

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 537.8
MSC 78A40
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-136-145

Индикация расходимости пучка ультрарелятивистских электронов по дифрагированному переходному излучению

Блажевич С. В.¹, Бронникова М. В.¹, Носков А. В.²

¹ Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

² Московский технический университет связи и информатики,
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а
blazh@bsu.edu.ru, mvb12@mail.ru, a.v.noskov@mtuci.ru

Аннотация. Рассматривается дифрагированное переходное излучение (ДПИ), возбуждаемое пучком ультрарелятивистских электронов, проходящих через тонкую монокристаллическую пластину в геометрии рассеяния Лауэ. Получено выражение, описывающее угловую плотность ДПИ для случая, когда путь электронов в мишени значительно меньше, чем длина экстинкции рентгеновских фотонов в кристалле. Проведенные численные расчеты выхода фотонов ДПИ в направлении рассеяния Брэгга для различных значений телесного угла регистрации показывают значительное влияние расходимости электронного пучка на выход фотонов. Делается заключение о возможности использования выхода ДПИ, имитированного в заданный телесный угол, для индикации расходимости электронного пучка. Результаты расчетов показывают, что предлагаемая в настоящей работе формула может быть базой для развития метода измерения расходимости пучка релятивистских электронов ультравысокой энергии на основе углового распределения ДПИ.

Ключевые слова: релятивистские электроны, дифрагированное переходное излучение, индикация расходимости электронного пучка

Для цитирования: Блажевич С. В., Бронникова М. В., Носков А. В. 2024. Индикация расходимости пучка ультрарелятивистских электронов по дифрагированному переходному излучению. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 136–145.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-136-145

Original Research

Indication of the Divergence of a Beam of Ultrarelativistic Electrons by a Diffracted Transition Radiation

Sergei V. Blazhevich¹, Marina V. Bronnikova¹, Anton V. Noskov²

¹ Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

² Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8a Aviamotornaya St., Moscow, 111024, Russia
blazh@bsu.edu.ru, mvb12@mail.ru, a.v.noskov@mtuci.ru

Abstract. The diffracted transition radiation (DTR) produced by a beam of relativistic electrons traversing a thin single-crystal plate in the Laue scattering geometry is considered. We have obtained the expression describing the angular density of the DTR for the case when the path length of the electron in the target is far less than the extinction length of X-rays in the crystal. It is shown that in this case the considered DTR process has the explicit kinematic character. The numerical calculations of the yield of DTR photons in the direction of Bragg scattering performed for various values of the registration solid angle show a significant influence of the electron beam divergence on the photon yield. We have arrived at a conclusion that the measured photon output of DTR radiation emitted in a given solid angle can be used for indication of the electron beam divergence. The model calculations of the electron beam divergence parameters on the base of “measured” yield of DTR photons traversing through a slit collimator are carried out. The results of the calculation show that the proposed in this work formula can be successfully used as a base for the development of methods for measuring the divergence of beams of relativistic ultrahigh-energy electrons based on DTR angular distribution.

Keywords: Relativistic Electrons, Diffracted Transition Radiation, Indication of Electron Beam Divergence

For citation: Blazhevich S. V., Bronnikova M. V., Noskov A. V. 2024. Indication of the Divergence of a Beam of Ultrarelativistic Electrons by a Diffracted Transition Radiation. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 136–145. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-136-145

1. Введение. При проведении фундаментальных и прикладных экспериментальных исследований на пучках электронов высокой энергии исследователи сталкиваются с проблемой недостаточности информации о параметрах используемых пучков. Поперечные размеры и расходимость являются основными параметрами пучка. Главную проблему физиков, имеющих дело с пучками электронов в области энергий 100-1000 МэВ, представляют измерения поперечных размеров пучка, поскольку расходимость пучков на современных ускорителях, имеющих поперечные размеры порядка или больше, чем 10 микрон, составляет незначительную (порядка 0.001 мрад) величину.

В настоящее время в стадии разработки находятся два новых электрон-позитронных коллайдера [1, 2]. В этих установках электроны и позитроны будут разгоняться до энергии 250 ГэВ в пучках с очень малыми поперечными размерами (5-100 нм), и измерение расходимости пучка станет главной проблемой. Решение этой проблемы позволит более точно интерпретировать экспериментальные данные как в фундаментальных, так и прикладных исследованиях. Недавно в работах [3, 4] была экспериментально исследована возможность использования для диагностики поперечных размеров пучков релятивистских электронов параметрического рентгеновского излучения (ПРИ). Влияние расходимости пучка электронов на ПРИ в кристалле было экспериментально исследовано в Томске и Токио [5] для электронов с энергией 600 МэВ и 800 МэВ соответственно. Исследователи показали, что ориентационная зависимость PXR, генерируемого релятивистскими электронами в кристалле, чувствительна к расходимости пучка и предложили использовать PXR в качестве простого средства определения угловой расходимости пучков заряженных частиц высокой энергии. В [6] авторы предложили использовать параметрическое рентгеновское излучение, генерируемое в тонких кристаллах, для получения оперативной информации о положении и размерах электронного пучка.

PXR в направлении брэгговского рассеяния сопровождается дифрагированным переходным излучением (ДПИ) [7]-[10], генерируемым на передней границе кристаллической мишени. В [11] разработана динамическая теория когерентного рентгеновского излучения, возбуждаемого расходящимся пучком релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластину в геометрии рассеяния Лауэ, для общего случая асимметричного отражения электронного поля относительно поверхности мишени.

