

## Исследование локально-неравновесного процесса индукционного нагрева металла в реакторе генерации водорода

Пашин А. В. , Крюков Ю. А. , Михеева Г. В. , Кудинов И. В. , Амиров Т. Ф. , Пименов А. А.   
(Статья представлена членом редакционной коллегии Н. В. Малаем)

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
[galinn21@list.ru](mailto:galinn21@list.ru)

**Аннотация.** Предложен метод идентификации источника теплоты, возникающего в скин-слое реактора генерации водорода, заполненного жидким металлом, при его индукционном нагреве. Благодаря использованию предложенного метода возможно при известной толщине скин-слоя найти мощность возникающего в нем источника теплоты, при которой обеспечивается нагрев метана до заданной температуры пиролиза и время выхода на стационарное состояние. Метод основан на использовании уравнения теплового баланса и локально-неравновесной математической модели, что позволяет учесть релаксационные свойства материалов. В результате многовариантных численных расчётов определена мощность внутреннего источника теплоты, необходимая для достижения рабочей средой реактора (жидким металлом) температуры пиролиза. Разработанная программа позволяет выполнять моделирование процесса индукционного нагрева металла в реакторе генерации водорода.

**Ключевые слова:** пиролиз метана, скин-слой, нелокальная модель теплообмена, коэффициент релаксации, идентификация источника теплоты, численное решение

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2024-0014) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

**Для цитирования:** Пашин А. В., Крюков Ю. А., Михеева Г. В., Кудинов И. В., Амиров Т. Ф., Пименов А. А. 2024. Исследование локально-неравновесного процесса индукционного нагрева металла в реакторе генерации водорода. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 153–162. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-153-162

Original Research

## Study of the Locally Nonequilibrium Process of Induction Heating of Metal in a Hydrogen Generation Reactor

Alexey V. Pashin , Yuriy A. Kryukov , Galina V. Mikheeva ,  
Igor V. Kudinov , Timur F. Amirov , Andrey A. Pimenov   
(Article submitted by a member of the editorial board N. V. Malay)

Samara State Technical University,  
244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia  
[galinn21@list.ru](mailto:galinn21@list.ru)

**Abstract.** A method is proposed for identifying the heat source that arises in the skin layer of a hydrogen generation reactor filled with liquid metal during its induction heating. Thanks to the use of the proposed method, it is possible, with a known thickness of the skin layer, to find the power of the heat source arising in it, which ensures heating of methane to a given pyrolysis temperature and the time to reach a steady state. The method is based on the use of the heat balance equation and a locally nonequilibrium mathematical model, which makes it possible to take into account the relaxation properties of materials. As a result of multivariate numerical calculations, the power of the internal heat source required for the reactor working medium (liquid metal) to reach the pyrolysis temperature was determined. The developed program makes it possible to simulate the process of induction heating of metal in a hydrogen generation reactor.

**Keywords:** Methane Pyrolysis, Skin Layer, Nonlocal Heat Transfer Model, Relaxation Coefficient, Heat Source Identification, Numerical Solution

**Acknowledgements:** The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSSE-2024-0014) as part of the state task of the Samara State Technical University.

**For citation:** Pashin A. V., Kryukov Yu. A., Mikheeva G. V., Kudinov I. V., Amirov T. F., Pimenov A. A. 2024. Study of the Locally Nonequilibrium Process of Induction Heating of Metal in a Hydrogen Generation Reactor. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 153–162. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-153-162

**1. Введение.** Пиролиз метана используется для получения водорода и наночастиц углерода (нанотрубки, фуллерены, карбин и др.). Преимущество данного способа получения водорода по сравнению с другими (электролиз воды, паровая конверсия метана, газификация угля) состоит в том, что он не сопровождается выбросами в атмосферу углекислых газов [1, 2, 3]. Одним из перспективных и наиболее исследуемых в последнее время способов пиролиза метана является его нагрев в реакторах путем пропускания через слой расплавленного металла (олово, свинец, алюминий и др.). Температура нагрева, в зависимости от эффективности применяемых катализаторов, может превышать 1000 °С. Среди различных способов нагрева используют нагрев электромагнитным полем, получаемым с помощью индуктора [4, 5]. Известно, что при таком способе нагрева внутри различных материалов (в том числе и неэлектропроводных) возникают источники теплоты. В случае электропроводных сред (металлы) электромагнитное поле проникает лишь на глубину весьма малой толщины скин-слоя, в котором и происходит наведение источников теплоты. Теоретическое определение их мощности весьма затруднительно, так как связано с решением уравнений электромагнитного поля. В настоящей работе предлагается метод их определения, основанный на выполнении теплового баланса, в котором при заданной толщине скин-слоя находится такая мощность возникающего в нем источника теплоты, при которой обеспечивается нагрев метана до заданной температуры пиролиза с учетом потерь теплоты в окружающую среду через слой тепловой изоляции и с уходящим метаном.

