,d\xi}{a(\xi)}\right)d\tau -$$

$$-\Psi(t)\int\limits_t^\delta \frac{\Phi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{(b-d(\xi))\,d\xi}{2a(\xi)}\right)\exp\left(\int\limits_\tau^\delta \frac{b\,d\xi}{a(\xi)}\right)d\tau = -\exp\left(b\int\limits_t^\delta \frac{d\xi}{a(\xi)}\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^t \frac{\Phi(t)\Psi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_\tau^t \frac{c(\xi)\,d\xi}{d_1(\xi)}\right)d\tau - \int\limits_t^\delta \frac{\Psi(t)\Phi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{(b+d(\xi))\,d\xi}{-2a(\xi)}\right)d\tau\right). \tag{23}$$

Учитывая представление (23), вычислим соответствующие пределы каждого из слагаемых общего решения. Имеем

$$\lim_{t\to 0+} u_*(t)\exp\left(-b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) = -\lim_{t\to 0+}\int\limits_t^\delta \frac{\Phi(\tau)\Psi(t)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(-\int\limits_t^\tau \frac{(b+d(\xi))\,d\xi}{2a(\xi)}\right)d\tau = \varphi_0,$$

$$\lim_{t\to 0+} u_2(t)\exp\left(-b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) = \frac{1}{\sqrt{b}}\lim_{t\to 0+}\exp\left(-b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right)\exp\left(\int\limits_t^\delta \frac{(b-d(\tau))\,d\tau}{2a(\tau)}\right) = 0,$$

$$\lim_{t\to 0+} u_1(t)\exp\left(-b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) = \frac{1}{\sqrt{b}}\lim_{t\to 0+}\exp\left(-b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right)\exp\left(\int\limits_t^\delta \frac{(b+d(\tau))\,d\tau}{2a(\tau)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}}\exp\left(\int\limits_0^\delta \frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right) = \varphi_1 > 0.$$

Подставляя общее решение в условие (17) и учитывая только что найденные пределы, определим постоянную C_1 и, тем самым, требуемое семейство решений $\tilde{u}(t)$:

$$C_1 = \frac{w_0-\varphi_0}{\varphi_1},\quad \tilde{u}(t) = \frac{w_0-\varphi_0}{\varphi_1}u_1(t) + C_2u_2(t) + u_*(t).$$

Наконец, асимптотическое представление (22) функций из указанного семейства вытекает из (15), (19), (20).

В заключение заметим, что для получения конкретной асимптотики в представлении (22) следует заменить функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ их асимптотическими представлениями из (15), (19), а саму формулу (22) тогда можно записать в виде:

$$\tilde{u}(t) = w_0\exp\left(b\int\limits_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right)(1+o(1)) + C_2u_2(t).$$

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\left(t^2u'(t)\right)' + bu'(t) + \omega(1-\omega)u(t) = f(t), \tag{24}$$

на промежутке $t\in[0,\delta]$, где $\delta > 0,\ b\neq 0,\ \omega\in\mathbb{R}$.

Общее решение $\hat{u}(t)$ однородного дифференциального уравнения (24) имеет вид

$$\hat{u}(t) = C_1\left(-\frac{b}{t}\right)^{1-\omega}{}_1F_1\left(1-\omega, 2-2\omega; \frac{b}{t}\right) + C_2\left(-\frac{b}{t}\right)^{\omega}{}_1F_1\left(\omega, 2\omega; \frac{b}{t}\right),$$

где ${}_1F_1(\cdot)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пусть в уравнении (24) $b = 1,\ \omega = 2,\ f(t) = t$. В этом частном случае общим решением неоднородного дифференциального уравнения (24) будет функция

$$u(t) = C_1(2t-1)\exp\left(\frac{1}{t}\right) + C_2(2t+1) + \frac{t}{6} + \frac{2t-1}{6}\exp\left(\frac{1}{t}\right)\int\limits_{1/t}^{+\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau. \tag{25}$$

Выберем в (25) $C_1 = 0$, а постоянную $C_2 = u_0$ определим из начального условия (12). По теореме 2 функция

$$u(t) = u_0(2t+1) + \frac{t}{6} + \frac{2t-1}{6}\exp\left(\frac{1}{t}\right)\int\limits_{1/t}^{+\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau = u_0(2t+1) + o(1) \ \ (t \to 0+)$$

будет единственным решением уравнения

$$\left(t^2u'(t)\right)' + u'(t) - 2u(t) = t, \tag{26}$$

удовлетворяющим условию (12).