Выражения для угловой плотности когерентного излучения, полученные в [11], показывают, что фотоны ДПИ, испускаемые пучками электронов с энергиями, превышающими несколько сотен МэВ, имеют значительно более узкое угловое распределение, чем фотоны ПРИ, в результате чего угловая плотность ДПИ становится более чувствительной к расходимости пучка. При дальнейшем увеличении энергии релятивистского электрона угловое распределение фотонов ДПИ, генерируемых им, становится более узким, в то время как ширина углового распределения фотонов ПРИ достигает насыщения и перестает изменяться. При этом максимум угловой плотности ПРИ располагается далеко за пределами угловой области ДПИ, в которой его интенсивность становится во много раз ниже интенсивности ДПИ. Таким образом, при увеличении энергии электронов ДПИ становится единственным подходящим средством для индикации параметров пучков электронов с релятивистским фактором $\gamma > 2000$. Для этой цели важно определить наиболее подходящие характеристики его углового распределения ДПИ. В частности, можно ожидать, что использование интегральных характеристик DTR значительно упростит процесс индикации. В настоящей статье мы демонстрируем возможность использовать для этой цели выход фотонов ДПИ, измеренный в заданном телесном угле (выход коллимированного ДПИ). Дифрагированное переходное излучение релятивистских электронов в монокристаллической мишени исследуется в геометрии рассеяния Лауэ. Рассмотрен случай очень тонкой мишени, когда многократное рассеяние электронов на атомах мишени незначительно. Это важный случай, поскольку он соответствует условиям измерения с очень небольшими искажениями в измеряемых параметрах. Для случая, когда длина пути электрона в мишени существенно меньше длины экстинкции, получено выражение, описывающее угловую плотность ДПИ. Это выражение имеет выраженный кинематический характер.

Следует отметить, что ранее ДПИ при таких малых толщинах мишени никем не рассматривалось. Традиционно ДПИ рассматривалось только для случая, когда длина пути электрона намного превышает длину экстинкции, т. е., когда волны ДПИ в монокристалле подвергаются динамической дифракции [7]-[11]. В этой связи формулы, использованные в [7]-[11], естественно, являются динамическими.

В настоящей статье мы исследуем возможность использования интегрального выхода фотонов коллимированного ДПИ, испускаемого пучком ультрарелятивистских электронов, проходящих через очень тонкую монокристаллическую мишень, для анализа расходимости пучка. Мы предполагаем, что вклад PXR в когерентное излучение в этих условиях пренебрежимо мал, поэтому не будем его рассматривать.

2. Геометрия радиационного процесса. Рассмотрим пучок релятивистских электронов, пересекающих кристаллическую пластину (Рис. 1). Взаимодействие каждого электрона в пучке с мишенью рассматривается как независимое, следовательно, спектрально-угловая плотность излучения, генерируемого электронным пучком, может быть получена путем усреднения выражения для спектрально-угловой плотности излучения, генерируемого отдельным электроном в пучке, по всем его возможным траекториям в мишени.

Для этой цели в выражение для спектрально-угловой плотности ДПИ [11] введена угловая переменная ψ , связывающая вектор скорости электрона (в единицах скорости света в свободном пространстве) с единичным вектором \mathbf{e}_1 оси электронного пучка. Также введена угловая переменная θ_0 , связывающая единичный вектор в направлении \mathbf{n} падающего псевдофотона кулоновского электронного поля с вектором \mathbf{e}_1 , и угловая переменная, связывающая единичный вектор в направлении \mathbf{n}_g дифракции фотонов с единичным вектором \mathbf{e}_1 (которые определяются соотношениями Брэгга: $\mathbf{e}_1\theta_0 = 0$ и $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B$). Эти соотношения для случая ультрарелятивистских электронов и малых значений угловых переменных, описывающих угловые распределения электронов и фотонов, имеют следующий вид [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2\right) \mathbf{e}_1 + \psi, & \mathbf{e}_1\psi &= 0 \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right) \mathbf{e}_1 + \theta_0, & \mathbf{e}_1\theta_0 &= 0, & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= \cos 2\theta_B, \\ \mathbf{n}_g &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \mathbf{e}_2 + \theta, & \mathbf{e}_2\theta &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}$ Лоренц-фактор частицы, θ_B – угол рассеяния Брэгга. Угловые переменные раскладываются по компонентам параллельной и перпендикулярной к плоскости Рис. 1:

$$\theta = \theta_{\parallel} + \theta_{\perp}, \quad \theta_0 = \theta_{0\parallel} + \theta_{0\perp}, \quad \psi = \psi_{\parallel} + \psi_{\perp}.$$

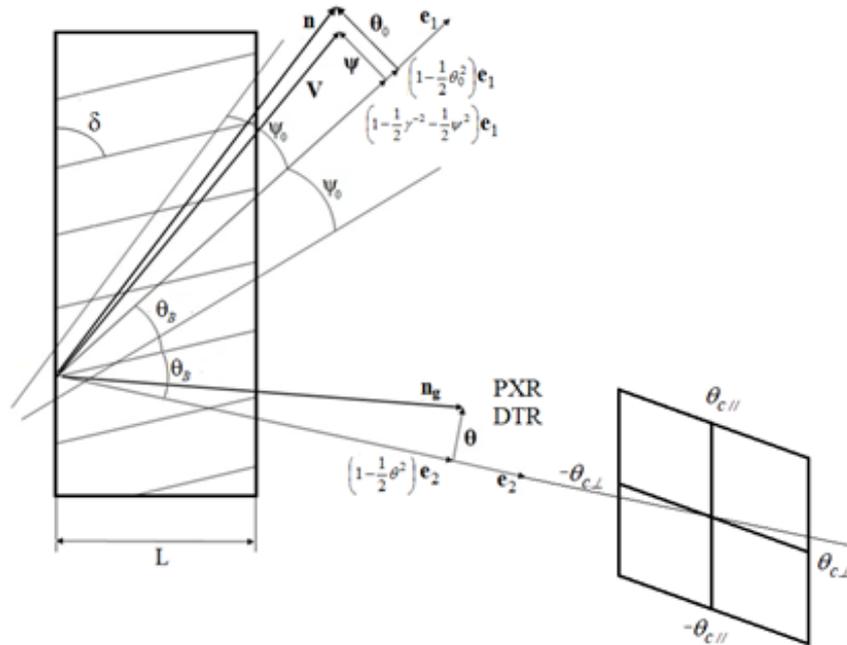


Рис. 1. Геометрия процесса излучения. Телесный угол регистрации фотонов ДПИ $\Delta\Omega = 4\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp}$, где $\theta_{c\parallel}$ и $\theta_{c\perp}$ – угловые поперечные пределы коллиматора относительно центра коллиматора, расположенного на оси \mathbf{e}_2 (см. пределы интегрирования в формуле (11))