**2. Физическая модель объекта исследования.** Установки, используемые при пиролизе метана, представляют многослойные плоские или цилиндрические конструкции (рис. 1), включающие следующие элементы и рабочие среды: расплавленный металл 1; кварцевый или керамический стакан 2; слой тепловой изоляции 3; трубка для подачи метана 4; индуктор 5; метан в виде пузырьков, проходящих через слой расплавленного металла 6; трубка отвода водорода 7.

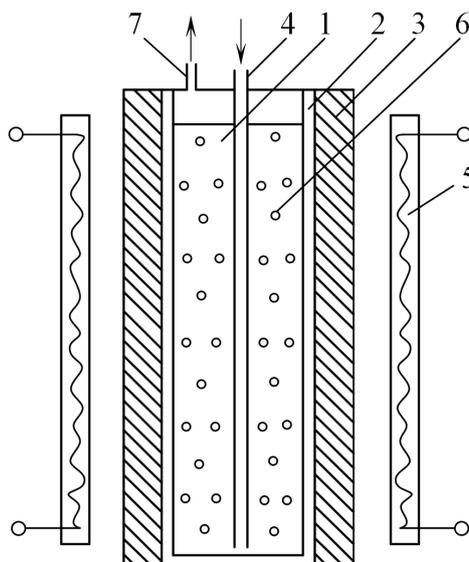


Рис. 1. Схема установки для пиролиза метана  
Fig. 1. Installation diagram for methane pyrolysis

Нагрев металла 1, его расплавление и доведение до температуры пиролиза происходит только за счет источников теплоты, инициируемых индуктором 5 в скин-слое металла, прилегающим к внутренней поверхности кварцевого стакана 2. Применительно к данной конструкции необходимо определить температурное состояние расплавленного металла при его прогреве до температуры пиролиза метана.

**3. Математическая постановка задачи.** В связи с тем, что индукционный источник, как известно, действует в приповерхностном слое металла, а его теплопроводность несоизмеримо выше теплопроводности изоляции, будем рассматривать плоскую одномерную задачу теплопроводности.

**3.1. Классическая локально-равновесная математическая модель.** Уравнение теплопроводности для нагреваемого металла, включает один источник и два стока теплоты

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W(x) - \omega - q_1(T), \quad (1)$$

где  $T$  – температура,  $K$ ;  $x$  – координата,  $m$ ;  $t$  – время,  $s$ ;  $C$  – теплоёмкость,  $Dж/(кг \cdot K)$ ;  $\rho$  – плотность  $кг/м^3$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $Вт/(м \cdot K)$ ;  $W(x) = Q_0 \exp(-x/\mu)$  – мощность источников теплоты в пределах толщины скин-слоя,  $Вт/м^3$ ;  $Q_0$  – мощность источника теплоты при  $x = 0$ ,  $Вт/м^3$ ;  $\mu$  – толщина скин-слоя,  $m$ ;  $\omega$  – сток теплоты, передаваемой метану (ввиду малой величины

и для удобства расчётов принят const),  $Vm/m^3$ ;  $q_1(T) = q_0[1 + \sigma(T - T_0)]$  – основные потери теплоты с поверхности соленоида индуктора и с охлаждающей жидкостью, циркулирующей в его внутреннем контуре,  $Vm/m^3$ ;  $q_0$  – сток теплоты в окружающую среду при  $T = T_0$  ( $T_0 > T_{cp}$ ),  $Vm/m^3$ ;  $T_0$  – начальная температура, K;  $T_{cp}$  – температура окружающей среды, K;  $\sigma$  – коэффициент потерь теплоты,  $1/K$ .

Очевидно, что при  $T > T_0$  потери теплоты в окружающую среду возрастают с увеличением температуры. Количество теплоты  $\omega$ , передаваемой нагреваемому метану, определялось с учётом его расхода.

Начальное и граничные условия к уравнению 1 имеют вид

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial T(\delta, t)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где  $\delta$  – толщина слоя олова, м.

Ввиду того, что в уравнении (1) учтены все источники и стоки теплоты, то есть учитывается полный тепловой баланс установки, то граничные условия должны быть условиями тепловой изоляции вида (3).

Путем численного решения задачи (1 – 3) при известных стоках теплоты  $\omega$  и  $q_1(T)$  можно найти такую мощность источника теплоты  $W(x)$  в скин-слое, при которой будет обеспечена наперёд заданная температура металла, достаточная для пиролиза метана. Следует, однако, отметить, что уравнение (1) является параболическим уравнением теплопроводности, которое, как известно, описывает бесконечную скорость распространения теплоты. Такая модель неадекватно описывает высокоинтенсивные быстропротекающие процессы, время изменения которых сопоставимо с временами релаксации, а также любые другие процессы при малых и сверхмалых значениях времени [6, 7].

