Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 2. С. 114–123.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 2. P. 114–123.

УДК 517.95
MSC 35C15
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-114-123
Оригинальное исследование

Задача Дирихле в четверти плоскости для обобщенного уравнения Лапласа

Масаева О. Х.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Э. Л. Шишкиной*)

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
olesya.masaeva@yandex.ru

Аннотация. В работе исследуется краевая задача с данными на всей границе для уравнения в частных производных второго порядка в положительном квадранте. Рассматриваемое уравнение содержит дробную производную Римана – Лиувилля по переменной y и обращается в уравнение Лапласа в случае, если порядок дробного дифференцирования устремляется к двум. Доказано существование регулярного решения задачи, приведены интегральное представление и асмптотические свойства для решения. Доказана теорема единственности решения задачи в классе функций, которые имеют непрерывные частные производные первого порядка по x и порядка $\beta - 1$ по y, и дробный интеграл порядка $2 - \beta$, исчезающий на бесконечности.

Ключевые слова: уравнение в частных производных дробного порядка, четверть плоскости, уравнение Лапласа, функция типа Миттаг – Леффлера, функция типа Райта, производная Римана – Лиувилля

Благодарности: Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки РФ (проект № FEGS-2020-0001).

Для цитирования: Масаева О. Х. 2024. Задача Дирихле в четверти плоскости для обобщенного уравнения Лапласа. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 114–123. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-114-123

Original Research

Dirichlet Problem in a Quarter Plane for the Generalized Laplace Equation

Olesya Kh. Masaeva
(*Article submitted by a member of the editorial board E. L. Shishkina*)

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS,
89A Shortanov St., Nalchik, 360000, Russia
olesya.masaeva@yandex.ru

Abstract. For a second-order partial differential equation we investigate a boundary value problem with data on the entire boundary in the positive quadrant. The considered equation contains the Riemann-Liouville fractional derivative with respect to the variable y and becomes the Laplace equation if the order of fractional derivative is tend to two. For the solution are given the integral representation and asymptotic properties. The existence of the regular solution is proven. The uniqueness theorem is proven in the class of functions that have continuous partial derivatives of first order with respect to x and order $\beta - 1$ with respect to y and a fractional integral of order $2 - \beta$ wich vanish at infinity.

Keywords: Fractional Partial Differential Equation, Quarter Plane, Laplace Equation, Mittag – Leffler Type Function, Wright Type Function, Riemann – Liouville Derivative

Acknowledgements: The work is supported within the framework of the state assignments of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No FEGS-2020-0001).

For citation: Masaeva O. Kh. 2024. Dirichlet Problem in a Quarter Plane for the Generalized Laplace Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 114–123. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-114-123

---

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + D_{0y}^{\beta} u = 0, \tag{1}$$

где $1 < \beta < 2$, $D_{0y}^{\beta} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} D_{0y}^{\beta-2} u(x,y)$ – дробная производная порядка β в смысле Римана – Лиувилля, $D_{0y}^{\beta-2} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^y (y-s)^{1-\beta} u(x,s) ds$ [1],[2].

Уравнение (1) при $\beta = 2$, как следует из определения операторов дробного дифференцирования Римана – Лиувилля, обращается в уравнение Лапласа.

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка находят эффективные приложения в математическом моделировании многих процессов в различных областях науки (см. [1, 3, 4] и др.). В работе [4], посвященной разработке модели устойчивого развития региона, отмечается, что в ряде случаев задача поиска производственной функции может быть сведена к решению обобщенного уравнения Лапласа дробного порядка. В работе [5] аналогичное уравнение с регуляризованной дробной производной (Герасимова – Капуто) называется уравнением стационарной супердиффузии.

В работе [6] приводится аналог интеграла Шварца для системы Коши – Римана дробного порядка. В работе [8] изучено уравнение вида $u_{xx} + D^{\alpha}_{0y}D^{\beta}_{0y}u = 0$, где α и β из промежутка $(0, 1)$. В случае, когда $\alpha = \beta$, краевые задачи с данными на всей границе для полуплоскости исследовались в работах [9] и [10].

В работах [11] и [12] исследовались уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна [13].

В данной работе мы приведем в явном виде решение задачи Дирихле в положительном квадранте для уравнения (1), докажем теоремы о существовании и единственности решения.

2. Постановка задачи и основные результаты. *Регулярным решением* уравнения (1) в области $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $y^{2-\beta}u \in C(\bar{\Omega})$, u_{xx}, $D^{\beta}_{0y}u \in C(\Omega)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках области Ω.

Задача Дирихле. *Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0, y) = 0, \quad 0 < y < \infty, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0} D^{\beta-2}_{0y}u(x, y) = \tau(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{3}$$

где $\tau(x)$ – заданная функция на положительной полуоси $(0, \infty)$, $\tau(0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $\tau(x) \in C(0, \infty)$ и ограничена на полуоси $(0, \infty)$. Тогда регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и (3), имеет вид:*

$$u(x, y) = \int_0^\infty \tau(t)G(x, y, t)dt, \tag{4}$$

где

$$G(x, y, t) = \frac{y^{\beta-1}\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}\int_0^\infty \left[e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s}\right] s^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,\beta}\left(-y^{\beta}s^2\right) ds, \tag{5}$$

$E_{\rho,\mu}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)}$ *– функция типа Миттаг – Леффлера* [14].