Fig. 1. Geometry of the radiation process. Solid angle of registration of DPI photons $\Delta\Omega = 4\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp}$, where $\theta_{c\parallel}$ and $\theta_{c\perp}$ – angular transverse limits of the collimator relative to the center of the collimator located on the \mathbf{e}_2 axis (see integration limits in formula (11))

3. Спектрально-угловая плотность ДПИ в тонкой монокристаллической пластинке. Мы будем использовать формулу, полученную в работе [11], описывающую спектрально-угловую плотность ДПИ, возбуждаемого релятивистским электроном в монокристалле произвольной толщины L :

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Omega^{(s)^2} \left(\frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'} \right)^2 R_{DTR}^{(s)} \quad (2)$$

где

$$R_{DTR}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2 + \varepsilon} \left[\exp(-2b^{(s)} p^{(s)} \Delta^{(1)}) + \exp(-2b^{(s)} p^{(s)} \Delta^{(2)}) - 2 \exp(-b^{(s)} p^{(s)} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}) \cdot \cos \left(\frac{2b^{(s)} \sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}}{\varepsilon} \right) \right]. \quad (2b)$$

Здесь использованы обозначения $\Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}$, $\Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}$,

$$\Delta^{(2)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} + \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}} + \frac{k^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}}, \Delta^{(1)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}} - \frac{k^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}}, \varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)},$$

$$p^{(s)} = \frac{\chi_0''}{|\chi_g' C^{(s)}|}, b^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \frac{L}{L_{ext}^{(s)}}, v^{(s)} = \frac{\chi_g' C^{(s)}}{\chi_0'}, k^{(s)} = \frac{\chi_g'' C^{(s)}}{\chi_0''}, \xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 - \varepsilon}{2v^s},$$

$$\eta^{(s)}(\omega) = \frac{2 \sin^2 \theta_B}{V^2 |\chi_g' C^{(s)}|} \left(\frac{\omega(1 - \theta_{\parallel} \cot \theta_B)}{\omega_B} - 1 \right), C^{(1)} = 1, C^{(2)} = \cos 2\theta_B, d\Omega \equiv d\theta_{\parallel} \cdot d\theta_{\perp}, \quad (3)$$

$\chi_g = \chi_g' + i\chi_g''$ коэффициент Фурье-разложения диэлектрической восприимчивости кристалла в ряд по векторам обратной решетки \mathbf{g} , $\chi_0 = \chi_0' + i\chi_0''$ средняя диэлектрическая восприимчивость.

Мы используем систему единиц Хэвисайда – Лоренца.

Выражение (2) описывает спектрально-угловую плотность ДПИ релятивистского электрона, пересекающего монокристаллическую пластинку, и учитывает угловое отклонение вектора скорости электрона (угол $\psi(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel})$) от оси пучка электронов \mathbf{e}_1 . При $s = 1$ выражения (2) описывает волны σ -поляризованные, а при $s = 2$ π -поляризованные. Это выражение было получено в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции для общего случая асимметричного отражения волн излучения. Асимметрия отражения для фиксированного угла рассеяния Брэгга определяется углом между отражающей системой параллельных атомных плоскостей кристалла и поверхностью мишени (угол δ).

Параметр ε определяет степень асимметрии отражения кулоновского поля электрона относительно поверхности мишени. Отметим, что угол падения электрона на поверхность мишени ($\delta - \theta_B$) уменьшается при увеличении параметра ε .

Параметр $b^{(s)}$ равен половине пути электрона в мишени $L_e = \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}$, выраженного в длинах экстинкции $L_{ext}^{(s)} = \frac{1}{\omega |\chi_g' C^{(s)}|}$.

Мы будем рассматривать излучение, возбуждаемое пучком релятивистских электронов в тонкой непоглощающей монокристаллической пластинке, т. е. при условии, когда наибольшая длина пути дифрагированного фотона в пластинке $L_f = \frac{L}{\sin(\delta + \theta_B)}$ будет намного короче длины поглощения рентгеновских волн в кристалле $L_{abs} = \frac{1}{\omega \chi_0''}$:

$$2 \frac{b^{(s)} p^{(s)}}{\varepsilon} = \frac{l_f}{L_{abs}} \ll 1. \quad (4)$$

Легко показать, что в этом случае выражение (2b) может быть приведено к виду

$$R_{DTR}^{(s)} = \frac{4\varepsilon^2}{\xi^{(s)^2 + \varepsilon} \varepsilon} \sin^2 \left(b^{(s)} \frac{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}}{\varepsilon} \right). \quad (5)$$

Можно отметить, что параметр $b^{(s)}$ может принимать значения $b^{(s)} \gg 1$ даже тогда, когда удовлетворено неравенство (4).