**3.2. Локально-неравновесная математическая модель, основанная на теории двухфазного запаздывания.** Так как процесс наведения источников теплоты в скин-слое и процесс теплообмена в металле будут высокоинтенсивными и быстропротекающими, то возникает необходимость учёта релаксационных свойств материалов (пространственно-временной нелокальности) [6, 7, 8, 9]. Как известно, классические модели процессов переноса тепла, массы, импульса и проч. основаны на параболических дифференциальных уравнениях, в которых не учитываются релаксационные свойства материалов [10, 11, 12]. Вывод этих уравнений базируется на принципе локального термодинамического равновесия и гипотезе сплошной среды, согласно которым в любом малом элементе среды, сопоставимом с длиной и временем свободного пробега микрочастиц (электронов, ионов, фононов и др.), наблюдается состояние локального равновесия, несмотря на то, что в системе в целом имеют место градиенты потенциалов исследуемых величин. Такое допущение возможно лишь в случае, когда скорость нарушения равновесия, обусловленного краевыми условиями, намного меньше скорости достижения локального равновесия. Поэтому модели, в основе которых лежит принцип локального равновесия, приводят к бесконечным скоростям распространения искомых функций. И, в частности, бесконечная скорость распространения теплоты, описываемая параболическим уравнением теплопроводности, связана с тем, что при его выводе используется классическая формула закона Фурье

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

в которой тепловой поток  $q$  и градиент температуры  $\partial T/\partial x$  не разделены во времени. Поэтому любое изменение  $\partial T/\partial x$  приводит к мгновенному изменению  $q$ . Так как в любых реальных физических процессах не могут реализовываться мгновенные изменения каких-либо параметров, то, следовательно, уравнения, выведенные с использованием соотношения (4), будут адекватны этим процессам лишь в определенном диапазоне изменения пространственно-временных переменных. С целью учёта скоростей изменения теплового потока и градиента температуры запишем формулу (4) в виде [6, 7]

$$q + \tau_r \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial x} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} \right], \quad (5)$$

где  $\tau_r$  – феноменологический коэффициент (время свободного пробега микрочастиц – носителей тепловой энергии), с.

Уравнение (5) получается путем разложения закона Фурье (4) в бесконечный ряд Тейлора по степеням  $\tau$  и ограничением первыми слагаемыми разложения, что позволяет учесть конечную скорость распространения теплоты.

Выражая  $q$  из (5) и подставляя в уравнение теплового баланса

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + W(x) - \omega - q_0[1 + \sigma(T - T_0)], \quad (6)$$

находим

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \right] + W(x) - \omega - q_0 [1 + \sigma(T - T_0)]. \quad (7)$$

Выражая  $\partial q/\partial x$  из (6) и подставляя в (7), получаем

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r C\rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \right] + W(x) - \omega - q_0 [1 + \sigma(T - T_0)] - \sigma \tau_r q_0 \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (8)$$

Соотношение (8) представляет уравнение, выведенное с учётом пространственно-временной нелокальности (двухфазного запаздывания).

Начальные и граничные условия к уравнению (8) будут

$$T(x, 0) = T_0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial T(\delta, t)}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{T}{T_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}; \quad \text{Fo}_r = \frac{a\tau_r}{\delta^2}; \quad \alpha = \frac{Q_0\delta^2}{T_0\lambda}; \quad \beta = \frac{\delta}{\mu}; \quad \gamma = \frac{\delta^2}{T_0\lambda} [\omega + q_0(1 - \sigma)]; \quad \chi = \frac{\sigma q_0\delta^2}{\lambda}, \quad (13)$$

где  $\Theta, \xi, \text{Fo}$  – соответственно, безразмерные температура, координата, время;  $\alpha, \beta, \gamma, \chi$  – безразмерные комплексы.

Задача (8) – (12) с учетом принятых обозначений (13) будет

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_r \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \text{Fo}_r \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}} + \alpha e^{-\beta \xi} - \gamma - \chi \left[ \text{Fo}_r \frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \Theta \right] \quad (14)$$

$$(\text{Fo} > 0, 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0. \quad (18)$$

**4. Численный метод решения.** Для решения задачи (14) – (18) использовался метод конечных разностей [13].

По направлению  $\text{Fo}$  узлы распределены равномерно с шагом  $h_t$ . Ввиду того, что источник сосредоточен в узкой пространственной области слева (ближе к краю  $\xi = 0$ ), на единичном пространственном отрезке необходимо построить неравномерную сетку (рис. 2).

