

## Приближенное решение линейного дифференциального уравнения с нормальным оператором

Орешина М. Н. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Липецкий государственный технический университет,  
Россия, 398055, г. Липецк, ул. Московская, 30  
[m\\_oreshina@mail.ru](mailto:m_oreshina@mail.ru)

**Аннотация.** В гильбертовом пространстве рассматривается задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка, в котором коэффициент при неизвестной функции является неограниченным нормальным оператором. Точное решение такой задачи выражается через операторную экспоненту. Предлагается спектральный метод построения приближенного решения, основанный на вычислении линейной комбинации значений резольвенты оператора в различных точках его резольвентного множества. Для этого берется скалярная рациональная функция, приближающая экспоненту на спектре оператора, полученная рациональная функция раскладывается в сумму элементарных дробей, и затем в нее подставляется оператор. Доказаны теоремы об оценке абсолютной и относительной точности приближения. Приводятся результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** спектральный метод, нормальный оператор, операторная экспонента, рациональная функция от оператора, аппроксимация Паде, оценки погрешности

**Для цитирования:** Орешина М. Н. 2024. Приближенное решение линейного дифференциального уравнения с нормальным оператором. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 286–295.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-286-295

Original Research

## Approximate Solution of a Linear Differential Equation with a Normal Operator

Maria N. Oreshina 

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Lipetsk State Technical University,  
30 Moskovskaya St., Lipetsk 398055, Russia  
[m\\_oreshina@mail.ru](mailto:m_oreshina@mail.ru)

**Abstract.** In a Hilbert space, we consider the Cauchy problem for a first-order linear differential equation. The coefficient at the unknown function in the equation is an unbounded normal operator. The exact solution of such a problem is expressed in terms of an operator exponential. We suggest a spectral method for constructing an approximate solution based on the calculation of some rational function of the normal operator. Namely, we take a scalar rational function approximating the exponential function on the spectrum of the operator, then we expand the obtained rational function into the sum of elementary fractions and substitute the operator into it. As a result we obtain a linear combination of values of the resolvent of the normal operator at various points of its resolvent set. Theorems on the estimation of the absolute and relative accuracy of the approximation are proved. A variant of the proposed approach for a non-homogeneous equation with a special free term is also discussed. The results of numerical experiments are presented.

**Keywords:** Spectral Method, Normal Operator, Operator Exponential, Rational Function of Operator, Padé Approximation, Error Estimates

**For citation:** Oreshina M. N. 2024. Approximate Solution of a Linear Differential Equation with a Normal Operator. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 286–295. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-286-295

**1. Введение.** В статье обсуждается решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + f(t) \quad (1)$$

с точки зрения функционального исчисления от оператора  $N$ . Предполагается, что оператор  $N$  является нормальным и может быть неограниченным. Как известно, для нормального оператора в гильбертовом пространстве справедлива [1, 2, 3] спектральная теорема, сопоставляющая каждому такому оператору спектральное разложение – семейство операторов, представляющих собой разложение единицы, сосредоточенное на его спектре. Это позволяет представлять функции от оператора  $N$  в виде интегралов по спектральной мере. Основными для нас примерами таких функций являются операторная экспонента  $e^{Nt}$ ,

возникающая в формулах для точного решения уравнения (1), а также вспомогательная функция  $\theta_t(N)$ , которую мы будем использовать при решении уравнения (1) в случае правой части вида  $f(t) = bv(t)$ , где  $b$  – фиксированный вектор, а  $v$  – заданная скалярная функция.

В настоящей работе предлагается численный метод нахождения таких функций от оператора  $N$ , позволяющий получить приближенное решение уравнения (1). Для этого оператор  $e^{Nt}$  или  $\theta_t(N)$  заменяется рациональной функцией  $r_t(N)$ . Отметим, что для вычисления  $r_t(N)$  достаточно уметь находить линейную комбинацию значений резольвенты оператора  $N$  в корнях знаменателя функции  $r_t$  и использовать интегральное представление не требуется. Тем не менее спектральное разложение нормального оператора позволяет получить априорные оценки точности приближения.

Отметим, что использование такого подхода для решения уравнений в частных производных, записанных в абстрактной форме (1), позволяет не переходить в конечномерное пространство по пространственной переменной и получить численно-аналитическое решение. Это отличает его от проекционных методов, основанных на методе Галеркина [4, 5, 6], и неявных разностных схем [7, 8, 9]. Кроме того, в случае однородного уравнения и неоднородного уравнения с правой частью вида  $f(t) = bv(t)$  метод позволяет сразу вычислить решение в точке  $t$ , без нахождения решения в предыдущих точках.

