Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 1. С. 11–26.
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 1. P. 11–26.

УДК 517.925.52,519.218.7
MSC 34F05,34C25
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-11-26

Периодические в среднем решения мультипликативно возмущенной гауссовым случайным шумом системы дифференциальных уравнений

Кабанцова Л. Ю.,
(*Статья представлена членом редакционной коллегии И. П. Половинкиным*)
Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
dlju@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений первого порядка со случайным гауссовым возмущением и случайной неоднородностью. Построена вспомогательная детерминированная линейная система дифференциальных уравнений, содержащая обычную и вариационную производные, с детерминированным начальным условием. Решение детерминированной задачи Коши позволяет получить формулу математического ожидания решения исходной задачи Коши. Найдены условия существования периодических в среднем решений системы и явная формула для периодического математического ожидания. Кроме того, получены условия периодичности второй моментной функции решения и явная формула для периодической второй моментной функции.

Ключевые слова: системы линейных дифференциальных уравнений, вариационная производная, математическое ожидание, периодическое в среднем решение, вторая моментная функция

Для цитирования: Кабанцова Л. Ю. 2025. Периодические в среднем решения мультипликативно возмущенной гауссовым случайным шумом системы дифференциальных уравнений. *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 11–26. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-11-26

Original Research

Periodic on the Mean Differential Equations Systemsolutions Multiplicatively Perturbed by Gaussian Random Noise

Larisa Yu. Kabantsova,
(*Article submitted by a member of the editorial board I. P. Polovinkin)*
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
dlju@yandex.ru

Abstract. The Cauchy problem for a first-order differential equations linear inhomogeneous system of with a random Gaussian perturbation and random inhomogeneity considered. Constructed an auxiliary deterministic differential equations linear system , containing ordinary and variational derivatives, with a deterministic initial condition. The deterministic Cauchy problem solution allows one to obtain a formula for the solution mathematical expectation to the original Cauchy problem. We found periodic on the mean system solutions existence conditions and an explicit formula for the periodic mathematical expectation. A similar technique is used to obtain a deterministic problem that allows finding an explicit formula for the second moment function solution to the original Cauchy problem. Second moment function solution periodicity conditions and an explicit formula for the periodic second moment function are also obtained.

Keywords: Linear Differential Equations Systems, Variational Derivative, Mathematical Expectation, Periodic on Mean Solution, Second Moment Function

For citation: Kabantsova L. Yu. 2025. Periodic on the Mean Differential Equations Systemsolutions Multiplicatively Perturbed by Gaussian Random Noise. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 11–26. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-11-26

1. Введение. Если коэффициенты линейного дифференциального уравнения и неоднородность являются детерминированными периодическими функциями, то хорошо известны условия существования периодического решения уравнения (например, [1, с. 90-98]). Однако, если рассматривать линейное дифференциальное уравнение со случайными коэффициентами, проблема нахождения периодического решения становится гораздо труднее. Вопросы существования периодических решений для дифференциальных уравнений со случайной правой частью были рассмотрены в [2, с. 69-90, 238-244]. При этом предполагается представление коэффициентов в виде суммы детерминированной функции и белого шума. В работах [3, 4] получены условия, гарантирующие периодичность математического ожидания и второй моментной функции решения скалярного линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайным коэффициентом и случайной неоднородностью. В указанных работах предполагается, что коэффициент уравнения является гауссовым случайным процессом или имеет равномерное распределение, при этом коэффициент уравнения и неоднородность являются статистически независимыми.

Определение 1.1. *Решение дифференциального уравнения со случайными коэффициентами называется периодическим в среднем [2, с. 70], если его математическое ожидание является периодической функцией.*

В работах [5, 6] приведены условия существования периодического в среднем решения скалярного линейного уравнения теплопроводности со случайными коэффициентами, коэффициенты уравнения предполагаются статистически независимыми гауссовыми процессами. В статье [7] рассмотрены условиях существования периодического в среднем решения векторного линейного уравнения со случайным коэффициентом $\varepsilon(t)$ и случайной неоднородностью f вида

$$x' = Ax + \varepsilon(t)x + f(t),$$

коэффициент $\varepsilon(t)$ предполагается гауссовым случайным процессом или имеет равномерное распределение и не зависит от векторного случайного процесса f.

2. Постановка задачи. Пусть $T = [t_0, \infty] \subset \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – вещественное множество, X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

Рассмотрим задачу Коши для векторного линейного дифференциального уравнения

$$x' = \varepsilon(t, \varpi)Ax + f(t, \varpi), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $\varepsilon(t, \varpi)$ – случайный процесс (при дальнейших записях зависимость от случайного события ϖ отражаться не будет), функция $x : T \to X$ искомое отображение, A – линейный ограниченный оператор, действующий в X, $f : T \to X$ – векторный случайный процесс, $x_0 \in X$ – заданный случайный вектор.

Уравнение (1) носит название мультипликативно возмущенное случайным шумом линейное дифференциальное уравнение.

Будем предполагать, что процессы ε и f являются независимыми и заданы своими характеристическими функционалами

$$\varphi_\varepsilon(u) = E[\exp(i\int\limits_T \varepsilon(s)u(s)\,ds)],$$

$$\varphi_f(v) = E[\exp(i\int\limits_T < f(s), v(s) > \,ds)],$$

где $< f(s), v(s) >= \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(s)v_i(s)$ – скалярное произведение. Символ E обозначает математическое ожидание, вычисляемое по функции распределения случайных процессов $\varepsilon(t)$ и $f(t)$ соответственно, функция u из пространства суммируемых функций $L_1(T, \mathbb{R})$, v – векторная суммируемая функция из пространства $L_1(T, X)$.

Целью настоящей работы является нахождение условий существования периодических в среднем и периодических вторых моментных функций решений задачи Коши (1), (2) и получение явных формул для периодического математического ожидания и второй моментной функции решения задачи (1), (2).

3. Переход к детерминированной задаче. В дальнейшей работе понадобится понятие вариационной производной [8]. Напомним её определение

Определение 3.1. *Если*

$$\psi(v+h) - \psi(v) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t, v)h(t)\,dt + o(h),$$

где $o(h)$ – бесконечно малая высшего порядка относительно h и интеграл (Лебега) является линейным ограниченным функционалом по переменной h, тогда отображение $\varphi : \mathbb{R} \times L_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ называется вариационной производной функционала ψ в точке v и обозначается $\dfrac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}$. Подробно техника дифференцирования изложена в [8].

