Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 3. С. 175–180.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 3. P. 175–180.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.95
MSC 35J05
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-175-180

Принцип Рэлея для стратифицированного лапласиана

Ощепкова С. Н.[1], **Пенкин О. М.**[2], **Царев С. Л.**[2]
[1] Воронежский государственный университет инженерных технологий,
Россия, 394036, г. Воронеж, пр. Революции, 19
osonia@mail.ru
[2] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
o.m.penkin@gmail.com, s@tzareff.ru

Аннотация. Устанавливается аналог принципа Рэлея, утверждающего экстремальное свойство первого собственного значения лапласиана Дирихле, в ситуации, когда вместо обычного оператора Лапласа рассматривается лапласиан по стратифицированной мере. Ранее этот вопрос был решён для лапласиана на одномерном стратифицированном множестве (геометрическом графе). Позже П. А. Кулешовым был изучен также случай мягкого лапласиана на стратифицированном множестве. Здесь мы даём решение для произвольного стратифицированного лапласиана.

Ключевые слова: стратифицированное множество, лапласиан, задача Дирихле, принцип Рэлея

Для цитирования: Ощепкова С. Н., Пенкин О. М., Царев С. Л. 2024. Принцип Рэлея для стратифицированного лапласиана. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 175–180.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-175-180

Original Research

Rayleigh Principle for Stratified Laplacian

Sofia N. Oshchepkova[1], **Oleg M. Penkin**[2], **Sergey L. Tsarev**[2]
[1] Voronezh State University of Engineering Technologies,
19 Revolutsii av., Voronezh, 394036, Russia
osonia@mail.ru
[2] Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018, Russia
o.m.penkin@gmail.com, s@tzareff.ru

Abstract. In this paper we give an exact analog of Rayleigh principle for laplacians on stratified sets. Our main result may be applied for an estimation of the first eigenvalue of stratified laplacian equipped with Dirichlet conditon. Previous results on this subject were known for one dimensional stratified sets and for a specific laplacian, called soft laplacian, defined on multidimensional stratified sets. Meanwhile there is a variety of laplacians on stratified sets. Our results are valid for all stratified laplacians without any restrictions on the dimension.

Keywords: Stratified Set, Laplacian, Dirichlet Problem, Rayleigh Principle

For citation: Oshchepkova S. N., Penkin O. M., Tsarev S. L. 2024. Rayleigh Principle for Stratified Laplacian. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 175–180. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-175-180

---

1. Описание основных понятий.

1.1. Стратифицированное множество. В определении понятия стратифицированного множества мы в целом следуем работе [1], но модифицируем первоначальное определение с учётом специфики рассматриваемых нами задач. Требуемую нами модификацию можно найти также в [2, 3, 4].

Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ мы называем *стратифицированным*, если оно связно и является объединением конечного числа многообразий (страт) σ_{kj} (первый индекс означает размерность многообразия, а второй служит для автономной нумерации страт данной размерности), имеющих компактные замыкания и удовлетворяющих следующей паре условий:

1. Пересечение замыканий $\overline{\sigma}_{kj}$, $\overline{\sigma}_{ml}$ любых страт σ_{kj}, σ_{ml}, если оно непусто, является объединением страт.

2. Граница $\partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ также является объединением страт.

Всюду далее страты считаются подмногообразиями в $\mathbb{R}^n$. Одно и то же множество Ω можно стратифицировать многими способами. Во избежание недоразумений мы будем считать, что набор страт (обозначим его $\mathcal{S}$) фиксирован. Более того, следует ещё задать способ «сборки» Ω из элементов набора $\mathcal{S}$ – отображение φ, отождествляющее некоторые граничные страты различных страт. Таким образом, под стратифицированным множеством следует понимать тройку $\{\Omega, \mathcal{S}, \varphi\}$. Тем не менее мы само Ω намерены называть стратифицированным, не упоминая остальных элементов тройки.