Подобный подход для решения уравнения первого порядка с самосопряженным операторным коэффициентом и скалярной выходной функцией  $y(t) = \langle x(t), l \rangle$ , где  $l$  – заданный вектор, обсуждался в [10], а для уравнений второго порядка специального вида с самосопряженным операторным коэффициентом – в [11] и [12].

Изложение статьи построено следующим образом. В п. 2 уточняется постановка задачи и приводятся формулы для представления точного решения с использованием разложения единицы, порожденного оператором  $N$ . В п. 3 излагается основная идея метода, формулируются и доказываются теоремы об оценке абсолютной и относительной погрешности приближения. В п. 4 приводится пример решения дифференциального уравнения в частных производных предложенным методом.

**2. Точное решение.** Пусть  $\mathbf{H}$  – гильбертово пространство, а  $N: D(N) \subset \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  – линейный неограниченный оператор. Будем предполагать, что оператор  $N$  является нормальным [1], то есть, что он плотно определен, замкнут и удовлетворяет условию  $NN^* = N^*N$ , где  $N^*$  – сопряженный оператор. Кроме того, будем предполагать, что для некоторого действительного числа  $\gamma < +\infty$  спектр оператора  $N$  лежит слева от прямой  $\lambda = \gamma$ , то есть

$$\forall \lambda \in \sigma(N) \quad \operatorname{Re} \lambda \leq \gamma. \quad (2)$$

Пусть  $a \in \mathbf{H}$  – заданный вектор, а  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{H}$  – заданная непрерывная функция. Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Nz(t) + f(t), \\ z(0) &= a, \end{aligned} \quad (3)$$

и соответствующую ей задачу Коши для однородного уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Nx(t), \\ x(0) &= a. \end{aligned} \quad (4)$$

Хорошо известно, что решение задачи (3) можно представить в виде  $z(t) = x(t) + y(t)$ , где  $x$  – решение однородной задачи (4), а  $y$  – решение неоднородной задачи с нулевым начальным условием:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Ny(t) + f(t), \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Мы будем также обсуждать вариант задачи (3) или (5) с правой частью специального вида  $f(t) = bv(t)$ , где  $b \in \mathbf{H}$  – заданный вектор, а  $v: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  – заданная (скалярная) непрерывная функция, то есть нам понадобится решение задачи

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Ny(t) + bv(t), \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как оператор  $N$  является нормальным, для него существует [1, 2] единственное разложение единицы  $E$  на борелевских подмножествах его спектра  $\sigma(N)$  такое, что для оператора  $N$  справедливо представление

$$N = \int_{\sigma(N)} \xi dE(\xi).$$

Разложение единицы  $E$ , порожденное оператором  $N$ , позволяет определить функциональное исчисление, которое каждой измеримой по Борелю функции  $g$  сопоставляет плотно определенный замкнутый оператор

$$g(N) = \int_{\sigma(N)} g(\xi) dE(\xi)$$

с областью определения

$$D(g(N)) = \left\{ \varphi \in \mathbf{H} : \int_{\sigma(N)} |g(\xi)|^2 dE_{\varphi\varphi}(\xi) < \infty \right\},$$

где  $E_{\varphi\varphi}(\xi) = \langle E(\xi)\varphi, \varphi \rangle$ . При этом для всех  $\varphi \in D(g(N))$  выполняется [1] соотношение

$$\|g(N)\varphi\|^2 = \int_{\sigma(N)} |g(\xi)|^2 dE_{\varphi\varphi}(\xi). \tag{7}$$

Если функция  $g$  является ограниченной на  $\sigma(N)$ , то оператор  $g(N)$  ограничен, при этом справедливо [1] неравенство

$$\|g(N)\| \leq \sup_{\xi \in \sigma(N)} |g(\xi)|. \tag{8}$$

Если функция  $g$  является ограниченной и непрерывной на  $\sigma(N)$ , то в (8) имеет место равенство.

**Определение 2.1.** Операторным фундаментальным решением однородной задачи (4) будем называть функцию

$$U(t) = \exp_t(N) = \int_{\sigma(N)} e^{\xi t} dE(\xi),$$

где  $\exp_t(\xi) = e^{\xi t}$ .