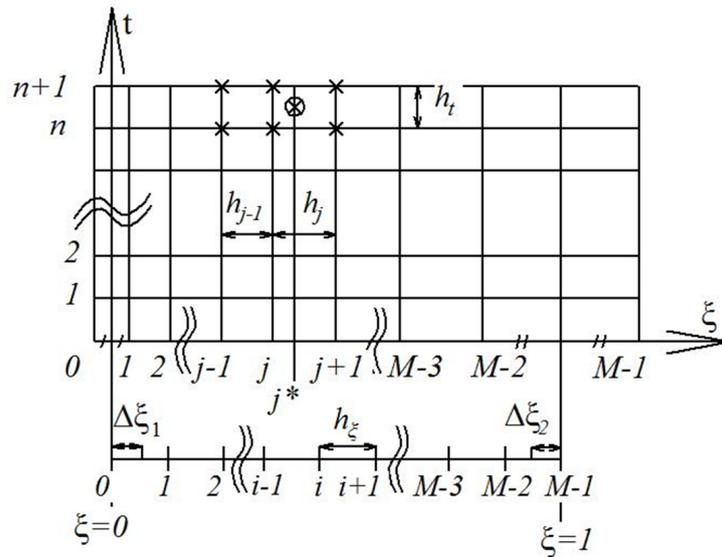


Рис. 2. Конечно-разностная сетка и шаблон для аппроксимации  
 Fig. 2. Finite-difference mesh and template for approximation

Для упрощения аппроксимации граничных условий второго рода (17), (18) неравномерную по пространству сетку необходимо предусмотреть такой, чтобы координаты  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  лежали в середине первого и последнего шагов сетки (в середине между узлами  $j = 0, j = 1$  и  $j = M - 2, j = M - 1$ ) соответственно. Изменение размера шагов сетки подчиним экспоненциальному закону.

В принятых условиях неравномерная сетка строится следующим образом. Рассмотрим функцию  $e^{a\xi}$ , заданную на единичном отрезке  $\xi \in [0, 1]$  с тем же количеством равномерно расположенных узлов  $i = 0, 1, \dots, M - 2, M - 1$  (крайние узлы расположены в точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  соответственно). Тогда шаг равномерной сетки будет  $h_\xi = 1/M - 1$ .

Выберем на отрезке  $[0, h_\xi]$  равновесную точку (площади под графиком функции  $e^{a\xi}$  слева и справа от точки на выбранном отрезке равны), которую обозначим  $\Delta\xi_1$ :

$$\int_0^{\Delta\xi_1} e^{a\xi} d\xi = \int_{\Delta\xi_1}^{h_\xi} e^{a\xi} d\xi \quad (19)$$

Проинтегрировав (19) и разрешая получившееся равенство относительно  $\Delta\xi_1$ , получим:

$$\Delta\xi_1 = \ln\left(\frac{e^{ah_\xi} + 1}{2}\right)^{1/a}, \quad (20)$$

Аналогично определим на отрезке  $[1 - h_\xi, 1]$  равновесную точку  $\Delta\xi_2$ :

$$\Delta\xi_2 = \ln\left(\frac{2}{e^{ah_\xi} + 1}\right)^{1/a} \quad (21)$$

Определим нормирующий интеграл:

$$S = \int_{\Delta\xi_1}^{1-\Delta\xi_2} e^{a\xi} d\xi = \frac{e^{a(1-\Delta\xi_2)} - e^{a\Delta\xi_1}}{a}. \quad (22)$$

Найдём интеграл на каждом отрезке  $[i - 1, i]$ :

$$S_i = \int_{h_\xi(i-1)}^{h_\xi i} e^{a\xi} d\xi = \frac{e^{ah_\xi i} - e^{ah_\xi(i-1)}}{a}, \quad i = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (23)$$

Определяя последовательно значения выражений (20), (23), найдём координату нулевого и первого узлов неравномерной сетки:

$$-\xi_0 = \xi_1 = \frac{S_1}{S} = h_0. \quad (24)$$

Далее по простой зависимости определяются оставшиеся координаты узлов неравномерной сетки:

$$\xi_j = \xi_{j-1} + h_{j-1}, \quad h_{j-1} = \frac{S_j}{S}, \quad j = 2, \dots, M - 1 \quad (25)$$

Отметим, что построенная по формулам (20) – (25) экспоненциальная монотонно возрастающая сетка отвечает естественному требованию о стремлении максимального шага сетки к нулю при безграничном росте числа её узлов, поскольку в (23)  $S_i \rightarrow 0$  при  $h_\xi \rightarrow 0$  ( $M \rightarrow \infty$ ).