Условия 1, 2 встречаются при определении клеточного комплекса. Помимо них накладываются ещё требования на отображение φ. Мы сформулируем это условие в виде геометрического требования к результату сборки – множеству Ω, рассматриваемому как топологическое пространство с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологией. А именно, мы потребуем, чтобы для любой точки $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega$ существовал шар $B_r(X) \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\Phi : B_r(X) \to B_r(X)$ такие, что образ $\Phi(B_r(X) \cap Z)$ части «кривой» звезды Z, состоящей из σ_{kj} и примыкающих к ней $(k+1)$-мерных страт, является объединением k-мерного шара (образа $\sigma_{kj} \cap B_r(X)$) и опирающихся на него, как на диаметральную плоскость, $(k+1)$-мерных полушарий – образов $\sigma_{k+1i} \cap B_r(X)$, соответствующих всем $(k+1)$-мерным стратам, примыкающим к σ_{kj}; мы говорим, что страта σ_{k+1i} примыкает к страте σ_{kj}, если последняя входит в границу первой. Следующий рисунок иллюстрирует процесс этого «выпрямления».

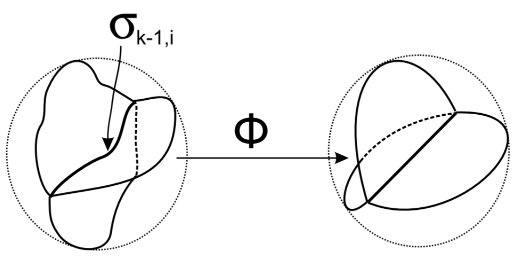

Рис. 1. Локальное выпрямление
Fig. 1. Local straightening

Всюду далее Ω предполагается представленным в виде объединения $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$, в котором Ω_0 – связное открытое подмножество Ω (мы здесь пользуемся упомянутой выше индуцированной топологией), составленное из страт набора $\mathcal{S}$ и удовлетворяющее равенству $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Множество Ω_0 является аналогом внутренности некоторой замкнутой области, а разность $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$ – аналог границы; в топологии Ω множество $\partial\Omega_0$ действительно является топологической границей множества Ω_0. Обсуждаемый далее стратифицированный лапласиан будет действовать на функции в пределах Ω_0. Формально определение множества Ω_0 не исключает случая $\Omega_0 = \Omega$ и, как следствие пустоты границы, но в настоящей работе мы будем предполагать, что $\partial\Omega_0 \neq \varnothing$.

1.2. Стратифицированная мера. Каждая страта σ_{kj}, как подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$, наследует риманову метрику, а с ней и меру Лебега μ_{kj}. Из этих мер мы сконструируем стратифицированную меру μ, определяя её на измеримых подмножествах $\omega \subset \Omega$ формулой

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \mathcal{S}} \mu_{kj}(\omega_{kj}),$$

где $\omega_{kj} = \omega \cap \sigma_{kj}$. При этом множество $\omega \subset \Omega$ назовём *μ-измеримым*, если каждое пересечение ω_{kj} измеримо в смысле k-мерной меры Лебега на σ_{kj}. Нетрудно заметить, что множество $\mathcal{M}$ всех μ-измеримых множеств является σ-алгеброй на Ω. Измеримость функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ определяется стандартно: f является μ-измеримой, если лебеговы множества $L_f(c) = \{X \in \Omega : f(X) \leq c\}$ принадлежат $\mathcal{M}$ при всех $c \in \mathbb{R}$. Нетрудно заметить, что интеграл Лебега μ-измеримой функции по μ-измеримому множеству ω сводится к сумме

$$\int_\omega f\, d\mu = \sum_{\sigma_{kj} \in \mathcal{S}} \int_{\omega_{kj}} f\, d\mu.$$

В правой части равенства вместо $d\mu$, строго говоря, следовало бы писать $d\mu_{kj}$; однако нам удобно опускать индексы, если только это не может вызвать недоразумений.

1.3. Дивергенция и лапласиан. Векторное поле $\vec{F}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *касательным* к Ω_0, если для любой страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и любой точки $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному, в обычном дифференциально-геометрическом смысле, пространству $T_X\sigma_{kj}$.

Обозначение $\vec{C}^1(\Omega_0)$ применяется к пространству касательных векторных полей $\vec{F}$ на Ω_0, сужения $\vec{F}|_{\sigma_{ki}}$ которых на каждую внутреннюю страту $\sigma_{ki} \subset \Omega_0$ непрерывно дифференцируемы и имеют непрерывное продолжение в каждую точку любой примыкающей внутренней, т. е. лежащей в Ω_0, страты на единицу меньшей размерности. Непрерывность поля $\vec{F}$ в целом на Ω_0 не предполагается. Последнее означает, что касательное векторное поле из $\vec{C}^1(\Omega_0)$ являет собой набор независимых полей класса C^1 в количестве, равном количеству страт в Ω_0.