Введем в рассмотрение обозначение

$$w = \exp(i\int\limits_T (\varepsilon(s)u(s) + < f(s), v(s) >) ds)$$

и вспомогательное отображение, построенное на его основе w и отображения x

$$y(t, u, v) = E[x(t)w].$$

Легко заметить, что

$$y(t,0,0) = E[x(t)]. \tag{3}$$

Умножим уравнение (1) и начальное условие (2) на w и усредним по функциям распределения ε, f, x_0. Получим

$$E[\frac{dx}{dt}w] = E[\varepsilon(t)Ax(t)w] + E[f(t)w], \tag{4}$$

$$E[x(t_0)w] = E[x_0 w]. \tag{5}$$

Используем введенное отображение $y(t,u,v)$ и соотношения

$$\frac{\partial y(t,u,v)}{\partial t} = E\left[\frac{dx}{dt}\exp(i\int\limits_T (\varepsilon(s)u(s) + < f(s), v(s) >)ds)\right],$$

$$\frac{\delta_p y(t,u,v)}{\delta u(t)} = iE\left[\varepsilon(t)x(t)\exp(i\int\limits_T (\varepsilon(s)u(s) + < f(s), v(s) >)ds)\right],$$

$$\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)} = iE\left[f(t)\exp(i\int\limits_T < f(s), v(s) > ds)\right],$$

где $\frac{\delta_p y(t,u,v)}{\delta u(t)}$ – частная вариационная производная по переменной u [8, с. 14].

С учетом предположения о независимости случайных процессов ε и f равенство (4) можно записать следующим образом

$$\frac{\partial y(t,u,v)}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p y(t,u,v)}{\delta u(t)} - i\varphi_\varepsilon(u)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}. \tag{6}$$

Если считать, что случайный вектор x_0 не зависит от ε и f, то равенство (5) можно переписать в виде

$$y(t_0,u,v) = E[x_0]\varphi_\varepsilon(u)\varphi_f(v). \tag{7}$$

Таким образом, было формально получено детерминированное дифференциальное уравнение (6) первого порядка с обычной и вариационной производными и детерминированное начальное условие для этого уравнения (7).

Решением задачи (6), (7) называется отображение $y : T \times L_1(T,\mathbb{R}) \times L_1(T,X) \to X$, удовлетворяющее почти всюду уравнению (6) и начальному условию (7).

Задача (6), (7) была получена формально, однако равенство (3) дает возможность сформулировать следующее определение:

Определение 3.2. *Математическим ожиданием* $E[x(t)]$ *решения задачи* (1), (2) *называется функция* $y(t,0,0)$, *где* $y(t,u,v)$ *является решением задачи* (6), (7).

4. Оператор $U(s,t)$ и его свойства. Рассмотрим функцию переменной τ $\chi(s,t,\tau)$, равную $sign(\tau - s)$, при τ, принадлежащем отрезку с концами t, s, и равную нулю в противном случае, I – единичный оператор в пространстве X. Заметим, что функция χ обладает свойством $\chi(s,t_1+t_2) = \chi(s,t_1) + \chi(s,t_2)$ при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Построим операторнозначную функцию на основе заданного функционала [9, 10, 11]. Пусть $\varphi : L_1(T,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ –аналитический функционал

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_T \ldots \int\limits_T c_k(s_1,\ldots,s_k)u(s_1)\ldots u(s_k)ds_1\ldots ds_k,$$

где c_k – симметричные по любым двум переменным функции. Тогда можно определить матричное отображение $\varphi(uI)$, где I – единичный оператор, как $\varphi(uI) = \varphi(u)I$.

На множестве аналитических операторных функций зададим оператор $U(s,t)$ по следующему правилу:

$$U(s,t)\varphi(uI) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_T \ldots \int\limits_T c_k(s_1,\ldots,s_k)(u(s_1)I - i\chi(s_1,t)A)\ldots(u(s_k)I - i\chi(s_k,t)A)ds_1\ldots ds_k.$$

Эту сумму будем обозначать $\varphi(uI - i\chi(s,t)A)$.

Таким образом,

$$U(s,t)\varphi(uI) = \varphi(uI - i\chi(s,t)A).$$

Свойства оператора $U(s,t)$ подробно изучены в работах [9, 10]. Перечислим его свойства:

1. $U(t_0, t_0)\varphi(uI) = \varphi(uI) = \varphi(u)I,$

2. $U(t,\tau)U(\tau, s) = U(t, s),$

3. $AU(t, s) = U(t, s)A,$

4. $U(t + \tau, s) = U(t, s)U(t + \tau, t),$

5. $U(t, s)[\alpha\varphi_1(uI) + \beta\varphi_2(uI)] = \alpha U(t, s)\varphi_1(uI) + \beta U(t, s)\varphi_2(uI)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

6. $U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0),$

7. $\frac{\delta}{\delta u(t)}U(t, s)\varphi(uI) = U(t, s)\frac{\delta\varphi(uI)}{\delta u(t)}.$

Рассмотрим характеристический функционал гауссова случайного процесса ε, он имеет вид [8, с. 206]

$$\psi_\varepsilon(u) = \exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}} E[\varepsilon(s)]u(s)ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2\right), \tag{8}$$

где $E[\varepsilon(s)]$ – математическое ожидание, $b(s_1, s_2) = E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] - E[\varepsilon(s_1)]E[\varepsilon(s_2)]$ – ковариационная функция случайного процесса ε.

Лемма 4.1. *Если $\psi_\varepsilon(u)$ имеет вид* (8) *и при этом $E[\varepsilon(s)]$ – ω-периодическая функция, $b(s_1, s_2)$ – ω-периодическая функция по обеим переменным, то*

1. $U(0, t + \omega)\varphi_\varepsilon(uI) = U(0, t)U(0, \omega)\varphi_\varepsilon(uI) = U(0, \omega)U(0, t)\varphi_\varepsilon(uI),$

2. $U(t + \omega, 0)\varphi_\varepsilon(uI) = U(t, 0)U(\omega, 0)\varphi_\varepsilon(uI) = U(\omega, 0)U(t, 0)\varphi_\varepsilon(uI).$

Доказательство. Докажем первое свойство. Отметим, что ковариационная функция $b(s_1, s_2)$ симметрична по двум своим переменным, применяя теорему Фубини, приходим к следующему результату:

$$U(0, t + \omega)\varphi_\varepsilon(uI) = \varphi_\varepsilon(uI - i\chi(0, t + \omega)A) = \exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}} E[\varepsilon(s)]u(s)dsI + \int\limits_0^t E[\varepsilon(s)]dsA + \int\limits_t^{t+\omega} E[\varepsilon(s)]dsA - \right.$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2I + i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^t b(s_1, s_2)u(s_1)ds_1ds_2A + i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+\omega} b(s_1, s_2)u(s_1)ds_1ds_2A +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_t^{t+\omega} b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2}\int\limits_t^{t+\omega}\int\limits_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2}\int\limits_t^{t+\omega}\int\limits_t^{t+\omega} b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2\right).$$