На предложенной сетке локальная аппроксимация слагаемых в левой части уравнения (14) в точке  $(n, \xi_{j^*})$ ,  $\xi_{j^*} = (\xi_{j-1} + \xi_j + \xi_{j+1})/3$ , будет иметь вид (обозначения сеточных и непрерывных функций совпадают)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial \text{Fo}^2} \approx \frac{\theta_{j^*}^{n+1} - \theta_{j^*}^{n-1}}{2h_t} + \text{Fo}_r \frac{\theta_{j^*}^{n+1} - 2\theta_{j^*}^n + \theta_{j^*}^{n-1}}{h_t^2}. \quad (26)$$

При неравномерных шагах локальная аппроксимация второй частной производной в точке  $(n+1, \xi_{j^*})$  с порядком  $O(h_j^2)$  получается по формуле

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \approx \frac{2}{(h_j + h_{j-1})} \left[ \frac{\theta_{j+1}^{n+1} - \theta_j^{n+1}}{h_j} - \frac{\theta_j^{n+1} - \theta_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right]. \quad (27)$$

Значение функции  $\theta_{j^*}$  на произвольном временном слое будет определяться следующим выражением:

$$\theta_{j^*} = \theta_j + D_h(\theta_{j+1} - \theta_{j-1}); D_h = \frac{e^{ah_\xi} - 1}{3(e^{ah_\xi} + 1)}. \quad (28)$$

Аппроксимация смешанной частной производной в точке  $(n, \xi_{j^*})$  записывается следующим образом

$$\frac{\partial^3 \theta}{\partial \text{Fo} \partial \xi^2} \approx \frac{1}{2h_t} \left( \frac{2}{(h_j + h_{j-1})} \left[ \frac{\theta_{j+1}^{n+1} - \theta_j^{n+1}}{h_j} - \frac{\theta_j^{n+1} - \theta_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right] - \frac{2}{(h_j + h_{j-1})} \left[ \frac{\theta_{j+1}^{n-1} - \theta_j^{n-1}}{h_j} - \frac{\theta_j^{n-1} - \theta_{j-1}^{n-1}}{h_{j-1}} \right] \right). \quad (29)$$

Поскольку в выражениях (26) – (29) используются только три узла для аппроксимации неизвестных функций на  $n+1$  временном слое, то задачу для отыскания неизвестной функции можно свести к системе уравнений с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки.

Локальная аппроксимация граничных условий симметрии (17), (18) с порядком  $O(h_j^2)$  записывается в виде

$$\theta_0^{n+1} = \theta_1^{n+1}; \theta_M^{n+1} = \theta_{M-1}^{n+1}; (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (30)$$

Начальные условия (15), (16) аппроксимируются следующим образом

$$\theta_j^0 = 1; \theta_j^1 = \theta_j^0; j = 0 \dots M. \quad (31)$$

Отметим, что условия (30) имеют предельно простой вид в силу особенности симметричного расположения граничных узлов введенной сетки относительно координат  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ .

Предложенная схема локально аппроксимирует дифференциальную задачу (14) – (18) с первым порядком точности по временной координате и со вторым, по пространственной. По описанному выше методу построен алгоритм и составлена программа в Visual Studio C++. Программа отлажена, практическая сходимость полученного решения контролировалась апостериорно на последовательности сгущающихся сеток. Результаты, представленные в работе, получены при  $M = 1001$ ,  $h_t = 10^{-3}$ ,  $a = 7$ .

Были заданы следующие исходные данные для проведения вычислительных экспериментов:  $\beta = 27.5$ ;  $\gamma = 0.057$ ;  $\chi = 0.02$ .

**5. Обсуждение результатов.** Полученные расчётные результаты позволяют определить количество тепловой энергии, генерируемой индукционным нагревателем для обеспечения стационарного режима в реакционной зоне водородного реактора. На рис. 3 приведены зависимости температуры на границе расчетной области от времени для трёх значений безразмерного источника теплоты  $\alpha$ . Из анализа рис. 4 – 6 следует, что постоянный по времени тепловой источник, действующий в небольшой окрестности левой границы, создает в процессе прогрева слоя металла (до момента достижения стационарного режима теплообмена) перепад температуры по его ширине, составляющий  $25^\circ\text{C}$  ( $\Theta = 0.06$ ) и сохраняющийся до наступления стационарного состояния. В стационарном режиме работы, который достигается при  $\text{Fo} \approx 300$  ( $t = 3\text{ч}$ ), температура в слое олова для всех трёх численно определенных безразмерных мощностей индукционного источника теплоты устанавливается практически одинаковой по толщине и равной  $\Theta = 2$  ( $T = 800\text{K}$ ) при  $\alpha = 2.7$ ,  $\Theta = 2.5$  при  $\alpha = 3$  и  $\Theta = 3$  при  $\alpha = 3.3$ , что объясняется высокой теплопроводностью слоя олова. В стационарном режиме количество теплоты, инициируемое в скин-слое,

сравнивается с суммой двух теплот – затрачиваемой на нагрев метана и поступающей в виде потерь в окружающую среду. Таким путем идентифицирована мощность источника теплоты расплавленного металла в скин-слое.