Чтобы получить угловую плотность ДПИ, мы проводим интегрирование выражения (2) по частоте ω , используя соотношение $\frac{d\omega}{\omega} = \frac{|\chi_g' C^{(s)}|}{2 \sin^2 \theta_B} d\xi^{(s)}$, которое следует из выражения для функции $\xi^{(s)}(\omega)$ в (3). При этом угловая плотность ДПИ примет следующий вид:

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{|\chi_g' C^{(s)}| \Omega^{(s)^2}}{\sin^2 \theta_B} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{DTR}^{(s)} d\xi^{(s)}. \quad (6)$$

Для случая очень тонкой мишени мы полагаем, что $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$. В выражении (6) интеграл спектральной функции $R_{DTR}^{(s)}$, представленной в форме (5), может быть аппроксимирован с использованием формулы $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ к виду $\int_{-\infty}^{\infty} R_{DTR}^{(s)} d\chi^{(s)}(\omega) \approx 4\pi\varepsilon b^{(s)}$. В этом случае формула для угловой плотности ДПИ (6) примет следующий вид:

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B \chi_0'^2 \chi_g'^2 C^{(s)^2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} \times \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2)^2 (\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0')^2} \varepsilon \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}. \quad (7)$$

Если релятивистские электроны имеют очень высокую энергию $\left(\gamma \gg \frac{1}{\sqrt{|\chi_0'|}}\right)$ и модуль угла отклонения электрона в пучке $\psi(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel})$ меньше или порядка характерного значения угла, соответствующего максимуму в распределении ДПИ (γ^{-1}), то будет выполняться условие $\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 \ll -\chi_0'$ и выражение (7) примет следующий вид:

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B \chi_0'^2 \chi_g'^2 C^{(s)^2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2)^2} \varepsilon \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}. \quad (8)$$

Пропорциональная зависимость угловой плотности от толщины монокристаллической мишени L в формуле (8), описывающей угловую плотность ДТР, генерируемого электроном высокой энергии в тонкой монокристаллической мишени, указывает на ее кинематический характер. Условие $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$ означает, что длина пути электрона значительно меньше длины экстинкции рентгеновских волн в кристалле, что исключает перекачку падающих и дифрагированных волн друг в друга. В этом случае ДТР формируется, в основном, когда электрон приближается к границе мишени в вакууме. При этом электроны в среде вблизи границы приводятся в колебательное движение и испускают электромагнитные волны, которые конструктивно складываются в направлении рассеяния Брэгга. В этих условиях динамическое отражение волн TR от системы параллельных атомных плоскостей кристалла отсутствует.

4. Влияние расходимости пучка электронов на выход ДПИ. Поскольку ДТР электронов при сверхвысоких энергиях имеет узкое угловое распределение, целесообразно рассмотреть возможность использования зависимости нормированного на один электрон выхода фотонов ДПИ в заданном телесном угле вблизи направления рассеяния Брэгга от начальной расходимости электронного пучка. Для этого мы усредним выражения для числа испущенных фотонов по возможным прямолинейным траекториям электрона в пучке. В качестве примера мы усредняем ДПИ, возбуждаемое электронным пучком с гауссовым угловым распределением

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi\psi_0^2} e^{-\frac{\psi^2}{\psi_0^2}}, \quad (9)$$

где параметр ψ_0 будем называть расходимостью пучка излучающих электронов (см. Рис. 1) Угол ψ_0 определяет конус, ограничивающий часть электронного пучка, вне которой плотность потока электронов спадает больше, чем в e раз по сравнению с плотностью на оси пучка.

В качестве основного для числа $\langle N_{DTR} \rangle$ фотонов ДПИ, излучаемых в телесный угол $(\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp})$, будем использовать выражение

$$\langle N_{DTR} \rangle = \frac{1}{\pi\psi_0^2} \int_{-\theta_{c\parallel}}^{\theta_{c\parallel}} \int_{-\theta_{c\perp}}^{\theta_{c\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) \cdot e^{-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}. \quad (10)$$

Это выражение содержит суммирование угловой плотности ДТР по двум проекциям поляризации фотонов, интегрирование по всем углам излучения фотонов и усреднение по угловому распределению (9) электронов в пучке. Основываясь на выражении (8) для угловой плотности ДПИ, мы получим соответствующее выражение для числа $\langle N_{DTR} \rangle$ фотонов ДПИ, излучаемых пучком ультрарелятивистских электронов в заданный телесный угол вблизи направления рассеяния Брэгга из тонкой монокристаллической мишени:

$$\langle N_{DTR} \rangle_{b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}} = \frac{e^2 \omega_B \chi_g'^2}{4\pi \sin^2 \theta_B} \frac{\varepsilon L}{\sin(\delta - \theta_B)} \frac{1}{\pi\psi_0^2} \times \int_{-\theta_{c\parallel}}^{\theta_{c\parallel}} \int_{-\theta_{c\perp}}^{\theta_{c\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 \cos^2 2\theta_B}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2} e^{-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}. \quad (11)$$

Кривые на Рис. 2, построенные по формуле (11) (кружки) с использованием выражения (8) для угловой плотности DTR и по формуле (10) (сплошные кривые) с использованием угловой плотности в виде (6), демонстрируют зависимость приведенного к одному падающему электрону среднего числа фотонов DTR в направлении Брэгга (ось e_2), испускаемых в прямоугольный коллиimator с углами коллимации $2\theta_{c\perp}$ и $2\theta_{c\parallel}$ от расходимости ψ_0 пучка электронов, падающих на кристалл, (см. на Рис. 1). Кривые построены для различных значений телесного угла регистрации при условии $\theta_{c\perp} = \theta_{c\parallel}$. Расчеты выполнены для тонкой алмазной мишени C (111).

Расхождение между сплошными и представленными точками кривыми отражает нарушение условия $\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 \ll -\chi'_0$ при использовании (11) в диапазоне углов $\theta_{c\perp} = \theta_{c\parallel} > 3/\gamma$.

Из Рис. 2 видно, что общий выход ДПИ практически не зависит от расходимости пучка при достаточно большом угле коллимации. Оптимальная коллимация должна обеспечивать максимальную зависимость выхода ДПИ от расходимости. На Рис. 3 представлены некоторые кривые из Рис. 2 в более удобном масштабе.