Прежде чем доказать теорему 1, сформулируем леммы, которые мы будем использовать для дальнейшего изложения.

Лемма 1. *Пусть*

$$g(x, y) = \frac{y^{\beta-1}\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}\int_0^\infty e^{-xs}s^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,\beta}\left(-y^{\beta}s^2\right) ds. \tag{6}$$

Если $x \geq 0$, $y > 0$, то

$$|g(x, y)| \leq C\frac{y^{\beta-1}}{x^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}}, \tag{7}$$

где C – постоянная.

Доказательство. Положим $x = 0$ в формуле (6)

$$g(0, y) = \frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}y^{\beta-1}\int_0^\infty s^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,\beta}\left(-y^{\beta}s^2\right) ds. \tag{8}$$

По формуле 9.42 из работы [15]:

$$\int_0^\infty t^{\delta-1}E_{\xi,\eta}(-\lambda t^{\varepsilon})dt = \lambda^{-\frac{\delta}{\varepsilon}}\frac{\Gamma(\frac{\delta}{\varepsilon})\Gamma(1-\frac{\delta}{\varepsilon})}{\varepsilon\Gamma(\eta-\frac{\xi\delta}{\varepsilon})}, \tag{9}$$

где $|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2}, \xi \in (0, 2)$, $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \varepsilon)$, если $\eta \neq \xi$ и $\delta \in (0, 2\varepsilon)$, если $\eta = \xi$, из (8) имеем

$$g(0, y) = \frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}y^{\frac{\beta}{2}-2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-1\right)} = \frac{y^{\frac{\beta}{2}-2}\sin\frac{\pi}{\beta}}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\cos\frac{\pi}{\beta}} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{\beta}}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-1\right)}y^{\frac{\beta}{2}-2}, \tag{10}$$

где $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{\beta}}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-1\right)} > 0$ для любого $\beta \in (1,2)$.

Теперь в интеграле (6) сделаем замену $xs = z$. Тогда

$$g(x,y) = \frac{y^{\beta-1}\sin\frac{\pi}{\beta}}{x^{\frac{2}{\beta}+1}\pi}\int_0^\infty z^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,\beta}\left(-\frac{y^\beta z^2}{x^2}\right)e^{-z}dz. \tag{11}$$

При больших значениях x

$$\int_0^\infty E_{\beta,\beta}\left(-\frac{y^\beta z^2}{x^2}\right)z^{\frac{2}{\beta}}e^{-z}dz = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}+1)}{\Gamma(\beta)}.$$

Тогда из (11) имеем

$$g(x,y) = O\left(\frac{y^{\beta-1}}{x^{\frac{2}{\beta}+1}}\right), \quad x\to\infty. \tag{12}$$

Таким образом, из формул (10) и (12) заключаем справедливость оценки (7). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$\frac{2}{\beta}-1 < \mu < \frac{2}{\beta}+3. \tag{13}$$

$$g_x''(x,y) = \frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}y^{\beta-1}\int_0^\infty e^{-xs}s^{\frac{2}{\beta}+2}E_{\beta,\beta}\left(-y^\beta s^2\right)ds. \tag{14}$$

Если $x \geq 0,\ y > 0$, то

$$|g_x''(x,y)| \leq C_1\frac{y^{\beta-1}}{x^{\frac{2}{\beta}+3}+x^\mu y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}}, \tag{15}$$

где C_1 – постоянная.

Доказательство. Сделаем замену $s = \sqrt{z}y^{-\frac{\beta}{2}}$,

$$g_x''(x,y) = \frac{y^{-\frac{\beta}{2}-2}\sin\frac{\pi}{\beta}}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y^{\beta/2}}\sqrt{z}}z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}}E_{\beta,\beta}(-z)dz. \tag{16}$$

Домножим и разделим подынтегральное выражение на функцию $x^\mu y^{-\frac{\beta\mu}{2}}z^{\frac{\mu}{2}}$

$$g_x''(x,y) = y^{-\beta/2-2}\int_0^\infty\left(\frac{x}{y^{\beta/2}}\sqrt{z}\right)^\mu\left(\frac{x}{y^{\beta/2}}\sqrt{z}\right)^{-\mu}e^{-\frac{x}{y^{\beta/2}}\sqrt{z}}z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}}E_{\beta,\beta}(-z)dz.$$

Принимая во внимание, что функция $t^\mu e^{-t}$ достигает своего максимального значения в точке $t=\mu$, из последнего выражения получим

$$|g_x''(x,y)| \leq \frac{\mu^\mu y^{\frac{\beta}{2}(\mu-1)-2}}{e^\mu x^\mu}\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}-\frac{\mu}{2}}|E_{\beta,\beta}(-z)|dz. \tag{17}$$

Отметим, что $\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}-\frac{\mu}{2}}|E_{\beta,\beta}(-z)|dz < \infty$, если выполнено условие (13). Таким образом, для $x\to 0$ мы можем написать

$$|g_x''(x,y)| \leq C_2\frac{y^{\frac{\beta}{2}\mu-\frac{\beta}{2}-2}}{x^\mu}, \tag{18}$$

C_2 – положительная постоянная.