Заметим, что так как функция  $\xi \mapsto e^{\xi t}$  ограничена и непрерывна на  $\sigma(N)$ , а в силу (2) справедливо неравенство  $|e^{\xi t}| \leq e^{\gamma t}$  для всех  $\xi \in \sigma(N)$ , то операторы  $U(t)$  ограничены и

$$\|U(t)\| = \sup_{\xi \in \sigma(N)} |e^{\xi t}| \leq e^{\gamma t}. \tag{9}$$

**Определение 2.2.** Функцию  $x(t) = U(t)a = \exp_t(N)a$  будем называть обобщенным решением однородной задачи (4), функцию

$$y(t) = \int_0^t U(t-\tau)f(\tau) d\tau \tag{10}$$

обобщенным решением неоднородной задачи (5), а функцию

$$z(t) = U(t)a + \int_0^t U(t-\tau)f(\tau) d\tau \tag{11}$$

обобщенным решением неоднородной задачи (3).

Для неоднородной задачи (6) введем в рассмотрение вспомогательную скалярную функцию

$$\theta_t(\xi) = \int_0^t e^{\xi(t-\tau)}v(\tau) d\tau. \tag{12}$$

**Теорема 2.1.** Обобщенное решение задачи (6) можно представить в виде

$$y(t) = \theta_t(N)b. \tag{13}$$

**Доказательство.** Из формулы (10) в случае  $f(t) = bv(t)$  следует, что

$$y(t) = \int_0^t U(t-\tau)bv(\tau) d\tau = \int_0^t \int_{\sigma(N)} e^{\xi(t-\tau)} dE(\xi) bv(\tau) d\tau = \int_0^t \int_{\sigma(N)} e^{\xi(t-\tau)}v(\tau) dE(\xi) d\tau b.$$

Поменяем пределы интегрирования. В результате получим

$$y(t) = \int_{\sigma(N)} \int_0^t e^{\xi(t-\tau)}v(\tau) d\tau dE(\xi) b = \int_{\sigma(N)} \theta_t(\xi) dE(\xi) b = \theta_t(N)b.$$

Теорема доказана.

Отметим, что в силу ограниченности функции  $\xi \mapsto \theta_t(\xi)$  на  $\sigma(N)$  операторы  $\theta_t(N)$  также ограничены.

**3. Приближенное решение.** Для построения приближенного решения при каждом фиксированном  $t > 0$  приблизим на  $\sigma(N)$  функцию  $\xi \mapsto \exp_t(\xi)$  рациональной функцией

$$r_t^1(\xi) = p_0^1 + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{p_k^1}{\xi - q_k^1}$$

с корнями знаменателя  $q_k^1$  вне  $\sigma(N)$ . В качестве приближенного операторного фундаментального решения возьмем функцию

$$\tilde{U}(t) = r_t^1(N) = p_0^1 \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{K_1} p_k^1 (N - q_k^1 \mathbf{1})^{-1}, \quad (14)$$

в качестве приближенного решения однородной задачи (4) — функцию

$$\tilde{x}(t) = \tilde{U}(t)a = r_t^1(N)a, \quad (15)$$

а в качестве приближенного решения неоднородной задачи (5) — функцию

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t \tilde{U}(t-\tau)f(\tau) d\tau = \int_0^t r_{t-\tau}^1(N)f(\tau) d\tau. \quad (16)$$

В случае неоднородной задачи (6) можно при каждом фиксированном  $t > 0$  дополнительно использовать еще одну рациональную функцию

$$r_t^2(\xi) = p_0^2 + \sum_{k=1}^{K_2} \frac{p_k^2}{\xi - q_k^2}, \quad q_k^2 \notin \sigma(N),$$

приближающую функцию  $\xi \mapsto \theta_t(\xi)$  на  $\sigma(N)$ . Теперь в качестве приближенного решения неоднородной задачи (6) возьмем функцию

$$\tilde{y}(t) = r_t^2(N)b. \quad (17)$$

Для оценки абсолютной точности полученного приближения предлагается использовать следующую теорему.