Отметим, что если функция $a(\cdot)$ – ω-периодическая при любом $t \in \mathbb{R}$, то справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_t^{t+\omega} a(s)ds = \int\limits_0^\omega a(s)ds.$$

С учетом предположения леммы о ω-периодичности $E[\varepsilon(s)]$ и $b(s_1, s_2)$ приходим к следующему результату:

$$U(0, t + \omega)\varphi_\varepsilon(uI) = \exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}} E[\varepsilon(s)]u(s)dsI + \int\limits_0^t E[\varepsilon(s)]dsA + \int\limits_0^\omega E[\varepsilon(s)]dsA - \right.$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2I + i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^t b(s_1, s_2)u(s_1)ds_1ds_2A + i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^\omega b(s_1, s_2)u(s_1)ds_1ds_2A +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2\right).$$

С другой стороны,

$$U(0,t)U(0,\omega)\varphi_\varepsilon(uI)=\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(0,t)A-i\chi(0,\omega)A)=U(0,\omega)U(0,t)\varphi_\varepsilon(uI)=$$
$$=\exp\Bigg(i\int\limits_{\mathbb{R}}E[\varepsilon(s)]u(s)dsI+\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(s)]dsA+\int\limits_0^t E[\varepsilon(s)]dsA-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}b(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2I+$$
$$+i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^t b(s_1,s_2)u(s_1)ds_1ds_2A+i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)u(s_1)ds_1ds_2A+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\Bigg).$$

Последнее выражение полностью совпадает с выражением, полученным ранее для $U(0,t+\omega)\varphi_\varepsilon(uI)$. Их совпадение говорит о справедливости первой формулы леммы. Вторая формула доказывается аналогично.

5. Математическое ожидание решения задачи (1), (2)**.** Формула для математического ожидания и смешанных моментных функций получена в работе [9, 11] для случая, когда случайный коэффициент ε задан гауссовым характеристическим функционалом и может быть статистически зависим с случайным процессом f.

По нашему предположению процессы ε и f независимы, тогда справедлива следующая теорема

Теорема 5.1. *Если процессы ε и f независимы и ε – гауссов процесс с характеристическим функционалом* (8)*, кроме того существуют вариационные производные $\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}$ и $\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(t_0,t)A)}{\delta u(t)}$, тогда решение задачи* (6), (7) *имеет вид*

$$y(t,u,v)=U(t_0,t)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0]-i\int\limits_{t_0}^t U(s,t)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds=$$
$$=\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(t_0,t)A)\varphi_f(v)E[x_0]-i\int\limits_{t_0}^t\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(s,t)A)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds. \quad (9)$$

Доказательство. Легко убедиться, что формула (9) удовлетворяет начальному условию (7). Покажем, что она определяет решение уравнения (6). Для этого найдем $\frac{\partial y(t,u,v)}{\partial t}$ от формулы (9)

$$\frac{\partial y(t,u,v)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(t_0,t)A)\varphi_f(v)E[x_0]-i\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{t_0}^t\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(s,t)A)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds=$$
$$=-iA\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(t_0,t)A)}{\delta u(t)}\varphi_f(v)E[x_0]-i\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}-A\int\limits_{t_0}^t\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(s,t)A)}{\delta u(t)}\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds,$$

и вариационную производную $\frac{\delta_p y(t,u,v)}{\delta u(t)}$

$$\frac{\delta_p y(t,u,v)}{\delta u(t)}=U(t_0,t)\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI)}{\delta u(t)}\varphi_f(v)E[x_0]-i\int\limits_{t_0}^t U(s,t)\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI)}{\delta u(t)}\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds=$$
$$=\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(t_0,t)A)}{\delta u(t)}\varphi_f(v)E[x_0]-i\int\limits_{t_0}^t\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI-i\chi(s,t)A)}{\delta u(t)}\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds.$$

Тогда нетрудно увидеть, что

$$\frac{\partial y(t,u,v)}{\partial t}=-iA\frac{\delta_p y(t,u,v)}{\delta u(t)}-i\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}.$$

Следовательно, $y(t,u,v)$, определяемая формулой (9), является решением уравнения (6).

Замечание 5.1. С подробным обоснованием теоремы 5.1 можно ознакомиться в статье [9, 11].

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1, тогда математическое ожидание решения задачи* (1), (2) *определяется формулой*

$$E[x(t)] = \varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t)A)E[x_0] + \int_{t_0}^{t} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t)A)E[f(s)]ds \tag{10}$$

или с учетом вида функционала $\varphi_\varepsilon(u)$ (8) *получаем*

$$E[x(t)] = \exp\left(\int_{t_0}^{t} E[\varepsilon(s)]dsA + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right)E[x_0] +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t} E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2}\int_{s}^{t}\int_{s}^{t} b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right\}E[f(s)]ds. \tag{11}$$

Доказательство. В силу определения $E[x(t)] = y(t,0,0)$. Полагая в равенстве (9) $u = 0$, $v = 0$, так как $\varphi_f(0) = 1$, а $\left.\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}\right|_{v=0} = iE[f(s)]$ [8, с. 30], получаем формулы (10) и (11).

6. Существование периодических решений уравнения (6).

Теорема 6.1. *Пусть выполнено условие леммы 4.1, кроме того* $\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}$ *есть* ω*-периодическая функция и определен оператор* $(U(\omega,0)-I)^{-1}$, *тогда*

$$y(t,u,v) = -iU(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}\int_{t}^{t+\omega} U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds \tag{12}$$

является ω*-периодическим решением уравнения* (6).