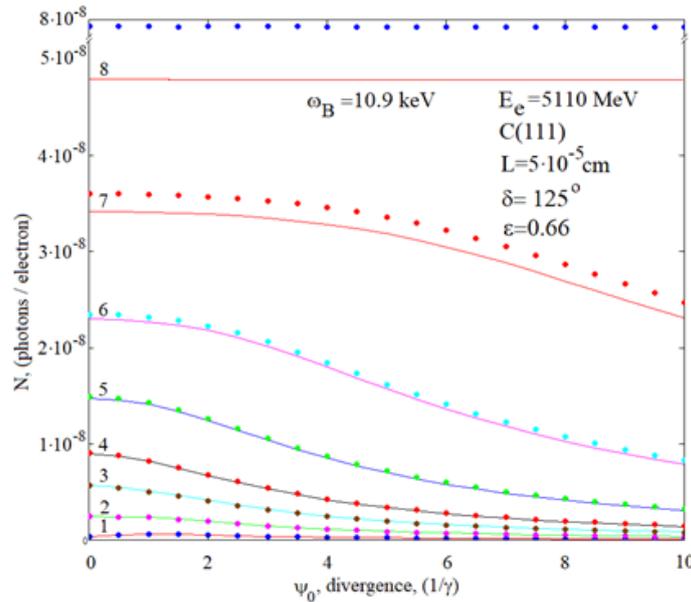


Рис. 2. Зависимость выхода фотонов ДПИ $N_p h$ от расходимости пучка электронов ψ_0 , рассчитанная по точной формуле (10) с использованием угловой плотности в виде (6) (сплошная линия) и по формуле (11) (жирные точки).

Лоренц-фактор электрона $\gamma = 10^4$. Телесный угол регистрации

$$\Delta\Omega = 4(\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp}); \theta_{c\parallel} = \theta_{c\perp} = 0.5\gamma^{-1}(1), 1\gamma^{-1}(2), 1.5\gamma^{-1}(3), 2\gamma^{-1}(4), 3\gamma^{-1}(5), 5\gamma^{-1}(6), 10\gamma^{-1}(7), 100\gamma^{-1}(8)$$

Fig. 2. Dependence of the DPI photon yield $N_p h$ on the electron beam divergence ψ_0 calculated using the exact formula (10) using the angular density in the form (6) (solid line) and formula (11) (thick dots). The Lorentz factor of the electron is $\gamma = 10^4$.

Solid registration angle

$$\Delta\Omega = 4(\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp}); \theta_{c\parallel} = \theta_{c\perp} = 0.5\gamma^{-1}(1), 1\gamma^{-1}(2), 1.5\gamma^{-1}(3), 2\gamma^{-1}(4), 3\gamma^{-1}(5), 5\gamma^{-1}(6), 10\gamma^{-1}(7), 100\gamma^{-1}(8)$$

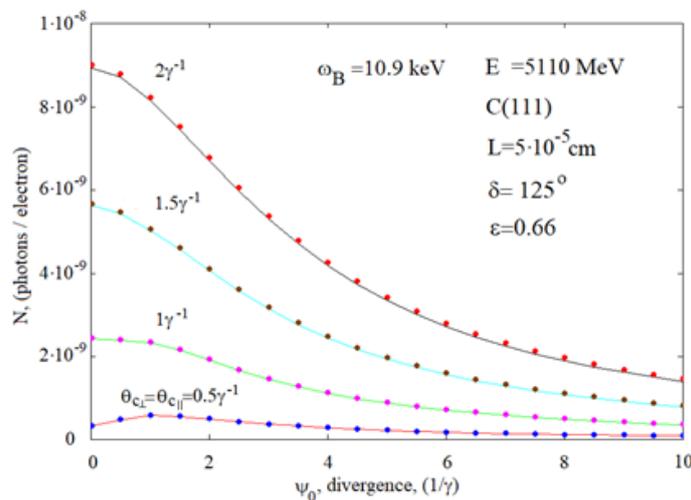


Рис. 3. То же, что на Рис. 2, но в другом масштабе

Fig. 3. The same as in Fig. 2, but on a different scale

Угловые распределения угловой плотности ДПИ при различных значениях расходимости $\psi_0 = \sqrt{\psi_{0\perp}^2 + \psi_{0\parallel}^2}$ для случая $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel}$ показаны на Рис. 4.

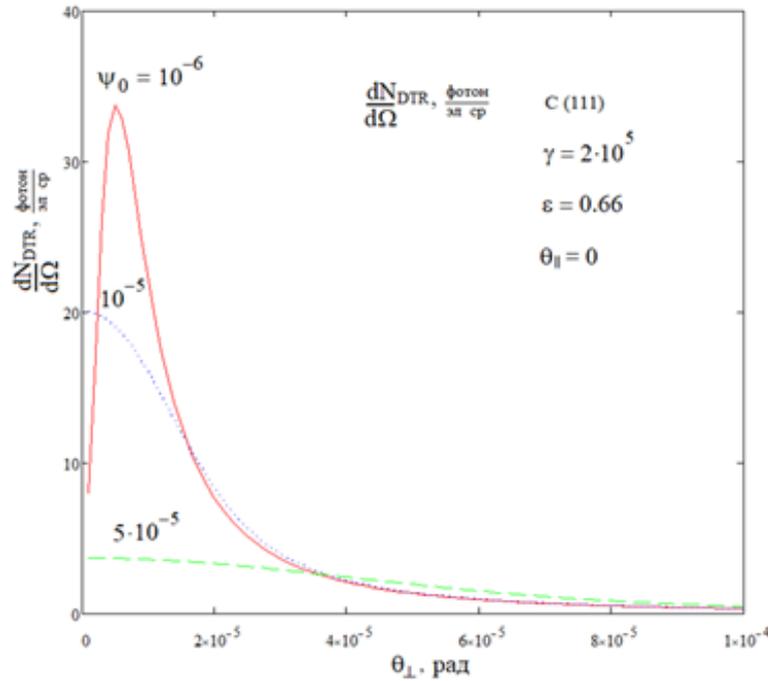


Рис. 4. Угловая плотность распределения ДПИ для различных значений расходимости электронного пучка
Fig. 4. Angular density of DPI distribution for different values of electron beam divergence