**Теорема 3.1.** *Зафиксируем  $t > 0$ . Пусть функция  $\xi \mapsto r_t^1(\xi)$  приближает функцию  $\xi \mapsto \exp_t(\xi)$  на  $\sigma(N)$  с абсолютной точностью  $\varepsilon(t) \geq 0$ , т. е.*

$$|r_t^1(\xi) - e^{\xi t}| \leq \varepsilon(t), \quad \xi \in \sigma(N). \quad (18)$$

Тогда

(а) для приближенного операторного фундаментального решения (14) справедлива оценка

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\| \leq \varepsilon(t);$$

(б) для приближенного решения (15) однородной задачи (4) справедлива оценка

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon(t)\|a\|;$$

(с) для приближенного решения (16) неоднородной задачи (5) справедлива оценка

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \int_0^t \varepsilon(t-\tau)\|f(\tau)\| d\tau.$$

Если известна функция  $\xi \mapsto r_t^2(\xi)$ , приближающая функцию  $\xi \mapsto \theta_t(\xi)$  на  $\sigma(N)$  с абсолютной точностью  $\varepsilon_2(t) \geq 0$ , т. е.

$$|r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)| \leq \varepsilon_2(t), \quad \xi \in \sigma(N), \quad (19)$$

то для приближенного решения (17) неоднородной задачи (6) справедлива оценка

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \varepsilon_2(t)\|b\|. \quad (20)$$

**Доказательство.** (а) Возьмем  $g_t(\xi) = r_t^1(\xi) - \exp_t(\xi)$ . Очевидно, функция  $g_t$  ограничена на  $\sigma(N)$ . Воспользуемся оценками (8) и (18), в результате получим

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\| = \|r_t^1(N) - \exp_t(N)\| = \|g_t(N)\| \leq \sup_{\xi \in \sigma(N)} |g_t(\xi)| \leq \varepsilon(t).$$

(b) Следует из (а):  $\|\tilde{x}(t) - x(t)\| = \|\tilde{U}(t)a - U(t)a\| \leq \|\tilde{U}(t) - U(t)\| \cdot \|a\| \leq \varepsilon(t)\|a\|$ .

(c) Из формул (10) и (16) с учетом (а) следует, что

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| = \left\| \int_0^t (\tilde{U}(t-\tau) - U(t-\tau))f(\tau) d\tau \right\| \leq \int_0^t \|\tilde{U}(t-\tau) - U(t-\tau)\| \|f(\tau)\| d\tau \leq \int_0^t \varepsilon(t-\tau) \|f(\tau)\| d\tau.$$

Докажем теперь оценку (20). Возьмем  $g_t(\xi) = r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)$ . Очевидно, функция  $g_t$  ограничена на  $\sigma(N)$ . Воспользуемся оценками (8) и (19), в результате получим

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| = \|r_t^2(N)b - \theta_t(N)b\| = \|g_t(N)b\| \leq \|g_t(N)\| \cdot \|b\| \leq \varepsilon_2(t)\|b\|.$$

Теорема доказана.

Перейдем к обсуждению относительной точности приближения.

**Теорема 3.2.** Зафиксируем  $t > 0$ . Пусть функция  $\xi \mapsto r_t^1(\xi)$  приближает функцию  $\xi \mapsto \exp_t(\xi)$  на  $\sigma(N)$  с относительной точностью  $\varepsilon(t) \geq 0$ , т. е.

$$|r_t^1(\xi) - e^{\xi t}| \leq \varepsilon(t)|e^{\xi t}|, \quad \xi \in \sigma(N). \quad (21)$$

Тогда

(а) для приближенного операторного фундаментального решения (14) справедлива оценка

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\| \leq \varepsilon(t)\|U(t)\|;$$

(b) для приближенного решения (15) однородной задачи (4) справедлива оценка

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon(t)\|x(t)\|;$$

(c) для приближенного решения (16) неоднородной задачи (5) справедлива оценка

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \int_0^t \varepsilon(t-\tau) \|U(t-\tau)f(\tau)\| d\tau \leq e^{\gamma t} \int_0^t \varepsilon(t-\tau) e^{-\gamma\tau} \|f(\tau)\| d\tau.$$

Если известна функция  $\xi \mapsto r_t^2(\xi)$ , приближающая функцию  $\xi \mapsto \theta_t(\xi)$  на  $\sigma(N)$  с относительной точностью  $\varepsilon_2(t) \geq 0$ , т. е.

$$|r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)| \leq \varepsilon_2(t)|\theta_t(\xi)|, \quad \xi \in \sigma(N), \quad (22)$$

то для приближенного решения (17) неоднородной задачи (6) справедлива оценка

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \varepsilon_2(t)\|y(t)\|. \quad (23)$$

**Доказательство.** (а) Возьмем  $g_t(\xi) = r_t^1(\xi) - \exp_t(\xi)$ . Воспользуемся оценками (8), (9) и (21). В результате получим

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\| = \|g_t(N)\| \leq \sup_{\xi \in \sigma(N)} |g_t(\xi)| \leq \varepsilon(t) \sup_{\xi \in \sigma(N)} |e^{\xi t}| = \varepsilon(t)\|U(t)\|.$$