Доказательство. Отметим, что в случае ω-периодичности функции $y(t,u,v)$ по переменной t, всегда справедливо равенство $y(\omega,u,v) = y(0,u,v)$. Запишем это равенство для $y(t,u,v)$, определяемого формулой (9), при условии, что $t_0 = 0$.

$$\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0] = U(0,\omega)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0] - i\int_0^{\omega} U(s,\omega)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds.$$

Преобразуем полученное равенство

$$U(0,\omega)(U(\omega,0)-I)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0] = -i\int_0^{\omega} U(s,\omega)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds.$$

По условию теоремы существует оператор $(U(\omega,0)-I)^{-1}$, что позволяет из последнего равенства получить уравнение для нахождения начального условия (7)

$$\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0] = -i(U(\omega,0)-I)^{-1}\int_0^{\omega} U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds.$$

Подстановим найденное выражение в формулу (9) в случае $t_0 = 0$

$$y(t,u,v) = -iU(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}\int_0^{\omega} U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds - i\int_0^{t} U(s,t)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds =$$
$$= -iU(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}\left[\int_0^{\omega} U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds + \int_0^{t} U(\omega,0)U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds - \right.$$
$$\left. - \int_0^{t} U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds\right] = -iU(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}\left[\int_t^{\omega} U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^{t} U(\omega,0)U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds\right].$$

Преобразуем второй интеграл с учетом леммы 4.1 и предположения теоремы о ω-периодичности по t функции $\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}$

$$\int\limits_0^t U(\omega,0)U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds = \int\limits_0^t U(s+\omega,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds = |s+\omega = s_1| =$$

$$= \int\limits_\omega^{t+\omega} U(s_1,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1-\omega)}ds_1 = \int\limits_\omega^{t+\omega} U(s_1,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1)}ds_1.$$

Подставляя полученный результат в формулу для $y(t,u,v)$ и объединяя интегралы, получаем формулу (12).

Осталось установить, что $y(t,u,v)$, определяемая формулой (12), является ω-периодической функцией переменной t. Вычислим $y(t+\omega,u,v)$

$$y(t+\omega,u,v) = -iU(0,t+\omega)(U(\omega,0)-I)^{-1}\int\limits_{t+\omega}^{t+2\omega} U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds = |s_1 = s-\omega| =$$

$$= -iU(0,t)U(0,\omega)(U(\omega,0)-I)^{-1}\int\limits_t^{t+\omega} U(s_1+\omega,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1+\omega)}ds_1 =$$

$$= -iU(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}U(0,\omega)\int\limits_t^{t+\omega} U(\omega,0)U(s_1,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1)}ds_1 =$$

$$= -iU(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}\int\limits_t^{t+\omega} U(s_1,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1)}ds_1 = y(t,u,v).$$

7. Периодические в среднем решения уравнения (1).

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1, тогда периодическое в среднем решение уравнения* (1) *представимо в виде*

$$E[x(t)] = U(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}\int\limits_t^{t+\omega} \varphi_\varepsilon(i\chi(0,s)A)E[f(s)]ds. \qquad (13)$$

Доказательство. В силу теоремы 6.1 математическое ожидание $E[x(t)] = y(t,0,0)$ является ω-периодической функцией. Полагая в формуле (12) $u=0$ и $v=0$, и так как $\left.\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}\right|_{v=0} = iE[f(s)]$, получаем формулу (13).

Замечание 7.1. Полученная формула (13) имеет один существенный недостаток, это трудность вычисления оператора $(U(\omega,0)-I)^{-1}$.

Найдем другую форму представления периодического в среднем решения уравнения (1).

Теорема 7.2. *Пусть справедливы условия леммы 4.1, существует оператор* $(U(\omega,0)-I)^{-1}$, *математическое ожидание* $E[f(t)]$ *является* ω*-периодическим, кроме того выполнено условие* $\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega,0)A)\neq I$, *тогда периодическое в среднем решения уравнения* (1) *задается формулой*

$$E[x(t)] = (\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega,0)A)-I)^{-1}\int\limits_t^{t+\omega} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t)A)E[f(s)]ds.$$

Доказательство. На основании формулы (12) математическое ожидание $E[x(t)]$ имеет вид

$$E[x(t)] = \left.\left(-iU(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}\int\limits_t^{t+\omega} U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds\right)\right|_{\substack{u=0\\ v=0}}.$$

Заметим, что

$$(U(\omega,0)-I)^{-1}\varphi_\varepsilon(uI)\big|_{u=0} = (\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega,0)A)-I)^{-1}\varphi_\varepsilon(uI)\big|_{u=0}.$$

Основываясь на лемме 4.1, можно утверждать, что операторы $(U(\omega,0)-I)^{-1}$ и $U(s,0)$ перестановочны. Тогда

$$U(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}U(s,0)\varphi_\varepsilon(uI)\big|_{u=0} = (\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega,0)A)-I)^{-1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t)A),$$

что и приводит к необходимому результату.

Теорема 7.3. *Если справедливы условия теоремы 5.2 и $\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega,0)A)=I$, тогда для существования ω-периодического математического ожидания решения уравнения* (1) *необходимо выполнение условия*

$$\int\limits_0^\omega \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,0)A)E[f(s)]ds=0. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $E[x(t)]$ ω – периодическая функция. Тогда справедливо $E[x(0)]=E[x(\omega)]$. Запишем данное равенство, основываясь на формуле (10) в предположении, что $t_0=\omega$

$$\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega,0)A)E[x_0]+\int\limits_\omega^0 \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,0)A)E[f(s)]ds=E[x_0].$$

Отсюда легко сделать вывод о справедливости теоремы.

Используя вид функционала $\varphi_\varepsilon(u)$, напомним, что он определяет характеристический функционал гауссова случайного процесса ε (8), мы можем получить уточнённые версии теорем 7.2 и 7.3.

Теорема 7.4. *Пусть $E[\varepsilon(s)]$, $E[f(s)]$ – ω-периодические функции по s, а $b(t,s)$ – ω-периодическая по обоим переменным. Кроме того, существует оператор $(U(\omega,0)-I)^{-1}$ и оператор $-\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2$ не имеет собственных значений вида $2\pi ik, k\in\mathbb{Z}$, тогда*

$$E[x(t)]=\left(\exp(-\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2)-I\right)^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_t^{t+\omega}\exp\left[\int\limits_s^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right]E[f(s)]ds$$

является ω-периодическим математическим ожиданием решения уравнения (1).