Если в общем решении (25) выбрать постоянную $C_1 = -w_0e^{-1/\delta}$ так, чтобы выполнялось условие (17), то по теореме 3 каждая функция однопараметрического семейства функций

$$\tilde{u}(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\right)\left(-w_0(2t-1)\exp\left(-\frac{1}{\delta}\right) - t\right) + C_2(2t+1)$$

является решением уравнения (26) и удовлетворяет условию (17).

Рассмотрим, наконец, уравнение (24) с неограниченной в окрестности точки $t = 0$ правой частью уравнения вида $f(t) = e^{1/t}$, и пусть, по-прежнему, $b = 1, \ \omega = 2$. По теореме 4 каждая функция однопараметрического семейства функций

$$\tilde{u}(t) = -w_0(2t-1)\exp\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\delta}\right) + C_2(2t+1) - t\exp\left(\frac{1}{t}\right)$$

является решением уравнения

$$\left(t^2u'(t)\right)' + u'(t) - 2u(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\right)$$

и удовлетворяет условию (17).

4. Задача Коши при $b = b(0) < 0$. В теоремах 2–4 мы предполагали, что в уравнении (1) коэффициент $b > 0$. Далее установим два утверждения при $b < 0$.

Теорема 5. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия 1–3 и $b < 0$. Тогда существует однопараметрическое семейство функций $u(t) \in C^\infty[0, \delta]$, каждая функция которого является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию (12). Функции этого семейства могут быть записаны в виде $u(t) = u_3(t) + Cu_2(t)$, где C – произвольная постоянная, $u_2(t)$ — определяемое равенством (15) решение однородного уравнения (1) и такое, что $u_2^{(k)}(0) = 0, \ u^{(k)}(0) = u_3^{(k)}(0), \ k \in \mathbb{N}_0$, а для $u_3(t) \in C^\infty[0, \delta]$ при $t \to 0+$ имеет место асимптотическое представление:*

$$u_3(t) = \left(\frac{u_0\sqrt{|b|}}{\sqrt{d(t)}}\exp\left(\int\limits_0^t\frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right) + A_3(t)\right)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) + \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right)\right) +$$
$$+B_3(t)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) - \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right)\right) + t^{4m-2}O(1), \tag{27}$$

где

$$A_3(t) = -\int\limits_0^t\left(1 - s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} - \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)\exp\left(\int\limits_\xi^t\frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right)\frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}},$$

$$B_3(t) = -\int\limits_t^\delta\left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)\exp\left(-\int\limits_t^\xi\frac{d_1(\tau)\,d\tau}{a(\tau)}\right)\frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}.$$

Доказательство. Как указано в теореме 1, общее решение уравнения (1) имеет вид (10). При сделанных предположениях все входящие в (10) функции оказываются бесконечно дифференцируемыми на $[0, \delta]$, причем

$$u_1(0) = \frac{1}{\sqrt{|b|}}\exp\left(-\int\limits_0^\delta\frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right) > 0, \quad u_2^{(k)}(0) = 0, \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Условие (12) будет выполнено, если положить $C_1 = u_0 - u_*(0)/u_1(0)$. Тогда удовлетворяющее условиям теоремы решение $u(t)$ записывается в виде

$$u(t) = u_3(t) + Cu_2(t), \quad u_3(t) = \left(u_0 - \frac{u_*(0)}{u_1(0)}\right)u_1(t) + u_*(t). \tag{28}$$

Асимптотика функции $u_1(t)$ указана в формуле (19), а асимптотика функции $u_*(t)$ установлена в работе [10] и она имеет вид:

$$u_*(t) = A_3(t)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) +$$

$$+B_3(t)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1). \tag{29}$$

Подставляя асимптотики (19), (29) в (28) получим требуемую асимптотику (27). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости уравнения (1) для быстро убывающих при $t \longrightarrow 0+$ функций $f(t) \in C^\infty[0,\delta]$.