(b) Возьмем  $g_t(\xi) = r_t^1(\xi) - \exp_t(\xi)$ . Воспользуемся формулой (7) и оценкой (21), в результате получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t) - x(t)\|^2 &= \|\tilde{U}(t)a - U(t)a\|^2 = \|g_t(N)a\|^2 = \int_{\sigma(N)} |g_t(\xi)|^2 dE_{aa}(\xi) \leq \int_{\sigma(N)} (\varepsilon(t))^2 |e^{\xi t}|^2 dE_{aa}(\xi) = \\ &= (\varepsilon(t))^2 \|U(t)a\|^2 = (\varepsilon(t))^2 \|x(t)\|^2. \end{aligned}$$

(c) Из формул (9), (10), (16) и (21) следует, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}(t) - y(t)\| &= \left\| \int_0^t (\tilde{U}(t-\tau) - U(t-\tau))f(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^t \|\tilde{U}(t-\tau) - U(t-\tau)\| \|f(\tau)\| d\tau \leq \int_0^t \varepsilon(t-\tau) e^{\gamma(t-\tau)} \|f(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Докажем теперь оценку (23). Возьмем  $g_t(\xi) = r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)$ . Воспользуемся формулой (7) и оценкой (22), в результате получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}(t) - y(t)\|^2 &= \|g_t(N)b\|^2 = \int_{\sigma(N)} |g_t(\xi)|^2 dE_{bb}(\xi) \leq \int_{\sigma(N)} (\varepsilon_2(t))^2 |\theta_t(\xi)|^2 dE_{bb}(\xi) = \\ &= (\varepsilon_2(t))^2 \|\theta_t(N)b\|^2 = (\varepsilon_2(t))^2 \|y(t)\|^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**4. Численные эксперименты.** Продемонстрируем применение предложенного в п. 3 метода для приближенного решения уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(t, s) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial s} u(t, s) + \alpha_2 u(t, s) + b(s)v(t) \quad (24)$$

с начальным условием

$$u(0, s) = a(s) \quad (25)$$

и периодическими краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= u(t, 2\pi), \\ \frac{\partial}{\partial s} u(t, s)|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s} u(t, s)|_{s=2\pi}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \in L_2[0, 2\pi]$ , а  $v: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция.

В гильбертовом пространстве  $\mathbf{H} = L_2[0, 2\pi]$  со скалярным произведением

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_1(s) \overline{z_2(s)} ds$$

рассмотрим оператор

$$N = \frac{d^2}{ds^2} + \alpha_1 \frac{d}{ds} + \alpha_2$$

с областью определения  $D(N) = \{z \in W_2^2[0, 2\pi] : z(0) = z(2\pi), z'(0) = z'(2\pi)\}$ . Положим  $z(t)(s) = u(t, s)$  и запишем задачу (24)–(26) в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Nz(t) + bv(t), \\ z(0) &= a. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что оператор  $N$  является нормальным. Отметим, что собственные функции этого оператора имеют вид  $\psi_k(s) = e^{iks}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , а его спектр есть множество  $\sigma(N) = \{\xi_k = -k^2 + ia_1k + a_2 : k \in \mathbb{Z}\}$ . Таким образом, используя разложение по собственным функциям, можно получить точные решения основной и вспомогательных задач для последующего сравнения с приближенными решениями.

В соответствии с п. 2 представим искомую функцию в виде  $z(t) = x(t) + y(t)$ , где  $x(t) = \exp_t(N)a$  – решение задачи (4), а  $y(t) = \theta_t(N)b$  – решение задачи (6). Для  $t > 0$  возьмем две рациональные функции

$$r_t^1(\xi) = p_0^1 + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{p_k^1}{\xi - q_k^1} \approx \exp_t(\xi), \quad r_t^2(\xi) = p_0^2 + \sum_{k=1}^{K_2} \frac{p_k^2}{\xi - q_k^2} \approx \theta_t(\xi), \quad \xi \in \sigma(N), \quad q_k^1, q_k^2 \notin \sigma(N),$$