Доказательство. Отметим, что требование отсутствия в спектре оператора $-\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2$ собственных значений вида $2\pi ik, k\in\mathbb{Z}$, равносильно выполнению условия теоремы 7.2 $\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega,0)A)\neq I$ с учетом вида характеристического функционала (8). Убедимся непосредственно в ω-периодичности $E[x(t)]$. Выпишем $E[x(t+\omega)]$

$$E[x(t+\omega)]=\left(\exp(-\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2)-I\right)^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_{t+\omega}^{t+2\omega}\exp\left[\int\limits_s^{t+\omega} E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_s^{t+\omega}\int\limits_s^{t+\omega} b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right]E[f(s)]ds=|s=\xi+\omega|=$$
$$=\left(\exp(-\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2)-I\right)^{-1}\int\limits_t^{t+\omega}\exp\left[\int\limits_{\xi+\omega}^{t+\omega} E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_{\xi+\omega}^{t+\omega}\int\limits_{\xi+\omega}^{t+\omega} b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right]E[f(\xi+\omega)]d\xi=\left(\exp(-\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2)-I\right)^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_t^{t+\omega}\exp\left[\int\limits_\xi^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_\xi^t\int\limits_\xi^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right]E[f(\xi)]d\xi=E[x(t)].$$

Пусть теперь не выполнено условие теоремы 7.4, т. е. спектр оператора $-\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+$ $+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2$ содержит хотя бы одно собственное значение вида $2\pi ik, k\in\mathbb{Z}$, тогда справедливо

$$\exp\left(-\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right)=I. \tag{15}$$

Согласно теореме 7.3, если существует ω-периодическое математическое ожидание $E[x(t)]$, то должно выполняться условие (14). В нашем случае

$$\int\limits_0^\omega \exp\left[-\int\limits_0^s E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^s\int\limits_0^s b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right]E[f(s)]ds=0.$$

Выясним, существует ли при выполнении условия (15) ω-периодическое математическое ожидание $E[x(t)]$.

Лемма 7.1. *Пусть $f(t,s)$ – ω-периодическая функция по s и t, A – линейный ограниченный оператор. Тогда интеграл $\int\limits_a^t f(t,s)ds$ является ω-периодической функцией по t тогда и только тогда, когда выполнено условие $\int\limits_a^\omega f(t,s)ds=0$ для любого $t\in[0,\omega)$. Кроме того, функция $\exp(\int\limits_a^t f(t,s)dsA)$ является ω-периодической по t тогда и только тогда, когда выполнено условие $\exp\left[\int\limits_a^\omega f(t,s)dsA\right]=I$ для любого $t\in[0,\omega)$.*

Доказательство. Справедливость первого утверждения леммы следует из равенства

$$\int\limits_a^{t+\omega} f(t,s)ds=\int\limits_a^t f(t,s)ds+\int\limits_t^{t+\omega} f(t,s)ds=\int\limits_a^t f(t,s)ds+\int\limits_0^\omega f(t,s)ds.$$

Второе утверждение показывается аналогично.

Теорема 7.5. *Если выполнено условие* (15) *и* $E[f(s)]\equiv 0$, *то для существования ненулевого ω- периодического в среднем решения уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\exp(-\int\limits_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A)=I,\qquad \int\limits_0^\omega b(t,\tau)d\tau=0. \tag{16}$$

Если условия (16) *выполняются, и кроме того выполнено условие при всех $t\in[0,\omega)$*

$$\int\limits_0^\omega \exp\left(\int\limits_s^0 E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_s^0\int\limits_s^0 b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2+\int\limits_s^0\int\limits_0^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right)E[f(s)]ds=0, \tag{17}$$

то все решения уравнения (1) *являются ω-периодическими в среднем и $E[x(t)]$ имеет вид*

$$\begin{aligned}E[x(t)]=&\left[\exp(\int\limits_0^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2)E[x_0]\right]+\\&+\left\{\int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_s^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right)E[f(s)]ds\right\}.\end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $E[f(s)]\equiv 0$. Предположим, что уравнение (1) имеет ω-периодическое в среднем решение $E[x(t)]\neq 0$. Формула (10) для случая $t_0=0$ принимает вид

$$E[x(t)]=\exp(\int\limits_0^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2)E[x_0],$$

а

$$\begin{aligned}E[x(t+\omega)]=&\exp(\int\limits_0^{t+\omega} E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+\omega}\int\limits_0^{t+\omega} b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2)E[x_0]=\\&=\exp(\int\limits_t^{t+\omega}\left[E[\varepsilon(s)]A+\int\limits_0^t b(s_1,s)ds_1A^2+\frac{1}{2}\int\limits_t^{t+\omega} b(s_1,s)ds_1A^2\right]ds)E[x(t)].\end{aligned}$$

Учитывая предположение о существовании ω-периодического в среднем решения $E[x(t)] = E[x(t+\omega)]$, получаем

$$\exp(\int_t^{t+\omega}\left[E[\varepsilon(s)]A+\int_0^t b(s_1,s)ds_1A^2+\frac{1}{2}\int_t^{t+\omega} b(s_1,s)ds_1A^2\right]ds) = I.$$

Продифференцируем полученное равенство по t, имеем

$$\exp(\int_t^{t+\omega}\left[E[\varepsilon(s)]A+\int_0^t b(s_1,s)ds_1A^2+\frac{1}{2}\int_t^{t+\omega} b(s_1,s)ds_1A^2\right]ds)\left\{E[\varepsilon(t+\omega)]A-E[\varepsilon(t)]A+\right.$$
$$+\int_0^t b(s_1,t+\omega)ds_1A^2-\int_0^t b(s_1,t)ds_1A^2+\frac{1}{2}\int_t^{t+\omega} b(s_1,t+\omega)ds_1A^2-\frac{1}{2}\int_t^{t+\omega} b(s_1,t)ds_1A^2+\int_t^{t+\omega} b(t,s)dsA^2+$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_t^{t+\omega} b(t+\omega,s)dsA^2-\frac{1}{2}\int_t^{t+\omega} b(t,s)dsA^2\right\} = \emptyset.$$

Учитывая предположения о периодичности $E[\varepsilon(s)]$ и $b(t,s)$, получаем условие $\int_t^{t+\omega} b(t,s)ds = 0$, что эквивалентно требованию $\int_0^{\omega} b(t,s)ds = 0$. Тогда очевидно, что $\int_0^{\omega}\int_0^{\omega} b(t,s)dtds = 0$. С учетом этого условие (15) принимает вид

$$\exp(-\int_0^{\omega} E[\varepsilon(\tau)]d\tau A) = I.$$

Таким образом, условия (16) получены и необходимость доказана.

Покажем достаточность условий (16) для существования ω-периодического в среднем решения уравнения (1) в случае $E[f(s)] \equiv 0$. Из равенства (10) легко получить представление (18) для математического ожидания задачи (1), (2). Из равенств (16) с применением леммы 7.1 можно установить ω-периодичность первого слагаемого для $E[x(t)]$ в формуле (18), записанного в квадратных скобках. Следовательно, при $E[f(s)] \equiv 0$ из условий (16) вытекает ω-периодичность математического ожидания $E[x(t)]$ решения задачи (1), (2).