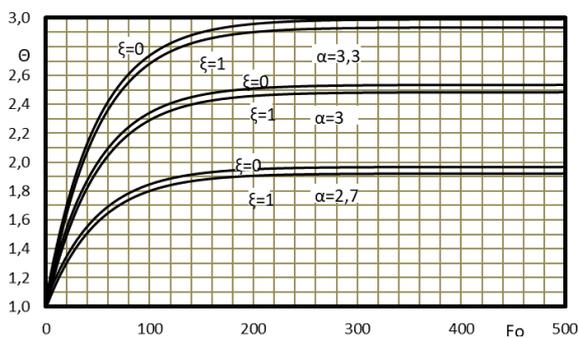


Рис. 3. Зависимость температуры от времени на границах расчётной области при разной величине безразмерного источника  $\alpha$ .  $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Fig. 3. Dependence of temperature on time at the boundaries of the computational domain for different sizes of the dimensionless source  $\alpha$ .  $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

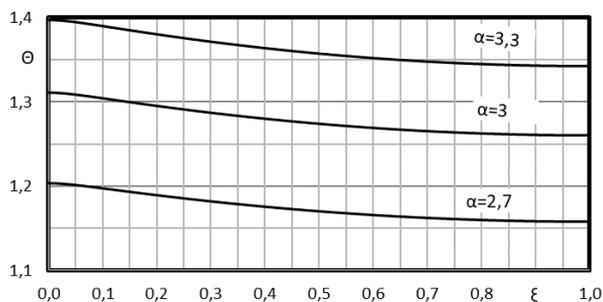


Рис. 4. Профиль температуры при разных  $\alpha$ .  $Fo = 10$ ;  $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Fig. 4. Temperature profile at different  $\alpha$ .  $Fo = 10$ ;  $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

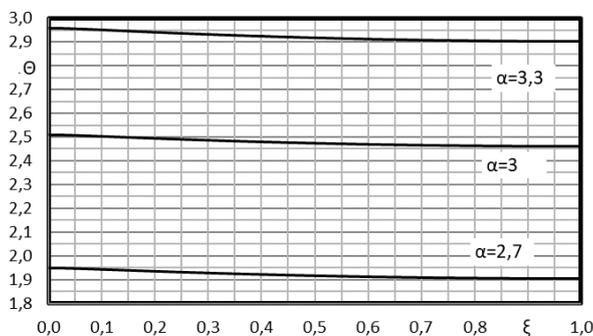


Рис. 5. Профиль температуры при разных  $\alpha$ .  $Fo = 200$ ;  $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Fig. 5. Temperature profile at different  $\alpha$ .  $Fo = 200$ ;  $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

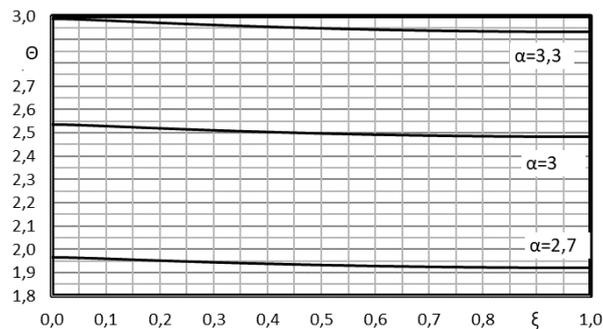


Рис. 6. Профиль температуры при разных  $\alpha$ .  $Fo = 500$ ;  $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Fig. 6. Temperature profile at different  $\alpha$ .  $Fo = 500$ ;  $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Для поддержания стационарного режима работы водородного реактора при  $T = 800\text{ K} - 4.2 \cdot 10^7\text{ Вт/м}^3$ , при  $T = 1000\text{ K}$  необходимо  $4.7 \cdot 10^7\text{ Вт/м}^3$  и при  $T = 1200\text{ K}$  требуется  $5.2 \cdot 10^7\text{ Вт/м}^3$  мощности объемного источника, создаваемого электромагнитным полем индукционной печи.

Проведено исследование зависимости температурного состояния жидкого металла от величины безразмерного коэффициента релаксации  $Fo_r$ . Так, при очень малых его значениях ( $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$ , рис. 3 – 6) температурное состояние металла может быть описано с помощью классического параболического уравнения, не учитывающего релаксационные эффекты и приводящего к точно таким же расчётным результатам. Однако, если рассматривать жидкости с большими коэффициентами релаксации (например, интерметаллические соединения [14]) или с меньшими толщинами слоя, то наблюдаются следующие особенности процесса теплообмена. Температурные кривые приобретают изгиб в начальные моменты времени (рис. 7, 8), что связано с учётом конечной скорости распространения теплоты и указывает на инерционность принятия тепловой энергии от электромагнитного источника. То есть теплота принимается не мгновенно, а в течение определенного промежутка времени, зависящего от релаксационных свойств среды. Второй особенностью процесса теплообмена является увеличение времени выхода на стационарное состояние. Например, при  $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$  (рис. 2 – 6) время выхода на стационарное состояние составило  $Fo_{ст} = 300$ , при  $Fo_r = 23.68$  (рис. 7) стационарное состояние было достигнуто при  $Fo_{ст} = 400$ , а при  $Fo_r = 71$  (рис. 8) потребовалось время  $Fo_{ст} = 500$ .