После замены $z = sy^\beta/x^2$ у нас интеграл (16) принимает вид

$$g_x''(x,y) = \frac{y^{\beta-1}}{x^{3+2/\beta}}\int_0^\infty s^{1/2+1/\beta}e^{-\sqrt{s}}E_{\beta,\beta}\left(-sy^\beta x^{-2}\right)ds.$$

Следовательно, при $x\to\infty$

$$g_x''(x,y) = O\left(\frac{y^{\beta-1}}{x^{3+\frac{2}{\beta}}}\right). \tag{19}$$

Таким образом, формулы (18) и (19) доказывают справедливость оценки (15). Лемма 2 доказана.
Доказательство теоремы 1. Покажем сначала равномерную сходимость интеграла (4). Так как

$$\frac{y^{\beta-1}}{(x+t)^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}} \le \frac{y^{\beta-1}}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}},$$

применяя лемму 1, если $|x-t| \ge 0,\ y > 0$, получаем оценку

$$|G(x,y,t)| \le |g(|x-t|,y)| + |g(x+t,y)| \le C_3 \frac{y^{\beta-1}}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}}, \tag{20}$$

Тогда, если $\sup\limits_{0<x<\infty} |\tau(x)| < C_4$, получим

$$|u(x,y)| \le Cy^{\beta-1} \int\limits_0^\infty \frac{|\tau(t)|dt}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}} < C_5 y^{\beta-1} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}},$$

где C_5 – постоянная. Тогда

$$|u(x,y)| \le C_5 y^{\beta-1} \left(\int\limits_0^x + \int\limits_x^\infty \right) \frac{dt}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}} =$$

$$= C_5 y^{\beta-1} \int\limits_0^x \frac{dz}{z^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}} + C_5 y^{\beta-1} \int\limits_0^\infty \frac{dz}{z^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}} \le 2C_5 y^{\beta-1} \int\limits_0^\infty \frac{dz}{z^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}}.$$

Интеграл справа можно вычислить [16, стр. 237, **2.2.3**(5)]

$$\int\limits_0^\infty \frac{dz}{z^{\frac{2}{\beta}+1}+y^{\frac{\beta}{2}+1}} = y^{-1}\Gamma\left(\frac{2+2\beta}{2+\beta}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2+\beta}\right).$$

Итак, $|u(x,y)| \le C_6 y^{\beta-2}$, C_6– положительная постоянная.

Далее найдем дробную производную порядка β от функции u и сравним со второй производной по переменной x, т. е. с функцией u_{xx}. Применяя в формуле (4) оператор D^β_{0y} под знаком интеграла, получим

$$D^\beta_{0y} u = \int\limits_0^\infty \tau(t) D^\beta_{0y} G(x,y,t)dt,$$

$$D^\beta_{0y} G(x,y,t) = \frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int\limits_0^\infty (e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s}) s^{\frac{2}{\beta}} D^\beta_{0y} y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\big(-s^2 y^\beta\big) ds. \tag{21}$$

Применяя формулу дробного дифференцирования функции типа Миттаг – Леффлера [2, с. 15], затем формулу $E_{\rho,\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + zE_{\rho,\rho+\mu}(z)$, имеем

$$D^\beta_{0y} G(x,y,t) = -\frac{y^{\beta-1}\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int\limits_0^\infty (e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s}) s^{\frac{2}{\beta}+2} E_{\beta,\beta}\big(-s^2 y^\beta\big) ds = -G_{xx}(x,y,t). \tag{22}$$

Т. е.

$$D^\beta_{0y} u(x,y) + u_{xx}(x,y) = 0. \tag{23}$$

С учетом леммы 2:

$$|u_{xx}(x,y)| \le \int\limits_0^\infty |\tau(t)||G_{xx}(x,y,t)|dt \le C_1 y^{\beta-1} \int\limits_0^\infty \frac{|\tau(t)|dt}{|x-t|^{3+\frac{2}{\beta}} + y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}|x-t|^\mu} \le$$

$$\le C_7 y^{\beta-1} \left(\int\limits_0^x + \int\limits_x^\infty \right) \frac{dt}{|x-t|^{3+\frac{2}{\beta}} + y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}|x-t|^\mu} =$$

$$= C_7 y^{\beta-1}\int\limits_0^x \frac{dz}{y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}z^{\mu}+z^{\frac{2}{\beta}+3}} + C_7 y^{\beta-1}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}z^{\mu}+z^{\frac{2}{\beta}+3}} \le 2C_7 y^{\beta-1}\int\limits_0^\infty \frac{z^{-\mu}dz}{y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}+z^{\frac{2}{\beta}+3-\mu}}. \qquad (24)$$

Вычислим интеграл (24), сделаем замену переменной $z^{3+\frac{2}{\beta}-\mu}=s$, μ выберем так, чтобы $\frac{2}{\beta}-1<\mu<1$. Тогда (см. [16, стр. 239, **2.2.4**(25)])

$$y^{\beta-1}\int\limits_0^\infty \frac{z^{-\mu}dz}{y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}+z^{\frac{2}{\beta}+3-\mu}} = \frac{\beta y^{\beta-1}}{(3-\mu)\beta+2}\int\limits_0^\infty \frac{z^{\frac{(1-\mu)\beta}{(3-\mu)\beta+2}-1}}{z+y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}}dz = \frac{\pi\beta y^{-2}}{[(3-\mu)\beta+2]\sin\frac{(1-\mu)\beta}{(3-\mu)\beta+2}\pi},$$

$\sin\frac{(1-\mu)\beta}{(3-\mu)\beta+2}\pi>0$. Следовательно, $|u_{xx}(x,y)|\le C_8 y^{-2}$, C_8 – постоянная.