Таким образом, можно сделать вывод, что выход фотонов ДПИ, испускаемых электронным пучком сверхвысокой энергии из тонкой монокристаллической мишени в заданный телесный угол, можно использовать для индикации расходимости такого пучка. Для индикации двухпараметрических угловых распределений, когда $\psi_{0\parallel} \neq \psi_{0\perp}$, следует использовать разные углы коллимации $\theta_{c\parallel} \neq \theta_{c\perp}$ и двумерную гауссову функцию для усреднения угловой плотности ДПИ:

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi\psi_{0\perp}\psi_{0\parallel}} e^{-\left(\frac{\psi_{\perp}^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{\psi_{\parallel}^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)}. \quad (12)$$

Чтобы получить однозначное решение этой задачи, необходимо провести по меньшей мере два независимых измерения выхода фотона DTR, например, с использованием двух щелевых коллиматоров, расположенных перпендикулярно друг другу.

В этом случае необходимо провести два расчета выхода фотонов для индикации параметров расходимости $\psi_{0\perp}$ и $\psi_{0\parallel}$:

$$\begin{aligned} \langle N_{DTR}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) \rangle_{c\perp} &= \frac{1}{\pi\psi_{0\perp}\psi_{0\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\theta_{c\perp}}^{\theta_{c\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) e^{-\left(\frac{\psi_{\perp}^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{\psi_{\parallel}^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}. \\ \langle N_{DTR}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) \rangle_{c\parallel} &= \frac{1}{\pi\psi_{0\perp}\psi_{0\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\theta_{c\parallel}}^{\theta_{c\parallel}} \sum_{s=1}^2 \left(\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) \right) \times \\ &\quad \times e^{-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}. \end{aligned} \quad (13)$$

Целевая функция может быть построена в форме

$$F(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) = \left(\langle N_{DTR}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) \rangle_{c\perp} - N_{DTR}^{measured}_{c\perp} \right)^2 + \left(\langle N_{DTR}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) \rangle_{c\parallel} - N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} \right)^2. \quad (14)$$

Параметры расходимости электронного пучка $\psi_{0\perp}^*$ и $\psi_{0\parallel}^*$ будут определяться из условия минимума целевой функции $F(\psi_{0\perp}^*, \psi_{0\parallel}^*) = \text{Min}(F(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}))$, используя один из существующих методов минимизации двумерной функции.

Характерная ширина углового распределения ДПИ, генерируемого одним электроном равна $\Delta\theta_{DTR} = \frac{1}{\gamma}$, где γ – это релятивистский фактор излучающего электрона.

Чтобы реализовать разрешение определения расходимости пучка, близкое к оптимальному, угловая ширина щелевого коллиматора должна быть выбрана порядка $\theta_{c\perp} = \theta_{c\parallel} \approx \frac{1}{\gamma}$ для $\psi_{0\perp} \approx \psi_{0\parallel} \leq \frac{1}{\gamma}$, либо порядка $\theta_{c\perp} \approx \psi_{0\perp}$ для $\psi_{0\perp} > \frac{1}{\gamma}$ и $\theta_{c\parallel} \approx \psi_{0\parallel}$ для $\psi_{0\parallel} > \frac{1}{\gamma}$.

Точность решения задачи зависит от статистической ошибки $\Delta N_{ph}^{measure} \approx t \sqrt{N_{ph}^{measure}}$ в измерении числа фотонов $N_{ph}^{measure}$, где коэффициент t определяет доверительные интервалы (мы будем использовать $t = 3$, соответствующее вероятности 99.73 %) Например, если мы потребуем, чтобы точность (относительная ошибка) составляла $\delta_N \leq 0.01$, тогда число зарегистрированных фотонов должно быть $N_{ph}^{measure} \geq \frac{t^2}{\delta_N^2} = \frac{9}{0.0001} = 9 \cdot 10^4$, что представляет вполне реальную величину для разрабатываемого ускорителя ИС, где предполагается использовать в одном цикле ускорения $2.6 \cdot 10^{13}$ электронов. Действительно, как это видно из Рис. 2, для рассматриваемой мишени число фотонов ДПИ, генерируемых одним электроном, будет порядка $1 \cdot 10^{-8}$ и соответствующее число фотонов $2.6 \cdot 10^{13} \cdot 10^{-8} = 2.6 \cdot 10^5$, генерируемых электронным пучком, будет достаточным для проведения измерения выхода фотонов ДПИ с требуемой точностью.

Интенсивность DTR может быть увеличена путем увеличения толщины кристаллической мишени в пределах диапазона, удовлетворяющего требуемым условиям минимального влияния процесса измерения на измеряемые параметры электронного пучка, а также путем увеличения параметра асимметрии ε (см. (11)).

Другими параметрами, которые будут использоваться в качестве экспериментальных данных, содержащих некоторые ошибки, являются углы фотонного коллиматора $\theta_{c\perp}, \theta_{c\parallel}$. Таким образом, точность определения расходимости электронного пучка можно выразить в терминах точности параметров $\theta_{c\perp}, \theta_{c\parallel}$ и $N_{measured}^{ph}$. Мы предполагаем, что ошибки в вычислениях отсутствуют. Погрешности абсолютных разностей между вычисленными и измеренными числами фотонов в первом и втором слагаемых целевой функции (14) могут быть соответственно выражены как:

$$\Delta N_{c\parallel}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) = \Delta N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} + \frac{1}{\pi \cdot \psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) \cdot e^{-\left(\frac{\psi_{\perp}^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{\psi_{\parallel}^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} \cdot 2 \cdot \Delta\theta_{c\parallel}, \quad (15a)$$

$$\Delta N_{c\perp}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) = \Delta N_{DTR}^{measured}_{c\perp} + \frac{1}{\pi \cdot \psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) \cdot e^{-\left(\frac{\psi_{\perp}^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{\psi_{\parallel}^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} \cdot 2 \cdot \Delta\theta_{c\perp}, \quad (15b)$$

где второе слагаемое в правой части каждого из этих выражений представляет вклад ошибок, связанных с параметром $\theta_{c\parallel}$ или $\theta_{c\perp}$.