Дивергенция касательного векторного поля $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega_0)$ в точке $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$ задаётся равенством

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i, \tag{1}$$

где суммирование проводится по всем $(k+1)$-мерным стратам σ_{k+1i}, примыкающим к σ_{kj} (запись $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$ под знаком суммы выражает факт этого примыкания). Символ ∇_k в правой части обозначает оператор обычной k-мерной дивергенции, применённой к сужению $\vec{F}$ на страту σ_{kj}, $\vec{v}_i$ — единичная внутренняя нормаль к σ_{kj} в точке X, направленная внутрь σ_{k+1i} по касательной к σ_{k+1i} (см. следующий рисунок), а $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i)$ — предел $\vec{F}(Y)$ при $Y \in \sigma_{k+1i}$, стремящемся к X изнутри страты $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$ вдоль непрерывной кривой.

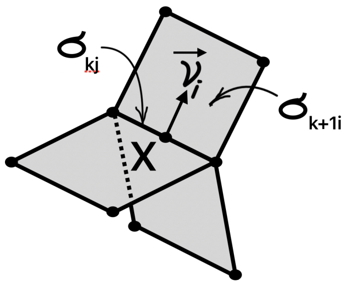

Рис. 2. К определению дивергенции
Fig. 2. Toward the definition of divergence

Существование таких пределов можно потребовать и в случае, когда σ_{kj} – граничная страта, а σ_{k+1i} – внутренняя; множество векторных полей из $\vec{C}^1(\Omega_0)$, обладающих таким свойством обозначается $\vec{C}^1(\Omega)$. Сразу не видно, что определённая нами дивергенция является точным аналогом классической, но можно показать, что $\nabla \cdot \vec{F}(X)$, как и в обычной ситуации, является плотностью потока векторного поля в точке X, отнесённой к стратифицированной мере μ, определённой в предыдущем пункте. Подробнее об этом см. [2].

Примером касательного векторного поля является градиент ∇u скалярной функции u, сужение которой на каждую внутреннюю страту непрерывно дифференцируемо. В этом случае ∇u представляет собой просто набор градиентов этих сужений. Если $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$ (множество таких функций обозначим через $C^2(\Omega_0)$), то оператор $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$ естественно назвать стратифицированным лапласианом. Так определённый лапласиан часто называют «жёстким». Можно также определить более общий аналог оператора Лапласа $\nabla \cdot (p \nabla u)$, где p – так называемая стратифицированная константа, которая на каждой страте тождественно равна либо единице, либо нулю. При этом всегда предполагается, что $p \equiv 1$ на всех свободных стратах; страта σ_{kj} свободна, если она не примыкает ни к какой страте большей размерности (в этом случае она, очевидно, внутренняя, $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$). При этом, если на остальных стратах $p \equiv 0$, то соответствующий стратифицированный лапласиан называется мягким. В данной работе основной результат мы будем доказывать в предположении, что лапласиан является жёстким ($p \equiv 1$ на всех внутренних стратах), но наши рассуждения применимы ко всем стратифицированным лапласианам промежуточным между мягким и жестким. Функции класса $C^2(\Omega_0)$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$, будем называть *гармоническими*.

1.4. Интегральные тождества. Здесь приводятся аналоги классических интегральных тождеств, играющих решающую роль в наших рассмотрениях. Следующее утверждение является аналогом теоремы Гаусса – Остроградского или, как часто говорят, теоремы о дивергенции.

Теорема 1 (о дивергенции). *Пусть $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega)$, тогда*

$$\int_{\partial\Omega_0} (\vec{F})_\nu \, d\mu = -\int_{\Omega_0} \nabla \cdot \vec{F} \, d\mu. \tag{2}$$

Здесь $(\vec{F})_\nu$ – сумма, аналогичная второму слагаемому в определении дивергенции:

$$(\vec{F})_\nu(X) = \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,$$

но суммирование теперь распространяется только на страты $\sigma_{k+1i} \subset \Omega_0$; подчеркнём, что сейчас σ_{kj} – граничная страта, поэтому некоторые из примыкающих к ней страт $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$ тоже могут оказаться граничными. Знак «минус» в формуле (2) *связан с тем, что всюду мы пользуемся внутренними нормалями.*