Таким образом, интегралы, полученные двукратным дифференцированием по x и дробным дифференцированием по y под знаком интеграла функции (4), сходятся равномерно вблизи каждой точки $(x,y)\in\Omega$.

Проверим выполнимость краевых условий. Прямой подстановкой (4) в (2) можно убедиться, что выполняется краевое условие (2). Удовлетворяя условию (3) функцию (4), имеем

$$\lim_{y\to0}\int\limits_0^\infty \tau(t)D_{0y}^{\beta-2}G dt = \lim_{y\to0}\left(\int\limits_0^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)\tau(t)D_{0y}^{\beta-2}G dt,$$

где

$$D_{0y}^{\beta-2}G(x,y,t)=\frac{y\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(e^{-|x-t|s}-e^{-(x+t)s}\right)s^{2/\beta}E_{\beta,2}(-y^\beta s^2)ds.$$

Сделав замену $|x-t|s=z,\ ds=\frac{dz}{|x-t|}$, отсюда получим

$$D_{0y}^{\beta-2}G=\frac{y\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi|x-t|^{\frac{2}{\beta}}}\int\limits_0^\infty\left(e^{-z}-e^{-\frac{(x+t)}{|x-t|}z}\right)z^{2/\beta}E_{\beta,2}\left(-\frac{z^2y^\beta}{|x-t|^2}\right)dz. \qquad (25)$$

Рассмотрим сначала $\int_0^{x-\varepsilon}$. Сделаем замену $|x-t|=y^{\beta/2}h$.

$$\lim_{y\to0}\int\limits_0^{x-\varepsilon}\tau(t)D_{0y}^{\beta-2}G dt=\frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}\lim_{y\to0}\int\limits_{\varepsilon y^{-\frac{\beta}{2}}}^{xy^{-\frac{\beta}{2}}}\tau(x-y^{\frac{\beta}{2}}h)h^{-\frac{2}{\beta}-1}\int\limits_0^\infty\left(e^{-z}-e^{-\left(2xy^{-\frac{\beta}{2}}/h-1\right)z}\right)z^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,2}\left(-z^2h^{-2}\right)dzdh=0.$$

Теперь рассмотрим интеграл от $x+\varepsilon$ до ∞.

$$\lim_{y\to0}\int\limits_{x+\varepsilon}^\infty\tau(t)D_{0y}^{\beta-2}G dt=\lim_{y\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}\int\limits_{\varepsilon y^{-\frac{\beta}{2}}}^\infty\frac{\tau(x+y^{\frac{\beta}{2}}h)}{h^{\frac{2}{\beta}+1}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\left(e^{-z}-e^{-\left(2xy^{-\frac{\beta}{2}}h^{-1}+1\right)z}\right)z^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,2}\left(-z^2h^{-2}\right)dzdh=0.$$

Далее имеем

$$\lim_{y\to0}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\tau(t)D_{0y}^{\beta-2}G dt=\lim_{y\to0}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}[\tau(t)-\tau(x)]D_{0y}^{\beta-2}G(x,y,t)dt+\tau(x)\lim_{y\to0}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}D_{0y}^{\beta-2}G(x,y,t)dt=I_1+I_2.$$

$$I_1=\lim_{y\to0}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}[\tau(t)-\tau(x)]\,D_{0y}^{\beta-2}G(x,y,t)dt=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{\beta}y}{\pi}\lim_{y\to0}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{\tau(t)-\tau(x)}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1}}\int\limits_0^\infty\left(e^{-z}-e^{-\frac{(x+t)}{|x-t|}t}\right)z^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,2}\left(-\frac{z^2y^\beta}{|x-t|^2}\right)dz.$$

Делая замену $x-t=y^{\frac{\beta}{2}}h$, будем иметь

$$I_1=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}\int\limits_{-\varepsilon y^{-\frac{\beta}{2}}}^{\varepsilon y^{-\frac{\beta}{2}}}\frac{\tau(x-y^{\frac{\beta}{2}}h)-\tau(x)}{|h|^{\frac{2}{\beta}+1}}\int\limits_0^\infty\left(e^{-z}-e^{-\left(\frac{2xy^{-\frac{\beta}{2}}}{|h|}-1\right)z}\right)z^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,2}\left(-\frac{z^2}{h^2}\right)dzdh=0.$$