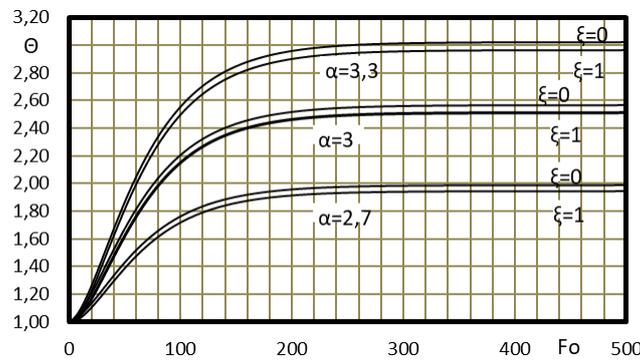


Рис. 7. Зависимость температуры от времени на границах расчётной области при разной величине безразмерного источника  $\alpha$ .  $Fo_r = 23.68$

Fig. 7. Dependence of temperature on time at the boundaries of the computational domain for different sizes of the dimensionless source  $\alpha$ .  $Fo_r = 23.68$

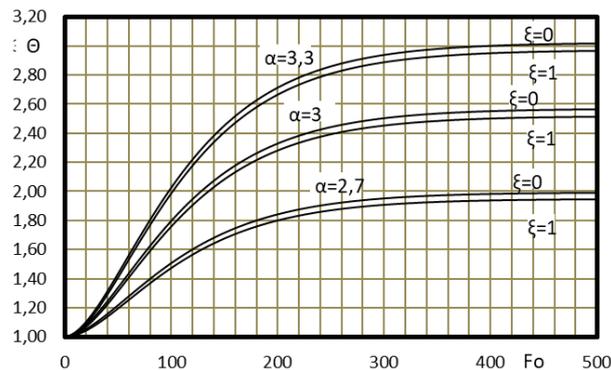


Рис. 8. Зависимость температуры от времени на границах расчётной области.  $Fo_r = 71$

Fig. 8. Dependence of temperature on time at the boundaries of the computational domain.  $Fo_r = 71$

### Заключение

1. Используя предложенную в настоящей работе математическую модель теплообмена в реакторе пиролиза метана, выполнена идентификация источника теплоты, возникающего в скин-слое металла при его индукционном нагреве. Модель включает нелокальное уравнение теплопроводности, содержащее три источника теплоты, первый из которых учитывает мощность внутреннего источника, инициируемого индуктором в скин-слое; второй – количество теплоты, затрачиваемое на нагрев метана; третий – потери теплоты в окружающую среду через слой тепловой изоляции. Мощность первого источника, при известных втором и третьем, определялась из итеративного решения краевой задачи таким образом, чтобы в установившемся состоянии температура расплавленного олова находилась в пределах заданной величины, достаточной для проведения пиролиза метана.

2. По предложенному методу построен алгоритм и составлена программа в пакете Visual Studio C++. В результате многовариантных численных расчётов показано, что для выхода на стационарный режим

нагрева реактора, мощность внутреннего источника теплоты, инициируемого в скин-слое, при заданных количествах теплот, затрачиваемых на нагрев металла и на потери в окружающую среду, должна быть равной  $4.2 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^3$  для 800 К,  $4.7 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^3$  для 1000 К и  $5.2 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^3$  для 1200 К.

3. Разработанная компьютерная программа для моделирования процессов нагрева металла в реакторах генерации водорода позволяет произвести предварительную оценку температурного состояния рабочей среды (жидкого металла), определить оптимальные режимы нагрева и поддержания необходимой температуры, тем самым сократить затраты материальных и энергетических ресурсов при проведении экспериментальных работ.

4. Учет релаксационных свойств среды позволяет исследовать инерционность процесса теплообмена в задачах нагрева жидких металлов и их сплавов в начальные моменты времени. В отличие от классического параболического уравнения теплопроводности, рассмотренное в работе локально-неравновесное уравнение позволяет определить промежуток времени, необходимый для принятия тепловой энергии от электромагнитного источника теплоты. Показано, что время выхода на стационарное состояние, в случае учета коэффициентов релаксации среды, увеличивается.