Осталось доказать вторую часть теоремы для случая $E[f(s)] \neq 0$. Для этого достаточно установить, что выполнение условий (16) и (17) приведет к ω-периодичности второго слагаемого в выражении (18), записанного в фигурных скобках.

Перепишем функцию, стоящую в фигурных скобках из выражения (18) следующим образом

$$\int_0^t \exp\left(\int_s^0 E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\int_0^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int_s^0\int_s^0 b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2+\int_s^0\int_0^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right)E[f(s)]ds = \exp\left(\int_0^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right)\times$$
$$\times\int_0^t \exp\left(\int_s^0 E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int_s^0\int_s^0 b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2+\int_s^0\int_0^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right)E[f(s)]ds.$$

Тогда из условий (16) и (17) на основании леммы 7.1 делаем вывод о ω-периодичности последнего выражения.

8. Вторая моментная функция решения уравнения (1). Найдем вторую моментную функцию решения задачи (1), (2) в тех же предположениях, т. е. будем считать процессы ε и f независимыми и заданными характеристическими функционалами $\varphi_\varepsilon(u)$ и $\varphi_f(v)$, а случайный вектор x_0 независимым от ε и f.

Умножим уравнение (1) на $x^T(\tau)w$ и возьмем математическое ожидание полученного равенства

$$E[\frac{dx(t)}{dt}x^T(\tau)w] = E[\varepsilon(t)Ax(t)x^T(\tau)w]+E[f(t)x^T(\tau)w]. \tag{19}$$

Введем обозначение

$$\zeta(t,\tau,u,v) = E[x(t)x^T(\tau)w].$$

Тогда уравнение (19) формально можно переписать в виде

$$\frac{\partial\zeta(t,\tau,u,v)}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p\zeta(t,\tau,u,v)}{\delta u(t)} - i\frac{\delta_p y(\tau,u,v)}{\delta v(t)}. \tag{20}$$

Умножим начальное условие (2) на $x^T(t_0)w$ и вычислим математическое ожидание полученного равенства с учетом предположения

$$E[x(t_0)x^T(t_0)w] = E[x_0\cdot x_0^T]\varphi_\varepsilon(u)\varphi_f(v).$$

Тогда получаем

$$\zeta(t_0,t_0,u,v) = E[x_0\cdot x_0^T]\varphi_\varepsilon(u)\varphi_f(v). \tag{21}$$

Определение 8.1. *Второй моментной функцией* $E[x(t)x^T(\tau)]$ *решения задачи Коши* (1), (2) *называется* $\zeta(t,\tau,0,0)$, *где* $\zeta(t,\tau,u,v)$ *– симметричное по переменным* t, τ *решение уравнения* (20), *удовлетворяющее условию* $\zeta(t_0,\tau,u,v) = E[x(t_0)x^T(\tau)w]$, *в некоторой окрестности точки* $u = 0$, $v = 0$.

Нам необходимо в первую очередь получить начальное условие для уравнения (20). Запишем уравнение (20) при $\tau = t_0$

$$\frac{\partial\zeta(t,t_0,u,v)}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p\zeta(t,t_0,u,v)}{\delta u(t)} - i\frac{\delta_p y(t_0,u,v)}{\delta v(t)}. \tag{22}$$

Задача (22), (21) имеет вид задачи (6), (7). Запишем ее решение по формуле (9)

$$\zeta(t,t_0,u,v) = U(t_0,t)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T] - i\int\limits_{t_0}^{t} U(s,t)\frac{\delta_p y(t_0,u,v)}{\delta v(s)}ds.$$

Так как $\zeta(t,\tau,u,v)$ должна быть симметрична по переменным t и τ, то

$$\zeta(t_0,\tau,u,v) = U(t_0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T] - i\int\limits_{t_0}^{\tau} U(s,\tau)\frac{\delta_p y(t_0,u,v)}{\delta v(s)}ds.$$

Подставим вид $y(t_0,u,v)$ из формулы (9), получаем начальное условие для уравнения (20)

$$\zeta(t_0,\tau,u,v) = U(t_0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T] - i\int\limits_{t_0}^{\tau} U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds. \tag{23}$$

Задача (20), (23) имеет вид задачи (6), (7). Выпишем ее решение по формуле (9)

$$\zeta(t,\tau,u,v) = U(t_0,t)U(t_0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T] - iU(t_0,t)\int\limits_{t_0}^{\tau} U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds -$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t} U(s,t)\frac{\delta_p y(\tau,u,v)}{\delta v(s)}ds.$$

Подставляя в последний интеграл представление для $y(\tau,u,v)$ из формулы (9), окончательно получаем

$$\zeta(t,\tau,u,v) = U(t_0,t)U(t_0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T] - iU(t_0,t)\int\limits_{t_0}^{\tau} U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t} U(s,t)U(t_0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds - \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau} U(s,t)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1 ds. \tag{24}$$

Заметим, что функция $\zeta(t,\tau,u,v)$, определяемая формулой (24), симметрична по переменным t и τ.

Замечание 8.1. Все приведенные выше рассуждения по нахождению решения задачи (20), (23) сделаны в следующих предположениях: характеристический функционал φ_ε имеет вариационную производную

$$\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI - i\chi(\sigma,t)A - i\chi(\xi,\tau)A)}{\delta u(\xi)},$$

кроме того существуют вариационные производные

$$\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} \quad \text{и} \quad \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}.$$

Теорема 8.1. *В условиях замечания 8.1 формула вида*

$$E[x(t)x^T(\tau)] = \varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t)A - i\chi(t_0,\tau)A)E[x_0\cdot x_0^T] + \int\limits_{t_0}^{\tau} \varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t)A - i\chi(s,\tau)A)E[f(s)]dsE[x_0] +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t)A - i\chi(t_0,\tau)A)E[f(s)]dsE[x_0] + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t)A - i\chi(s_1,\tau)A)E[f(s)f^T(s_1)]ds_1ds$$

является второй моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Отметим, что

$$\left.\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}\right|_{v=0} = iE[f(s)], \quad \text{а} \quad \left.\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}\right|_{v=0} = E[f(s)f^T(s_1)].$$

Подставляя в (24) $u = 0$ и $v = 0$, получаем требуемое равенство.