Погрешности вычисленных параметров расходимости $\psi_{0\perp}^*$ и $\psi_{0\parallel}^*$ будут оцениваться как разность между результатами решения задачи минимизации функции (14) для измеренных чисел фотонов $N_{DTR}^{measured}_{c\perp}, N_{DTR}^{measured}_{c\parallel}$ и для чисел $N_{DTR}^{measured}_{c\perp} + \Delta N_{c\perp}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}, N_{DTR}^{measured}_{c\parallel}) + \Delta N_{c\parallel}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel})$.

Наши оценки показали, что относительные ошибки параметров $\theta_{c\perp}, \theta_{c\parallel}$ и $N_{ph}^{measured}$ приводят к относительным ошибкам того же порядка в вычисленных параметрах $\psi_{0\perp}^*$ и $\psi_{0\parallel}^*$.

В табл. 1 представлены результаты расчета параметров расходимости электронного пучка в процессе минимизации целевой функции (14) методом Хука – Дживса (Hooke – Jeeves Method).

Вид целевой функции (14), используемой для моделирования процесса индикации параметров расходимости электронного пучка, показан на Рис. 5, где виден ярко выраженный минимум, соответствующий искомым значениям параметров расходимости.

Для тех же условий, что и в Таблице 1, кроме параметра $N_{DTR}^{measured}_{c\perp}$, значение которого было увеличено на 1 %, мы получили значения для параметров $\psi_{0\perp}^* = \frac{1.0144531}{\gamma}$, то есть на 1.4 % больше, чем в Таблице 1 ($\psi_{0\perp} = \frac{1.000195}{\gamma}$), а для параметра $\psi_{0\parallel}^* = 1.97109$, то есть на 1.4 % меньше, чем в таблице 1 ($\psi_{0\parallel} = \frac{1.999219}{\gamma}$).

5. Заключение. Исследуется дифрагированное переходное излучение, испускаемое пучком релятивистских электронов, пересекающих тонкую монокристаллическую пластину в геометрии рассеяния Лауэ. Получено выражение, описывающее среднее число фотонов DTR, испускаемых расходящимся пучком релятивистских электронов сверхвысоких энергий в тонкой монокристаллической пластине в пределах заданного телесного угла в направлении рассеяния Брэгга. Проведены численные расчеты, демонстрирующие зависимость выхода фотонов коллимированного ДПИ от расходимости пучка.

Таблица 1
Table 1

Значения параметров расходимости $\psi_{0\perp}$ и $\psi_{0\parallel}$, вычисленные в процессе их приближения к «экспериментальному» значению: $(\psi_{0\perp})^{(exp)} = \frac{1}{\gamma}$ и $(\psi_{0\parallel})^{(exp)} = \frac{2}{\gamma}$ по компьютерной программе поиска минимума целевой функции методом минимизации Хука – Дживса.

$\psi_{0\perp}^{(0)} \frac{\psi_{0\perp}^{(0)}=0.1}{\gamma}$ начальные значения параметров, $\Delta\psi_{0\perp}^{(0)} = \Delta\psi_{0\parallel}^{(0)} = 0.2/\gamma$ стартовое приращение параметров, $(\max(\Delta\psi_{0\perp}, \Delta\psi_{0\parallel}) \geq \varepsilon\varepsilon)$, $\varepsilon\varepsilon = 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)$ – требуемая точность приближения.

Целевая функция $F(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel})$

The values of the divergence parameters $\psi_{0\perp}$ and $\psi_{0\parallel}$, calculated in the process of their approach to the «experimental» value: $(\psi_{0\perp})^{(exp)} = \frac{1}{\gamma}$ and $(\psi_{0\parallel})^{(exp)} = \frac{2}{\gamma}$ using a computer program for finding the minimum target functions using the Hook – Jeeves minimization method.

$\psi_{0\perp}^{(0)} \frac{\psi_{0\perp}^{(0)}=0.1}{\gamma}$ initial parameter values, $\Delta\psi_{0\perp}^{(0)} = \Delta\psi_{0\parallel}^{(0)} = 0.2/\gamma$ starting parameter increment, $(\max(\Delta\psi_{0\perp}, \Delta\psi_{0\parallel}) \geq \varepsilon\varepsilon)$, $\varepsilon\varepsilon = 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)$ – required approximation accuracy.

Objective function $F(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel})$

«Экспериментальные» значения параметров расходимости электронного пучка:				
$\psi_{0\perp}^{(exp)} = 5 \cdot 10^{-6} \text{radian} = \frac{1}{\gamma}$		$\psi_{0\parallel}^{(exp)} = 1 \cdot 10^{-5} = \frac{2}{\gamma}$		
$N_{DTR}^{measured}_{c\perp} = 6.942 \cdot 10^{-9}$		$N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} = 9.932 \cdot 10^{-9}$		
$\gamma = 2 \cdot 10^5$ релятивистский фактор электрона. Мишень – монокристалл алмаза C(111) толщиной $L_t = 5 \cdot 10^{-5} \text{cm}$				
Calculated values				
Iteration number (i)	$\gamma \cdot \psi_{0\perp}^{(i)}$	$\gamma \cdot \psi_{0\parallel}^{(i)}$	$\gamma \cdot \Delta\psi_{0\perp}^{(i)}$	$\gamma \cdot \Delta\psi_{0\parallel}^{(i)}$
0	0.1	0.1	0.4	0.4
5	0.9	1.7	0.1	0.05
10	1.05	1.875	$6.25 \cdot 10^{-3}$	0.0125
15	1.00625	1.975	$3.125 \cdot 10^{-3}$	$6.25 \cdot 10^{-3}$
20	1.0015625	1.996875	$3.9063 \cdot 10^{-4}$	$1.5625 \cdot 10^{-3}$
25	1.0001953	1.9992187	$9.7656 \cdot 10^{-5}$	$1.953125 \cdot 10^{-4}$