Далее,

$$I_2=\lim_{y\to 0}\tau(x)\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}D_{0y}^{\beta-2}G(x,y,t)dt=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{\beta}\tau(x)}{\pi}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{dt}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1}}\int\limits_0^\infty\left(e^{-z}-e^{-\frac{x+t}{|x-t|}z}\right)z^{\frac{2}{\beta}}yE_{\beta,2}\left(-\frac{z^2y^\beta}{|x-t|^2}\right)dz=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{\beta}\tau(x)}{\pi}\int\limits_{-\varepsilon y^{-\frac{\beta}{2}}}^{\varepsilon y^{\frac{\beta}{2}}}\frac{dt}{|h|^{\frac{2}{\beta}+1}}\int\limits_0^\infty\left(e^{-z}-e^{-\left(\frac{2x}{|h|y^{\frac{\beta}{2}}}-1\right)z}\right)z^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,2}\left(-\frac{z^2}{h^2}\right)dz=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{\beta}\tau(x)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dh}{|h|^{\frac{2}{\beta}+1}}\int\limits_0^\infty e^{-z}z^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,2}\left(-\frac{z^2}{h^2}\right)dz=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{\beta}\tau(x)}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{dh}{|h|^{\frac{2}{\beta}+1}}\int\limits_0^\infty e^{-z}z^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,2}\left(-\frac{z^2}{h^2}\right)dz=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{\beta}\tau(x)}{\pi}\int\limits_0^{\infty}dh\int\limits_0^\infty e^{-sh}s^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,2}\left(-s^2\right)ds. \tag{26}$$

Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле (26), будем иметь (см. формулу (9))

$$\int\limits_0^\infty dh\int\limits_0^\infty e^{-sh}s^{\frac{2}{\beta}}E_{\beta,2}\left(-s^2\right)ds=\int\limits_0^\infty s^{\frac{2}{\beta}-1}E_{\beta,2}(-s^2)ds=\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})\Gamma(1-\frac{1}{\beta})}{2}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{\beta}}.$$

Отсюда и формулы (26) следует выполнимость условия (3). Таким образом, с учетом (23) заключаем, что функция $u(x,y)$, определенная формулой (4), является регулярным решением задачи (1)-(3).

Замечание 1. *При $\beta=2$ задача (2), (3) переходит в задачу Дирихле*

$$u(0,y)=0,\quad 0<y<\infty, \tag{27}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0<x<\infty, \tag{28}$$

для уравнения Лапласа в положительном квадранте, а формула (4) – в решение этой задачи.

Действительно, из формулы (5) при $\beta=2$ имеем

$$G(x,y,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(e^{-|x-t|s}-e^{-(x+t)s}\right)\sin ysds.$$

Или

$$G(x,y,t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{y}{(x-t)^2+y^2}-\frac{y}{(x+t)^2+y^2}\right]=\frac{4xyt}{\pi[(x-t)^2+y^2][(x+t)^2+y^2]}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (4) получаем

$$u(x,y)=\frac{4}{\pi}xy\int\limits_0^\infty\frac{\tau(t)tdt}{[(x-t)^2+y^2][(x+t)^2+y^2]}. \tag{29}$$

Формула (29) представляет собой решение задачи (27), (28) для уравнения Лапласа [17, с. 428] в области Ω.

Замечание 2. *Как следует из доказательства теоремы 1, можно допустить существование конечного числа разрывов первого рода у функции $\tau(x)$ и требовать в этом случае выполнения условия (3) только лишь в точках непрерывности функции $\tau(x)$.*

3. Пример. Приведем следующий пример. По формуле (4) получим в первом квадранте функцию, удовлетворяющую уравнению (1), равную нулю при $x = 0$, имеющую дробный интеграл $D_{0y}^{\beta-2}u$, равный 1 на отрезке (a_1, a_2) положительной полуоси и 0 на остальной части этой полуоси:

$$u(x,y) = \frac{y^{\beta-1}\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}\int_0^\infty E_{\beta,\beta}(-y^\beta s^2)s^{\frac{2}{\beta}}\int_{a_1}^{a_2}\left(e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s}\right)dtds =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{\pi}y^{\beta-1}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\int_0^\infty E_{\beta,\beta}(-y^\beta s^2)s^{\frac{2}{\beta}-1}\left(e^{-(x-a_k)s} + e^{-(x+a_k)s}\right)ds, \tag{30}$$

будем считать, что $x > a_2$.

Далее воспользуемся интегральным представлением функции типа Миттаг – Леффлера [14, с. 127]:

$$E_{\beta,\beta}(-y^\beta s^2) = \frac{\beta^{-1}}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\omega)}\frac{e^{\xi^{\frac{1}{\beta}}}\xi^{\frac{1}{\beta}-1}}{\xi + y^\beta s^2}d\xi, \tag{31}$$

где $\gamma(\varepsilon,\omega)$ – контур Ханкеля: $\gamma(\varepsilon,\omega) = \{\xi : |\xi| = r, |\arg\xi| \le \omega\} \cup \{\xi : |\xi| \ge r, \arg\xi = \pm\omega\}$, $\frac{\pi\beta}{2} < \omega \le \pi$. Подставляя формулу (31) в интеграл (30) и изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$u(x,y) = \frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{2\beta\pi^2 i}y^{\beta-2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\int_{\gamma(r,\omega)}e^{\xi^{\frac{1}{\beta}}}\xi^{\frac{2}{\beta}-2}\int_0^\infty\frac{s^{\frac{2}{\beta}-1}}{1+s^2}(e^{-(x-a_k)\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s}+$$

$$+e^{-(x+a_k)\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s})dsd\xi. \tag{32}$$