9. Существование периодического решения уравнения (20)**.**

Теорема 9.1. *Пусть справедливы предположения леммы 4.1, существует оператор* $(U(\omega,0)-I)^{-1}$, *кроме того,* $\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}$ *является ω-периодической функцией и* $\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}$ *является ω-периодической функцией по s и s_1, тогда уравнение* (20) *имеет ω-периодическое симметричное по t и τ решение вида*

$$\zeta(t,\tau,u,v) = U(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}\left\{-i\int\limits_{t}^{t+\omega} U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}dsE[x_0] - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{t}^{t+\omega}\int\limits_{0}^{\tau} U(s,0)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds\right\}. \quad (25)$$

Доказательство. Запишем решение (24) в предположении, что $t_0 = 0$

$$\zeta(t,\tau,u,v) = U(0,t)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T] - iU(0,t)\int\limits_0^{\tau} U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds -$$
$$- i\int\limits_0^{t} U(s,t)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds - \int\limits_0^{t}\int\limits_0^{\tau} U(s,t)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds. \quad (26)$$

Если предположить, что уравнение (20) имеет ω-периодическое по t решение, то должно выполняться условие $\zeta(\omega,\tau,u,v) = \zeta(0,\tau,u,v)$. Запишем данное равенство, используя представление (26)

$$U(0,\omega)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T] - iU(0,\omega)\int\limits_0^{\tau} U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds -$$
$$- i\int\limits_0^{\omega} U(s,\omega)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds - \int\limits_0^{\omega}\int\limits_0^{\tau} U(s,\omega)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds =$$
$$= U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T] - i\int\limits_0^{\tau} U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds.$$

Перепишем полученное равенство в виде

$$U(0,\omega)(U(\omega,0)-I)\left\{U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T] - i\int\limits_0^{\tau} U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds\right\} =$$
$$= -i\int\limits_0^{\omega} U(s,\omega)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds - \int\limits_0^{\omega}\int\limits_0^{\tau} U(s,\omega)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds.$$

По предположению теоремы существует обратный оператор $(U(\omega,0)-I)^{-1}$, тогда

$$U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0\cdot x_0^T]-i\int\limits_0^\tau U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds=(U(\omega,0)-I)^{-1}U(\omega,0)\times$$
$$\times\left\{-i\int\limits_0^\omega U(s,\omega)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds-\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\tau U(s,\omega)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds\right\}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (26), получаем

$$\zeta(t,\tau,u,v)=U(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}U(\omega,0)\left\{-i\int\limits_0^\omega U(s,\omega)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds-\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\tau U(s,\omega)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds\right\}-i\int\limits_0^t U(0,t)U(s,0)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau U(0,t)U(s,0)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds=U(0,t)(U(\omega,0)-I)^{-1}\times$$
$$\times\left\{-i\int\limits_0^\omega U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds-\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\tau U(s,0)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds-\right.$$
$$-i\int\limits_0^t U(\omega,0)U(s,0)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds+i\int\limits_0^t U(s,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds-$$
$$\left.-\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau U(\omega,0)U(s,0)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau U(s,0)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds\right\}.$$

Преобразуем третий и пятый интеграл последней суммы, используя лемму 4.1 и предположение теоремы, имеем

$$-i\int\limits_0^t U(\omega,0)U(s,0)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds=$$
$$-i\int\limits_0^t U(\omega+s,0)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}E[x_0]ds=-i\int\limits_\omega^{t+\omega}U(s_1,0)U(0,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1-\omega)}E[x_0]ds_1=$$
$$-i\int\limits_\omega^{t+\omega}U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1)}E[x_0]ds_1,$$

а

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau U(\omega,0)U(s,0)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds=-\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau U(\omega+s,0)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}ds_1ds=$$
$$=-\int\limits_\omega^{t+\omega}\int\limits_0^\tau U(\sigma,0)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(\sigma-\omega)\delta v(s_1)}ds_1d\sigma=-\int\limits_\omega^{t+\omega}\int\limits_0^\tau U(\sigma,0)U(s_1,\tau)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(\sigma)\delta v(s_1)}ds_1d\sigma.$$

Подставляя эти выражения в соотношение для $\zeta(t,\tau,u,v)$ и объединяя интегралы, получаем равенство (25).

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться в том, что $\zeta(t,\tau,u,v)$, определяемая формулой (25), является ω-периодической функцией переменных t и τ. Для этого достаточно вычислить $\zeta(t+\omega,\tau,u,v)$ и по аналогии с теоремой 7.1 убедиться в том, что $\zeta(t+\omega,\tau,u,v)=\zeta(t,\tau,u,v)$.

Так как вторая моментная функция симметрична по переменным t и τ, то получаем периодичность второй моментной функции по обеим переменным.

10. Периодическая вторая моментная функция решения уравнения (1).

Теорема 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1, тогда*

$$E[x(t)x^T(\tau)] = (U(\omega,0)-I)^{-1}\left\{\int\limits_t^{t+\omega}\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t)A - i\chi(s,\tau)A)E[f(s)]dsE[x_0]+\right.$$
$$\left.+\int\limits_t^{t+\omega}\int\limits_0^{\tau}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t)A - i\chi(s_1,\tau)A)E[f(s)f^T(s_1)]ds_1ds\right\}$$

определяет ω-периодическую по t и τ вторую моментную функцию решения уравнения (1).

Доказательство. Доказывается по аналогии с теоремой 8.1.

Теорема 10.2. *Если в случае выполнения условия теоремы 10.1 выполнено соотношение $\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega,0)A)\neq I$, тогда*

$$E[x(t)x^T(\tau)] = (\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega,0)A)-I)^{-1}\left\{\int\limits_t^{t+\omega}\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t)A - i\chi(s,\tau)A)E[f(s)]dsE[x_0]+\right.$$
$$\left.+\int\limits_t^{t+\omega}\int\limits_0^{\tau}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t)A - i\chi(s_1,\tau)A)E[f(s)f^T(s_1)]ds_1ds\right\}.$$

определяет ω-периодическую по t и τ вторую моментную функцию решения уравнения (1).

Используя вид функционала $\varphi_\varepsilon(u)$ – характеристического функционала гауссова случайного процесса ε (8), можно получить уточнение теоремы 10.2.