Доказательство этой теоремы имеется в книге [2]. Если мы положим в формуле (2) $\vec{F} = v\nabla u$, где $u \in C^2(\Omega)$ (так мы будем обозначать множество таких функций $u \in C^2(\Omega_0)$, что $\nabla u \in C^1(\Omega)$), а $v \in C^1(\Omega_0) \cap C(\Omega)$, то получим стратифицированный аналог первой формулы Грина:

$$\int\limits_{\Omega_0} v\Delta u\, d\mu + \int\limits_{\Omega_0} \nabla v \cdot \nabla u\, d\mu = -\int\limits_{\partial\Omega_0} v(\nabla u)_\nu\, d\mu. \tag{3}$$

2. Принцип Рэлея для лапласиана на стратифицированном множестве. В этом разделе мы приводим основной результат работы, являющийся аналогом принципа Рэлея, утверждающего, что первое собственное значение λ_0 в задаче на собственные значения:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \tag{4}$$

$$u\big|_{\partial\Omega_0} = 0 \tag{5}$$

удовлетворяет соотношению

$$\lambda_0 = \inf_{u\in U} \frac{\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^2}{\int\limits_{\Omega_0} u^2} \tag{6}$$

в предположении, что такое собственное значение существует и ему соответствует собственная функция, сохраняющая знак в области Ω_0; множество U состоит из функций класса C^1, обращающихся в нуль на границе. В данной работе мы примем эти условия в качестве требований, поскольку вопрос об их выполнимости в случае лапласиана на стратифицированном множестве весьма нетривиален. В конце статьи мы приведём некоторые комментарии на этот счёт.

Обозначим через $C^1_0(\Omega)$ множество функций из $C^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности границы Ω_0; эта окрестность своя для каждой функции. На этом множестве форма

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v\, d\mu$$

обладает всеми свойствами скалярного произведения. Пополнение пространства $C^1_0(\Omega)$ по норме $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ является аналогом пространства Соболева и обозначается $\overset{\circ}{H}{}^1_0(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть λ_0 – первое собственное значение в задаче* (4), (5), *а соответствующая ему собственная функция u_0 положительна в Ω_0, тогда имеет место неравенство*

$$\lambda_0 \le \frac{\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^2}{\int\limits_{\Omega_0} u^2} \tag{7}$$

для всех функций u из класса $\overset{\circ}{H}{}^1_0(\Omega)$, не обращающихся тождественно в нуль.

Доказательство. В нашем доказательстве мы следуем идее, изложенной в [5]. Прежде всего, заметим, что в силу плотности $C^1_0(\Omega)$ в $\overset{\circ}{H}{}^1_0(\Omega)$, достаточно доказать, что неравенство (7) выполняется на множестве функций из $C^1_0(\Omega)$. Любую такую функцию можно представить в виде $u = qu_0$, где q непрерывна на Ω, а u_0 – упомянутая собственная функция. Имеем:

$$\int\limits_{\Omega_0} (|\nabla u|^2 - \lambda_0 u^2)\, d\mu = \int\limits_{\Omega_0} (|\nabla(qu_0)|^2 - \lambda_0 u_0 q^2 u_0)\, d\mu.$$

Последний интеграл, с учётом уравнения (4), преобразуется к виду

$$\int\limits_{\Omega_0} u_0^2|\nabla q|^2\, d\mu + \int\limits_{\Omega_0} q^2 u_0 \Delta u_0\, d\mu + \int\limits_{\Omega_0} (q^2|\nabla u_0|^2 + 2qu_0\nabla q \cdot \nabla u_0)\, d\mu. \tag{8}$$

Последний интеграл преобразуем к виду

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0(q^2\nabla u_0 + 2qu_0\nabla q)\, d\mu = \int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0(q^2\nabla u_0 + u_0\nabla q^2)\, d\mu = \int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0 \cdot \nabla(q^2 u_0))\, d\mu.$$

С учётом этого, сумма (8) оказывается равной

$$\int\limits_{\Omega_0} u_0^2 |\nabla q|^2 \, d\mu + \int\limits_{\Omega_0} q^2 u_0 \Delta u_0 \, d\mu + \int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0 \cdot \nabla (q^2 u_0)) \, d\mu.$$

Сумма последних двух слагаемых в силу формулы (3), в которой следует положить $v = q^2 u_0$, $u = u_0$, преобразуются к виду

$$\int\limits_{\Omega_0} q^2 u_0 \Delta u_0 \, d\mu + \int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0 \cdot \nabla (q^2 u_0)) \, d\mu = -\int\limits_{\partial\Omega_0} q^2 u_0 (\nabla u_0)_\nu \, d\mu.$$