Теорема 6. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия 1–3, $b < 0$ и правая часть имеет вид*

$$f(t) = \exp\left(b\int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) f_0(t), \quad f_0(t) \in C^\infty[0,\delta].$$

Тогда существует единственное решение $\tilde{u}(t) \in C^\infty[0,\delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (17). Это решение при $t \longrightarrow 0+$ допускает асимптотическое представление:

$$\tilde{u}(t) = \exp\left(b\int_t^\delta \frac{d\tau}{d(\tau)}\right)\left(\tilde{A}(t)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) +\right.$$

$$+\frac{(w_0 - \varphi_2)\sqrt{b}}{\sqrt{d(t)}}\exp\left(-\int_0^t \frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) +$$

$$\left.+\tilde{B}(t)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)' + t^{4m-2}O(1)\right)\right), \tag{30}$$

где

$$\tilde{A}(t) = -\int_0^t \left(1 - s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} - \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)\exp\left(-\int_\xi^t \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)\frac{f_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}},$$

$$\tilde{B}(t) = \int_t^\delta \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)\exp\left(\int_t^\xi \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)\frac{f_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}},$$

$$\varphi_2 = -\lim_{t\to 0+}\int_t^\delta \frac{\Phi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{bd(\tau)}}\exp\left(\int_t^\tau \frac{c(\xi)\,d\xi}{d_1(\xi)}\right)d\tau.$$

Доказательство. Согласно теореме 1, общее решение уравнения (1) представимо на $(0,\delta]$ в виде $u(t) = C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + u_*(t)$ (см. (10)), и для справедливости условия (12) следует положить $C_1 = 0$.

Далее рассмотрим соответствующие пределы слагаемых общего решения. Имеем

$$\lim_{t\to 0+} u_2(t)\exp\left(-b\int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) = \frac{1}{\sqrt{b}}\lim_{t\to 0+}\exp\left(-\int_t^\delta \frac{(b + d(\tau))\,d\tau}{2a(\tau)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}}\exp\left(\int_0^\delta \frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right) = \varphi_3 > 0, \tag{31}$$

$$\lim_{t\to 0+} u_*(t)\exp\left(-b\int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) = \lim_{t\to 0+}\int_t^\delta f_0(\tau)G(t,\tau)\exp\left(-b\int_t^\tau \frac{d\xi}{a(\xi)}\right)d\tau =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\int_0^t \frac{-\Phi(t)\Psi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(-\int_\tau^t \frac{(b + d(\tau))\,d\tau}{2a(\tau)}\right)\exp\left(b\int_\tau^t \frac{d\xi}{a(\xi)}\right)d\tau+$$

$$+\lim_{t\to 0+}\int\limits_t^\delta \frac{-\Phi(\tau)\Psi(t)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(-\int\limits_t^\tau \frac{(b-d(\tau)\,d\tau}{2a(\tau)}\right)\exp\left(b\int\limits_t^\tau \frac{d\xi}{a(\xi)}\right)d\tau=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{|b|}}\lim_{t\to 0+}\int\limits_t^\delta \frac{\Phi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{c(\xi)\,d\xi}{d_1(\xi)}\right)d\tau=\varphi_2. \tag{32}$$

Учитывая пределы (31), (32), для выполнения условия (12), следует выбрать постоянную C_2 из равенства $B_2C_2+B_*=w_0$ и тогда функция

$$\tilde{u}(t)=\frac{w_0-\varphi_2}{\varphi_3}u_2(t)+u_*(t)$$

будет искомым единственным решением задачи (1), (12).

Асимптотическое представление (30) этого решения получается из (15), (23).