### Список литературы

1. Баранов Н.Н. Нетрадиционные источники и методы преобразования энергии. М.: Издательский дом МЭИ, 2012. 383 с.
2. Фортвов В.Е., Попель О.С. Энергетика в современном мире. М.: Издательский дом «Интеллект». 2011. 168 с.
3. Ячиков И.М., Миронова Г.А., Петин С.Н. Математическое моделирование теплового состояния расплава в реакторе с кипящим слоем. *Приложение математики в экономических и технических исследованиях*. 2007;1:170–176.
4. Подольцев А.Д., Кучерявая И.М. Мультифизическое моделирование процессов индукционного нагрева и плавления проводящих заготовок с концентратором магнитного потока. *Электронное моделирование*. 2015;37(4):97–107.
5. Письменный А.С., Баглай В.М., Письменный А.А., Рымар С.В. Интенсификация потоков расплавленного металла в жидкой ванне при индукционном нагреве. *Вакуумно-индукционная плавка*. 2010;(2):34–39.
6. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена. *Инженерно-физический журнал*. 1965;9(3):287–304.
7. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физических наук*. 1997;167(10):1096–1106.
8. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» Институт компьютерных исследований, 2006.
9. Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах. *Успехи физических наук*. 1991;161(3):5–29.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. 1967. М.: Высшая школа. 600 с.
11. Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений. *Труды семинара им. И.Г. Петровского*. 2011;(28):75–113.
12. Rossikhin Yu.A., Shitikov V.V. The hyperbolic model with a small parameter for studying the process of impact of a thermoelastic rod against a heated rigid barrier. *Applied Mathematical Sciences*. 2016;10(41):2037–2050.
13. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
14. Ghazanfarian J., Shomali Z., Abbassi A. Macro- to nanoscale heat and mass transfer: the lagging behavior. *International Journal of Thermophysics*. 2015;36:1416–1467.

### References

1. Baranov NN. Unconventional sources and methods of energy conversion. Moscow: MPEI Publishing House; 2012. 383 p. (In Russian)
2. Fortov VE., Popel OS. Energy in the modern world. Moscow: Publishing house «Intellect». 2011. 168 p. (In Russian)
3. Yachikov IM., Mironova GA., Petin SN. Mathematical modeling of the thermal state of the melt in a fluidized bed reactor *Application of mathematics in economic and technical research*. 2007;(1):170–176. (In Russian)
4. Podoltsev AD., Kucheryavaya IM. Multiphysics modeling of the processes of induction heating and melting of conductive workpieces with a magnetic flux concentrator *Electronic modeling*. 2015;37(4):97–107. (In Russian)
5. Pismenny AS., Baglay VM., Pismenny AA., Rymar SV. Intensification of molten metal flows in a liquid bath during induction heating *Vacuum-induction melting*. 2010;(2):34–39. (in Russian)
6. Lykov AV. Application of methods of thermodynamics of irreversible processes to the study of heat and mass transfer *Engineering and Physical Journal*. 1965;9(3):287–304. (In Russian)
7. Sobolev SL. Local non-equilibrium transport models *Physics-Uspeski*. 1997;40:1043–1053. (in Russian)

8. Zhou D., Casas-Basques X., Lebon J. Extended irreversible thermodynamics. Moscow – Izhevsk: Research Center «Regular and Chaotic Dynamics» Institute of Computer Research, 2006. (In Russian)
9. Sobolev S.L. Transport processes and traveling waves in systems with local nonequilibrium *Soviet Physics Uspekhi*. 1991;34(3):217–229. (in Russian)
10. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. Moscow: Higher school; 1967. 600 p. (In Russian)
11. Vlasov V.V., Rautian N.A. Well-defined solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations *Journal of Mathematical Sciences*. 2011;179:390–414.
12. Rossikhin Yu.A., Shitikov V.V. The hyperbolic model with a small parameter for studying the process of impact of a thermoelastic rod against a heated rigid barrier *Applied Mathematical Sciences*. 2016;10(41):2037–2050.
13. Kalitkin N.N. Numerical methods. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
14. Ghazanfarian J., Shomali Z., Abbasi A. Macro- to nanoscale heat and mass transfer: the lagging behavior *International Journal of Thermophysics*. 2015;36:1416–1467.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 05.03.2024

Received March 5, 2024

Поступила после рецензирования 20.04.2024

Revised April 20, 2024

Принята к публикации 26.04.2024

Accepted April 26, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Пашин Алексей Владимирович** – старший преподаватель кафедры физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

**Крюков Юрий Александрович** – кандидат физико-математических наук, ведущий инженер кафедры физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

**Михеева Галина Вениаминовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

**Кудинов Игорь Васильевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

**Амиров Тимур Фархадович** – ассистент кафедры газопереработки, водородных и специальных технологий, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

**Пименов Андрей Александрович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры газопереработки, водородных и специальных технологий, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Alexey V. Pashin** – Senior Lecturer, Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

**Yuriy A. Kryukov** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lead Engineer at the Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

**Galina V. Mikheeva** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

**Igor V. Kudinov** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

**Timur F. Amirov** – Assistant at the Department of Gas Processing, Hydrogen and Special Technologies, Samara State Technical University, Samara, Russia

**Andrey A. Pimenov** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Gas Processing, Hydrogen and Special Technologies, Samara State Technical University, Samara, Russia

[К содержанию](#)