Заметим, что в силу условия (5) последний интеграл равен нулю. Тем самым все наши выкладки мы можем резюмировать следующим равенством

$$\int\limits_{\Omega_0} (|\nabla u|^2 - \lambda_0 u^2) \, d\mu = \int\limits_{\Omega_0} u_0^2 |\nabla q|^2 \, d\mu, \tag{9}$$

откуда следует требуемое неравенство (7). ■

Замечание 1. Из доказанного нами утверждения следует, что при сделанных предположениях о существовании положительной собственной функции, отвечающей положительному собственному значению λ_0, выполняется неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{\Omega} u^2 \, d\mu \le C \int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^2 \, d\mu.$$

Вопрос о неравенстве Пуанкаре (а также Соболева) на стратифицированном множестве хорошо изучен (см., например, [3, 4, 6]). Это неравенство выполняется лишь при условии так называемой прочности стратифицированного множества. Простейший тип подобного условия состоит в том, что каждую страту из Ω_0 можно соединить связной цепочкой страт из Ω_0 с некоторой граничной стратой так, что размерности соседних страт цепочки отличаются на единицу. Поэтому условие существования положительной собственной функции, отвечающей положительному собственному значению, накладывает ограничения на геометрическое устройство стратифицированного множества. По-видимому, упомянутой нами прочности достаточно для существования собственного значения и собственной функции с нужными нам свойствами, но пока нам это не удалось строго обосновать.

Замечание 2. Можно показать, что при условии прочности стратифицированного множества собственная функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_0(\Omega)$, а потому в приведенных выше выкладках в качестве u можно взять u_0, соответствующее q тогда будет равно единице. Тогда из (9) получится, что

$$\lambda_0 = \frac{\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u_0|^2}{\int\limits_{\Omega_0} u_0^2}.$$

Вкупе с неравенством (7) это приводит к классической формулировке принципа Рэлея (6). Именно в такой, традиционной форме, принцип Рэлея в случае одномерных стратифицированных множеств (геометрических графах) был получен в работе [6].

Список литературы

1. Pham F. Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur; 1967. 142 p.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит; 2005. 272 с.
3. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве. *Алгебра и анализ.* 2018;30(5):149-158. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1573
4. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Неравенство Пуанкаре и p-связность стратифицированного множества. *Сибирский математический журнал.* 2018;59(6):1291-1302. DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.606
5. Полиа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: ГИФМЛ; 1962. 336 с.
6. Gavrilov A., Nicaise S., Penkin O. Poincare's inequality on stratified sets and applications. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.* 2003;55:195-213.

7. Диаб А.Т., Кулешов П.А., Пенкин О.М. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе. *Математические заметки.* 2014;96(6):885–895. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10268

References

1. Pham F. Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur; 1967. 142 p.
2. Pokornyi YV., Penkin OM., Pryadiev VL., Borovskikh AV., Lazarev KP., Shabrov SA. Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh [Differential equations on geometric graphes]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 272 p. (In Russian).
3. Dairbekov NS., Penkin OM., Sarybekova LO. An analog of the Sobolev inequality on a stratified set. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2019;30:869–875. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1573
4. Dairbekov NS., Penkin OM., Sarybekova LO. The Poincaré inequality and p -connectedness of a stratified set *Siberian Mathematical Journal.* 2018;59(6):1024-1033. DOI: https://doi.org/10.1134/S003744661806006X
5. Pólya G., Szegő G. Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Princeton: Princeton univ. press; 1951. xvii+279 p. (Pólya G, Szegő G. Isoperimetric inequalities in mathematical physics Moscow: GIFML; 1962. 336 p.)
6. Gavrilov A., Nicaise S., Penkin O. Poincare's inequality on stratified sets and applications. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.* 2003;55:195-213.
7. Diab AT., Kuleshov PA., Penkin OM. Estimate of the first eigenvalue of the Laplacian on a graph. *Mathematical Notes.* 2014;96(6):948–956. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434614110327

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.06.2024
Поступила после рецензирования 30.07.2024
Принята к публикации 02.08.2024

Received June 18, 2024
Revised July 30, 2024
Accepted August 02, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ощепкова Софья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

Пенкин Олег Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Царев Сергей Львович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sofia N. Oshchepkova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Oleg M. Penkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor, Professor of the Chair of Mathematical Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Sergey L. Tsarev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor of the Chair of Mathematical Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia

К содержанию