Теорема 10.3. *Пусть $E[\varepsilon(s)]$, $E[f(s)]$ – ω-периодические функции по s, а $b(t,s)$ – ω-периодическая функция по обеим переменным. Кроме того, существует оператор $(U(\omega,0)-I)^{-1}$ и оператор*

$$-\int\limits_0^{\omega}E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\omega}\int\limits_0^{\omega}b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2$$

не имеет собственных значений вида $2\pi ik$, $k\in\mathbb{Z}$, тогда

$$E[x(t)x^T(\tau)] = \left(\exp(-\int\limits_0^{\omega}E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\omega}\int\limits_0^{\omega}b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2)-I\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\int\limits_t^{t+\omega}exp\left[\int\limits_0^{t}E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2+\int\limits_s^{\tau}E[\varepsilon(\sigma)]d\sigma A+\frac{1}{2}\int\limits_s^{\tau}\int\limits_s^{\tau}b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right]\times\right.$$
$$\times E[f(s)]dsE[x_0]+\int\limits_t^{t+\omega}\int\limits_0^{\tau}\exp\left[\int\limits_s^{t}E[\varepsilon(\tau)]d\tau A+\frac{1}{2}\int\limits_s^{t}\int\limits_s^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2+\int\limits_{s_1}^{\tau}E[\varepsilon(\sigma)]d\sigma A+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\int\limits_{s_1}^{\tau}\int\limits_{s_1}^{\tau}b(s_1,s_2)ds_1ds_2A^2\right]E[f(s)f^T(s_1)]ds_1ds\right\}$$

является ω-периодической по t и τ второй моментной функцией решения задачи (1), (2).

Замечание 10.1. Используя теоремы 8.2 и 10.3 в случае $\tau=t$, можно найти периодическую дисперсионную функцию $E[x(t)x^T(t)]-(E[x(t)])^2$ и тем самым получить условия существования периодического в широком смысле [2, с. 70] решения задачи (1), (2).

11. Заключение. В предположении, что коэффициент уравнения (1) $\varepsilon(t)$ является гауссовым случайным процессом и при этом статистически не зависит от векторного случайного процесса f, получены условия существования периодического в среднем решения и периодической второй моментной функции решения, а также явные формулы периодического математического ожидания и периодической второй моментной функции. В работе были рассмотрены две ситуации, когда однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), не имеет отличных от нуля ω-периодических в среднем решений и более сложная ситуация, когда линейное однородное уравнение со случайными коэффициентами имеет ненулевое периодическое в среднем решение.

Список литературы

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами и их приложения. Москва: Наука; 1972. 720 с.
2. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Наука; 1969. 368 с.
3. Задорожний В.Г., Курина Г.А. Периодические в среднем решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения.* 2014;50(6):726–744. DOI: 10.1134/S0374064114060028
4. Задорожний В.Г., Курина Г.А. Периодические в среднем решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. *Доклады академии наук.* 2013;450(5):505–510. DOI: 10.7868/S0869565213170076
5. Задорожний В.Г., Курина Г.А. Управление системой, обеспечивающее периодическое в среднем решение. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии.* 2018;3:23–32.
6. Kurina G., Zadorozhniy V. Mean periodic solutions of a inhomogeneous heat equation with random coeffi-cients. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S.* 2020;13(5):1543–1551. DOI: 10.3934/dcdss.2020087
7. Кабанцова Л.Ю. Периодические в среднем решения линейных систем дифференциальных уравнений со случайным возмущением. *В сборнике: Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики.* 2024;73-89.
8. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа. Москва-Ижеск: РХД; 2006. 316 с.
9. Задорожний В.Г. Влияние мультипликативного случайного шума на устойчивость линейных систем. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии.* 2016;4:68–83.
10. Задорожний В.Г., Коновалова М.А. Мультипликативно возмущенное случайным шумом дифференциальное уравнение в банаховом пространстве. *Современная математика. Фундаментальные направления.* 2017;63(4):599–614. DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-599-614
11. Zadorozhniy V.G., Konovalova M.A. Differential equations in banach spaces multiplicatively perturbed by random noise. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021;259(6):817–832. DOI: 10.1007/s10958-021-05664-0

References

1. Yakubovich VA, Starzhinskii VM. Lineinye differentsial'nye uravneniya s peremennymi koehffitsientami i ikh prilozheniya [Linear differential equations with variable coefficients and their applications]. Moscow: Nauka; 1972. 720 p.
2. Khas'minskii RZ. Ustoichivost' sistem differentsial'nykh uravnenii pri sluchainykh vozmushcheniyakh ikh parametrov [Stability of systems of differential equations under random perturbations of their parameters]. Moscow: Nauka; 1969. 368 p.
3. Zadorozhniy VG, Kurina GA. Mean periodic solutions of a linear inhomogeneous first-order differential equation with random coefficients. *Differential Equations.* 2014;50(6):722–741. DOI: 10.1134/S0012266114060020 (In Russ.)
4. Zadorozhniy VG, Kurina GA. Mean-periodic solutions of a first-order linear differential equation. *Doklady Mathematics.* 2013;87(3):325–330. DOI: 10.1134/S1064562413030277 (In Russ.)
5. Zadorozhniy VG, Kurina GA. System control, providing mean periodic solution. *Proceedings of Voronezh state university. Series: Systems analysis and information technologies.* 2018;3:23–32. (In Russ.)
6. Kurina G, Zadorozhniy V. Mean periodic solutions of a inhomogeneous heat equation with random coeffi-cients. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S.* 2020;13(5):1543–1551. DOI: 10.3934/dcdss.2020087
7. Kabantsova LYu. Periodicheskie v srednem resheniya lineinykh sistem differentsial'nykh uravnenii so sluchai-nym vozmushcheniem [Periodic average solutions of linear systems of differential equations with random perturbation]. *V sbornike: Vestnik fakul'teta prikladnoi matematiki, informatiki i mekhaniki.* 2024;73-89.
8. Zadorozhnii VG. Metody variatsionnogo analiza [Methods of variational analysis]. Moscow-Izhevsk: RKHD; 2006. 316 p.
9. Zadorozhniy VG. He influence of the multiplicative random noise on the stability linear systems. *Proceedings of Voronezh state university. Series: Systems analysis and information technologies.* 2016;4:68–83. (In Russ.)
10. Zadorozhniy VG, Konovalova MA. Differential equation in a banach space multiplicatively perturbed by random noise. *Contemporary mathematics. Fundamental directions.* 2017;63(4):599–614. (In Russ.) DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-599-614
11. Zadorozhniy VG, Konovalova MA. Differential equations in banach spaces multiplicatively perturbed by random noise. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021;259(6):817–832. DOI: 10.1007/s10958-021-05664-0

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.09.2024
Поступила после рецензирования 03.02.2025
Принята к публикации 07.02.2025

Received September 13, 2024
Revised February 3, 2025
Accepted February 7, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кабанцова Лариса Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Larisa Yu. Kabantsova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor of the Department of System Analysis and Management, Voronezh State University, Voronezh, Russia

К содержанию