Обозначим через

$$v(x,y) = \frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{2\beta\pi^2 i}y^{\beta-2}\int_{\gamma(r,\omega)}e^{\xi^{\frac{1}{\beta}}}\xi^{\frac{2}{\beta}-2}\int_0^\infty\frac{s^{\frac{2}{\beta}-1}}{1+s^2}e^{-x\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s}. \tag{33}$$

Вычислим внутренний интеграл в (33). Известно [18, стр. 337, 7], что

$$\int_0^\infty\frac{s^{\frac{2}{\beta}-1}}{1+s^2}e^{-x\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s}ds =$$

$$\frac{\pi}{\sin 2\pi/\beta}\left[\cos\left(\frac{x\sqrt{\xi}}{y^{\beta/2}} + \pi/\beta\right) + \frac{x^{2-\frac{2}{\beta}}\xi^{1-\frac{1}{\beta}}}{y^{\beta-1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(2m-\frac{2}{\beta}+3)}\frac{x^{2m}\xi^m}{y^{\beta m}}\right]. \tag{34}$$

Так как $\cos\left(\frac{x\sqrt{\xi}}{y^{\beta/2}} + \pi/\beta\right) = \cos\frac{\pi}{\beta}\cos\frac{x\sqrt{\xi}}{y^{\beta/2}} - \sin\frac{\pi}{\beta}\sin\frac{x\sqrt{\xi}}{y^{\beta/2}}$, $\cos z = E_{2,1}\left(-z^2\right)$, $\sin z = zE_{2,2}\left(-z^2\right)$, то из (34) получаем $\int_0^\infty\frac{s^{\frac{2}{\beta}-1}}{1+s^2}e^{-x\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s}ds = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{\beta}}E_{2,1}\left(-\frac{x^2}{y^\beta}\xi\right) - \frac{\pi x\sqrt{\xi}}{2\cos\frac{\pi}{\beta}y^{\beta/2}}E_{2,2}\left(-\frac{x^2}{y^\beta}\xi\right) +$

$$+\frac{\pi}{\sin\frac{2}{\beta}\pi}\frac{x^{2-\frac{2}{\beta}}}{y^{\beta-1}}\xi^{1-\frac{1}{\beta}}E_{2,3-\frac{2}{\beta}}\left(-x^2y^{-\beta}\xi\right).$$

Тогда

$$v(x,y) = \frac{\sin\frac{\pi}{\beta}}{2\beta\pi^2 i}y^{\beta-2}\int_{\gamma(r,\omega)}e^{\xi^{\frac{1}{\beta}}}\xi^{\frac{2}{\beta}-2}\Big[\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{\beta}}E_{2,1}\left(-\frac{x^2}{y^\beta}\xi\right) - \frac{\pi x\sqrt{\xi}}{2\cos\frac{\pi}{\beta}y^{\beta/2}}E_{2,2}\left(-\frac{x^2}{y^\beta}\xi\right)+$$

$$+\frac{\pi}{\sin\frac{2}{\beta}\pi}\frac{x^{2-\frac{2}{\beta}}}{y^{\beta-1}}\xi^{1-\frac{1}{\beta}}E_{2,3-\frac{2}{\beta}}\left(-x^2y^{-\beta}\xi\right)\Big]d\xi.$$

Отсюда с помощью замены $\xi^{1/\beta} = p$ придем к выражению

$$v(x,y) = \frac{1}{2}\Big[y^{\beta-2}e_{2,\beta}^{1,\beta-1}\left(-\frac{x^2}{y^\beta}\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{\beta}xy^{\frac{\beta}{2}-2}e_{2,\beta}^{2,\frac{\beta}{2}-1}\left(-\frac{x^2}{y^\beta}\right)+$$

$$+\frac{x^{2-\frac{2}{\beta}}}{y\cos\frac{\pi}{\beta}}e_{2,\beta}^{3-\frac{2}{\beta},0}\left(-\frac{x^2}{y^\beta}\right)\Bigg], \tag{35}$$

где $e_{\alpha,\theta}^{\mu,\delta}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\delta\pi)}e^t t^{-\delta}E_{\alpha,\mu}(zt^\theta)dt$ – функция типа Райта [2, с. 22]. Как и выше, через $\gamma(\varepsilon,\delta\pi)$ обозначен контур Ханкеля, $\frac{1}{2}<\delta\le 1$, $1-\delta\theta>\frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, согласно формуле (32) имеем $u(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{2}(-1)^k\left[v(x-a_k,y)+v(x+a_k,y)\right]$, где $v(x,y)$ имеет вид (35).

4. Единственность решения. Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $y^{2-\beta}u(x,y)\in C(\bar\Omega)$, $u_x(x,y)$, $D_{0y}^{\beta-1}u(x,y)\in C(\bar\Omega)$ *и выполнены условия*

$$\lim_{x\to\infty}D_{0y}^{\beta-2}u(x,y)=0,\quad 0\le y\le\infty, \tag{36}$$

$$\lim_{y\to\infty}D_{0y}^{\beta-2}u(x,y)=0,\quad 0\le x\le\infty. \tag{37}$$

Тогда задача (1)–(3) имеет не более одного решения.