Для определения параметров расходимости электронного пучка с угловым распределением, описываемым двумерным нормальным распределением с различными значениями дисперсий по координатам, мы использовали выражения для выхода фотонов DTR в целевые коллиматоры, расположенные перпендикулярно друг другу. Построена целевая функция для расчета параметров расходимости электронного пучка и выражения для оценки погрешности определения параметров расходимости пучка.

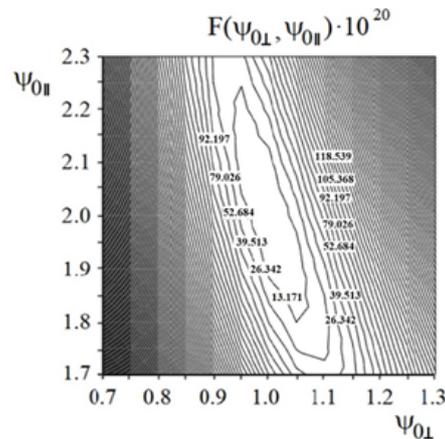


Рис. 5. Целевая функция (14) для определения параметров расходимости $\psi_{0\perp}^*$ и $\psi_{0\parallel}^*$ по «измеренным» числам фотонов ДПИ $N_{DTR}^{measured}_{c\perp} = 6.942 \cdot 10^{-9}$ и $N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} = 9.932 \cdot 10^{-9}$ (которые были предварительно вычислены по формулам (13) для $\psi_{0\perp} = \frac{1}{\gamma}$ и $\psi_{0\parallel} = \frac{2}{\gamma}$). Параметры $\psi_{0\perp}$ и $\psi_{0\parallel}$ выражены в единицах $(1/\gamma)$ radians. Значение целевой функции в минимуме $F(1/\gamma, 2/\gamma) = 0$

Fig. 5. Objective function (14) for determining the divergence parameters $\psi_{0\perp}^*$ and $\psi_{0\parallel}^*$ from the «measured» numbers of DTR photons $N_{DTR}^{measured}_{c\perp} = 6.942 \cdot 10^{-9}$ and $N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} = 9.932 \cdot 10^{-9}$ (which were previously calculated using the formulas (13) for $\psi_{0\perp} = \frac{1}{\gamma}$ and $\psi_{0\parallel} = \frac{2}{\gamma}$). The parameters $\psi_{0\perp}$ and $\psi_{0\parallel}$ are expressed in units of $(1/\gamma)$ radians. The value of the objective function at the minimum is $F(1/\gamma, 2/\gamma) = 0$

Проведены модельные расчеты параметров расходимости электронного пучка на основе «измеренного» выхода фотонов DTR, проходящих через щелевые коллиматоры. Показана эффективность алгоритма оценки параметров расходимости пучка на основе метода минимизации Гука – Дживса.

Полученные выражения могут быть успешно использованы в качестве основы для разработки методов измерения расходимости пучков релятивистских электронов сверхвысоких энергий на основе углового распределения DTR.

References

1. Baer, Howard T., Barklow et al. The international linear collider. *Technical design report. Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY)*. 2013; 2: physics. arXiv preprint arXiv:1306.6352.
2. CLIC collaboration et al. A multi-TeV linear collider based on CLIC technology: CLIC Conceptual Design Report. *CERN, Geneva, Switzerland, Rep. CERN-2012-007*. 2012.
3. Takabayashi Y. Parametric X-ray radiation as a beam size monitor. *Physics Letters A*. 2012;376(35):2408-2412.
4. Takabayashi Y., Sumitani K. New method for measuring beam profiles using a parametric X-ray pinhole camera. *Physics Letters A*. 2013;377(38):2577–2580.
5. Kalinin BN., Potylitsin AP., Verzilov VA. et al. Possible application of PXR to the beam-divergence measurements. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 1994;350(3):601–604.
6. Gogolev A., Potylitsyn A., Kube G. A possibility of transverse beam size diagnostics using parametric X-ray radiation. *Journal of Physics: Conference Series 357 012018*. 2012;357:P 012018.
7. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x rays. *Physical Review A*. 1989;40(8):4322–4329.
8. Baryshevsky VG. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 1997;122(1):13-18.
9. Artru X. Parametric X-rays and diffracted transition radiation in perfect and mosaic crystals. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 1998;145(1–2):1–7.
10. Nasonov NN. Influence of the density effect upon the parametric X-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246(1–2):148–150.
11. Blazhevich SV., Grazhdankin GA., Zagorodnyuk RA., Noskov AV. Influence of ultrarelativistic electron beam divergence on spectral–angular characteristics of coherent X-radiation generated in a single-crystal target. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2015;355:170–174.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.12.2023

Received December 27, 2023

Поступила после рецензирования 09.02.2024

Revised February 09, 2024

Принята к публикации 12.02.2024

Accepted February 12, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Блажевич Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Бронникова Марина Владимировна – старший преподаватель кафедры информатики, естественнонаучных дисциплин и методик преподавания, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Носков Антон Валерьевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergei V. Blazhevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Marina V. Bronnikova – Senior Lecturer of the Department of Computer Science, Natural Sciences and Teaching Methods, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Anton V. Noskov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

[К содержанию](#)