Пример 2. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение (24), и, в отличие от примера 1, пусть теперь $b=-1$, $\omega=2$, $f(t)=t$. В этом частном случае общим решением неоднородного дифференциального уравнения (24) будет функция

$$u(t)=C_1(2t-1)+\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\left(C_2(2t+1)+\frac{t}{6}-\frac{2t+1}{6}\mathrm{Ei}_1\left(\frac{1}{t}\right)\right) \tag{33}$$

или

$$u(t)=C_1(2t-1)+C_2(2t+1)\exp\left(-\frac{1}{t}\right)+o(1)\quad (t\to 0),$$

где $\mathrm{Ei}_1(\cdot)$ — модифицированная интегральная показательная функция, которая при действительных $x>0$ имеет вид

$$\mathrm{Ei}_1(x)=\gamma+\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,n!},$$

$\gamma=0,5772157...$ — постоянная Эйлера.

Постоянную $C_1=-u_0$ определим из начального условия (12). По теореме 5 при таком выборе произвольной постоянной C_1 каждая функция из определяемого равенством (33) семейства $u(t)$ будет решением уравнения

$$\left(t^2u'(t)\right)'-u'(t)-2u(t)=t,$$

удовлетворяющим условию (17).

Если в качестве правой части неоднородного дифференциального уравнения (24) взять быстро убывающую при $t\to 0+$ функцию $f(t)=e^{-1/t}$, то в этом случае общим решением неоднородного дифференциального уравнения (24) будет функция

$$u(t)=C_1(2t-1)+C_2(2t+1)\exp\left(-\frac{1}{t}\right)+t\exp\left(-\frac{1}{t}\right)$$

и, если положить $C_1=0$, то по теореме 6 функция

$$u(t)=w_0(2t+1)\exp\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{t}\right)+t\exp\left(-\frac{1}{t}\right)$$

будет единственным решением уравнения

$$\left(t^2u'(t)\right)'-u'(t)-2u(t)=\exp\left(-\frac{1}{t}\right),$$

удовлетворяющим условию (17).

5. Заключение. В настоящей работе рассмотрен случай, когда начальные условия задачи Коши заданы в точке вырождения $t=0$. Естественно, дальнейшим развитием полученных результатов являются начальные задачи, когда точка вырождения $t=t_0$, в которой задаются начальные условия, будет внутренней точкой промежутка $[0,T]$. Основанием для этих исследований являются полученные в [7] результаты.

Список литературы

1. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989. 336 с.
2. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. I. *Дифференциальные уравнения.* 1968;4(9):1584—1597.

3. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II. *Дифференциальные уравнения.* 1968;4(11):1956—1966.
4. Глушко В.П. 1969. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. III. *Дифференциальные уравнения.* 1969;5(3):443—455.
5. Глушко В.П. 1969. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. IV. *Дифференциальные уравнения.* 1969;5(4):599—611.
6. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Фундаментальная и прикладная математика.* 1998;4(3):1063–1095.
7. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика.* 2016;20(241)44:5–22.
8. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференциальные уравнения.* 2011;47(10):1383–1393.
9. Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика.* 2013;5(148)30:5–18.
10. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика.* 2023;55(3):197—206.

References

1. Ilyin AM. Coordination of asymptotic expansions of solutions to boundary value problems. M.: Nauka. 1989. 336 p. (in Russian)
2. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. I. *Differential Equations.* 1968;4:9:1584—1597. (in Russian)
3. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. II. *Differential Equations.* 1968;4:11:1956—1966. (in Russian)
4. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. III. *Differential Equations.* 1969;5:3:443—455. (in Russian)
5. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. IV. *Differential Equations.* 1969;5:4:599—611. (in Russian)
6. Rosov NKh, Sushko VG, Chudova DI. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. *Fundamental and applied mathematics.* 1998;4(3):1063–1095. (in Russian)
7. Arhipov VP., Glushak AV. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of of solutions. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics.* 2016;20(241)44:5–22. (in Russian)
8. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations.* 2011;47(10):1383–1393. (in Russian)
9. Arhipov VP., Glushak AV. Asymptotic representations of solutions of differential second order equations near the point of degeneration. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics.* 2013;5(148)30:5–18. (in Russian)
10. Arkhipov VP., Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics & Physics.* 2023;55(3):197–206. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.12.2023
Поступила после рецензирования 29.01.2024
Принята к публикации 03.02.2024

Received December 15, 2023
Revised January 29, 2024
Accepted February 03, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Oryel State University named after I. S. Turgenev, Oryel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

К содержанию