Доказательство. Мы покажем, что при условиях теоремы однородная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение. Домножим уравнение (1) на функцию $D_{0y}^{\beta-2}u$ и представим в следующем виде:

$$D_{0y}^{\beta-2}u\cdot Lu\equiv\left(D_{0y}^{\beta-2}u\,u_x\right)_x-D_{0y}^{\beta-2}u_x\,u_x+D_{0y}^{\beta-2}u\,D_{0y}^{\beta}u.$$

Дальнейшие вычисления дают тождество

$$D_{0y}^{\beta-2}u\cdot Lu\equiv\left(D_{0y}^{\beta-2}u\cdot u_x\right)_x+\left(D_{0y}^{\beta-2}u\,D_{0y}^{\beta-1}u\right)_y-D_{0y}^{\beta-2}u_x\,u_x-\left(D_{0y}^{\beta-1}u\right)^2.$$

Интегрируя полученное тождество по области $\{(x,y):\varepsilon<x<a,\delta<y<b\}\subset\Omega$, имеем

$$\int\limits_\varepsilon^a\int\limits_\delta^b Lu\,D_{0y}^{\beta-2}u\,dxdy=\int\limits_\delta^b\left[D_{0y}^{\beta-2}u(a,y)\,u_x(a,y)-D_{0y}^{\beta-2}u(\varepsilon,y)\,u_x(\varepsilon,y)\right]dy+$$

$$+\int\limits_\varepsilon^a\left[D_{0y}^{\beta-2}u\,D_{0y}^{\beta-1}u\Big|_{y=b}-D_{0y}^{\beta-2}u\,D_{0y}^{\beta-1}u\Big|_{y=\delta}\right]dx-\int\limits_\varepsilon^a\int\limits_\delta^b\left[D_{0y}^{\beta-2}u_x\,u_x+\left(D_{0y}^{\beta-1}u\right)^2\right]dxdy.$$

Отсюда при $\varepsilon\to 0$ и $\delta\to 0$ получаем

$$\int\limits_0^b D_{0y}^{\beta-2}u(a,y)\,u_x(a,y)dy+\int\limits_0^a D_{0y}^{\beta-2}u\,D_{0y}^{\beta-1}u\Big|_{y=b}dx-\int\limits_0^a\int\limits_0^b\left[u_xD_{0y}^{\beta-2}u_x+\left(D_{0y}^{\beta-1}u\right)^2\right]dxdy=0. \tag{38}$$

Устремляя a и b к ∞ с учетом условий (36), (37) теоремы будем иметь

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^a\int\limits_0^b\left[u_xD_{0y}^{\beta-2}u_x+\left(D_{0y}^{\beta-1}u\right)^2\right]dxdy=0.$$

Известно, что оператор дробного интегрирования является положительным [19],

$$\int\limits_0^a f(x)D_{0x}^{\alpha}f(x)\,dx\ge 0,\ \alpha<0,$$

$\int\limits_0^a f(x)D_{0x}^{\alpha}f(x)\,dx=0$ тогда и только тогда, когда $f(x)=0$. Поэтому из интеграла (38) следует, что u_x и $D_{0y}^{\beta-1}u=0$. Тогда имеем $u=g(y)$, $g(y)=\frac{y^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}$. Но $D_{0y}^{\beta-2}g(y)=D_{0y}^{\beta-2}\frac{y^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}=1$, что противоречит краевому условию $\lim\limits_{y\to 0}D_{0y}^{\beta-2}u=0$. Следовательно, так как $y^{2-\beta}u\in C(\bar\Omega)$, получаем $u\equiv 0$ всюду в области Ω. Теорема 2 доказана.

Заключение. В работе рассмотрена задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Римана – Лиувилля. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемой задачи.

Список литературы

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит; 2003. 272 с.
2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука; 2005. 199 с.
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок; 2008. 512 с.
4. Нахушев А.М. О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием. *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.* 2007;9(1):128–137.
5. Dzhafarov R., Vasylyeva N. Bounadary value problems coverned by superdiffusion in the right angle: Existence and Regularity. *Journal of Mathematics.* 2018. Article ID 5395124; 29 p.
6. Псху А.В. Аналог формулы Шварца для системы Коши – Римана дробного порядка. *Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XIII "Современные методы в теории краевых задач".* Воронеж; 2002. с. 127.
7. Мамчуев М.О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: Издательство Кабардино-Балкарского научного центра РАН; 2013. 200 с.
8. Масаева О.Х. Решение краевой задачи для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки.* 2022;40(3):53–63.
9. Масаева О.Х. Задача Неймана для обобщенного уравнения Лапласа. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки.* 2018;23(3):83–90.
10. Масаева О.Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной. *Челябинский физико-математический журнал.* 2017;2(3):312–322.
11. Богатырева Ф.Т. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором Джрбашяна – Нерсесяна. *Доклады Адыгской(Черкесской) Международной академии наук.* 2015;17(2):17-24.
12. Богатырева Ф.Т. О представлении решения уравнения диффузии с операторами Джрбашяна – Нерсесяна *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки.* 2022;40(3):16-27.
13. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка *Изв. АН АрмССР.* 1968;3(1):3-28.
14. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука; 1966. 672 с.
15. Pskhu A.V. The Stankovich Integral Transform and Its Applications. Chapter 9. In book "Special functions and analysis of differential equations". New York. Chapman and Hall/CRC. 2020. 370.
16. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В. 3т. Т.1. Элементарные функции. - 2-е изд. исправ.- М.: Физматлит; 2002. 632 с.
17. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит; 2001. 576 с.
18. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз; 1963. 1108 с.
19. Нахушев А.М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа. *Дифференциальные уравнения.* 1998;34(1):101-109.

References

1. Nakhushev AM. Drobnoye ischisleniye i ego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2003. 272 p.
2. Pskhu AV. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Partial differential equations of fractional order]. Moscow: Nauka Publ., 2005. 199 p.
3. Uchaikin VV. Metod drobnykh proizvodnykh [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk: Artichoke Publ.; 2008. 512 p.
4. Nakhushev AM. O matematicheskikh i informatsionykh technologiyakh modelirovaniya i upravleniya regional'nym razvitiyem [On mathematical and information technologies for modeling and managing regional development]. *Adyghe Int. Sci. J.* 2007;9(1):128-137.
5. Dzhafarov R., Vasylyeva N. Bounadary value problems coverned by superdiffusion in the right angle: Existence and Regularity. *Journal of Mathematics.* 2018. Article ID 5395124; 29 p.
6. Pskhu AV. Analog formuly Shvartsa dlya systemy Koshi-Rimana drobnogo poryadka [An analogue of the Schwartz formula for the Cauchy-Riemann system of fractional order] Sovremennye metody v teorii granichnykh zadach [Modern methods in the theory of boundary value problems]: proceedings of the Voronezh Spring Mathematical Schools «Pontryagin Readings - XIII». Voronezh; 2002. P. 127.
7. Mamchuev MO. Kraevye zadachi dlya uravneniy i system uravneniy s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka [Boundary value problems for equations and systems of partial differential equations of fractional order] Nalchik: Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS Publ.; 2013. 200 p.

8. Masaeva OKh. Reshenie kraevoy zadachi dly obobschenogo uravneniya Laplasa s drobnoy proizvodnoy [Solution of the boundary problem for the generalized Laplace equation with a fractional derivative]. *Vestn. KRAUNTS. Fiz.-Mat. Nauki.* 2022;40(3):53-63.
9. Masaeva OKh. Zadacha Neymana dlya obobschenogo uravneniya Laplasa [Neumann problem for the generalized Laplace equation] *Vestn. KRAUNTS. Fiz.-Mat. Nauki.* 2018;23(3):83-90.
10. Masaeva OKh. Zadacha Dirikhle dlya obobschenogo uravneniya Laplasa s drobnoy proizvodnoy [The Dirichlet problem for the generalized Laplace equation with fractional derivative] *Chelyabinskii fiziko-matematicheskii zhurnal [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal].* 2017;2(3):312-322.
11. Bogatyreva FT. Kraevaya zadacha dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka s operatorom Dzhrbashyana-Nersesyana [Boundary value problem for a first order partial differential equation with the Dzhrbashyan-Nersesyan operator] *Adyghe Int. Sci. J.* 2015; 17(2):17-24.
12. Bogatyreva FT. O predstavlenii resheniya uravneniya diffuzii s operatorami Dzhrbashyana-Nersesyana [On representation of solution of the diffusion equation with Dzhrbashyan-Nersesyan operators]. *Vestn. KRAUNTS. Fiz.-Mat. Nauki.* 2022; 40(3):16-27.
13. Dzhrbashyan MM, Nersesyan AB. Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differentsialnykh uravnenyi drobnogo poryadka *Изв. АН АрмССР.* 1968;3(1):3–28.
14. Dzhrbashyan MM. Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti [Integral transformations and representations of functions in the complex domain]. Moscow: Nauka Publ.; 1966. 672 p.
15. Pskhu AV. The Stankovich Integral Transform and Its Applications. Chapter 9. In book "Special functions and analysis of differential equations". New York. Chapman and Hall/CRC; 2020. 370 p.
16. Prudnikov AP., Brychkov YuA., Marichev OI. Integraly i ryady. Elementarnye funktsii [Integrals and series. Elementary functions]. V. 1. Moscow: Fizmatlit Publ; 2002. 632 p.
17. Polyanin AD, Zaitsev VF. Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]. M.: Fizmatlit; 2001. 576 p.
18. Gradshtein IS, Ryzhik IM. Tablitsi integralov, summ, ryadov i proizvedenii [Tables of integrals, sums, series and products]. M.: Fizmatgiz; 1963. 1108 p.
19. Nakhushev AM. On the positivity of continuous and discrete differentiation and integration operators that are very important in fractional calculus and in the theory of equations of mixed type. *Differential Equations.* 1998; 34(1):103-112.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 17.02.2024
Поступила после рецензирования 01.04.2024
Принята к публикации 06.04.2024

Received February 17, 2024
Revised April 1, 2024
Accepted April 6, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Масаева Олеся Хажисмеловна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела Дробное исчисление, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Olesya Kh. Masaeva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher at the Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, Nalchik, Russia

К содержанию