в результате получим приближенное решение

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \tilde{x}(t) = r_t^1(N)a = p_0^1 a + \sum_{k=1}^{K_1} p_k^1 (N - q_k^1 \mathbf{1})^{-1} a, \\ y(t) &\approx \tilde{y}(t) = r_t^2(N)b = p_0^2 b + \sum_{k=1}^{K_2} p_k^2 (N - q_k^2 \mathbf{1})^{-1} b, \\ z(t) &\approx \tilde{z}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{y}(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, для нахождения  $\tilde{z}(t)$  необходимо посчитать линейные комбинации значений резольвенты оператора  $N$  в нулях знаменателей выбранных рациональных функций, примененных к векторам  $a$  и

b. Для резольвенты  $(N - \lambda 1)^{-1}$ ,  $\lambda \notin \sigma(N)$ , входящей в эти линейные комбинации, справедлива явная формула

$$(N - \lambda 1)^{-1}w(s) = \frac{C_1(\lambda, s)}{C_0(\lambda)} \int_0^s e^{\frac{1}{2}\xi(\alpha_1 + C_0(\lambda))} w(\xi) d\xi + \frac{C_2(\lambda, s)}{C_0(\lambda)} \int_s^{2\pi} e^{\frac{1}{2}\xi(\alpha_1 + C_0(\lambda))} w(\xi) d\xi + \frac{C_3(\lambda, s)}{C_0(\lambda)} \int_0^s e^{\frac{1}{2}\xi(\alpha_1 - C_0(\lambda))} w(\xi) d\xi + \frac{C_4(\lambda, s)}{C_0(\lambda)} \int_s^{2\pi} e^{\frac{1}{2}\xi(\alpha_1 - C_0(\lambda))} w(\xi) d\xi, \quad (28)$$

где

$$C_1(\lambda, s) = \frac{e^{(\pi - \frac{s}{2})(C_0(\lambda) + \alpha_1)}}{1 - e^{\pi(C_0(\lambda) + \alpha_1)}}, \quad C_2(\lambda, s) = \frac{e^{-\frac{s}{2}(C_0(\lambda) + \alpha_1)}}{1 - e^{\pi(C_0(\lambda) + \alpha_1)}}, \quad C_3(\lambda, s) = \frac{e^{\frac{s}{2}(C_0(\lambda) - \alpha_1)}}{1 - e^{\pi(C_0(\lambda) - \alpha_1)}},$$

$$C_4(\lambda, s) = \frac{e^{(\pi + \frac{s}{2})(C_0(\lambda) - \alpha_1)}}{1 - e^{\pi(C_0(\lambda) - \alpha_1)}}, \quad C_0(\lambda) = \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2 + 4\lambda}.$$

Подчеркнем, что при использовании предложенного метода для фиксированного  $t > 0$  строится приближение для вектора  $z(t) \in \mathbb{H}$ . При этом из формул (27) и (28) видно, что в результате приближение для  $u(t, s) = z(t)(s)$  получается в виде аналитической функции от  $s$ .

Зададим входные параметры уравнения:  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = -\frac{1}{4}$ ,  $a(s) = (2\pi s - s^2) \sin 2s + \cos 10s$ ,  $b(s) = 20 \sin \frac{s}{2}$ ,  $v(t) = e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 1/5$ , см. рис 1.

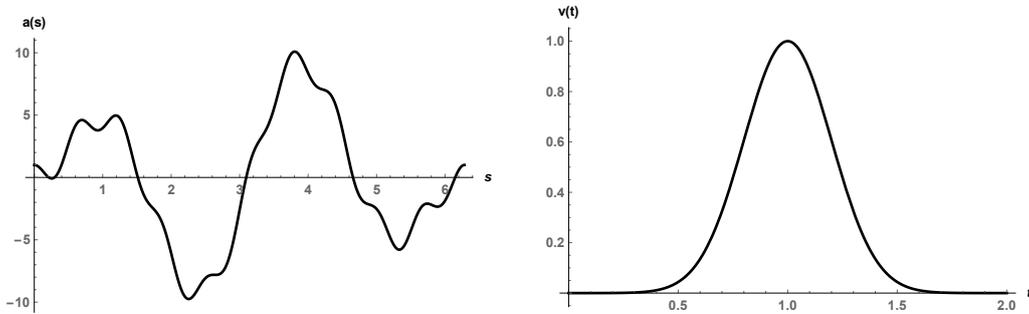


Рис. 1. Графики начальной функции  $u(0, s) = a(s)$  (слева) и входной функции  $v(t)$  (справа)  
 Fig. 1. Graphs of the initial function  $u(0, s) = a(s)$  (left) and the input function  $v(t)$  (right)

На рис. 2 приведены графики приближенных решений  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ , в которых для  $\tilde{x}(t)$  в качестве рациональной функции  $r_t^1$  использовалась аппроксимация Паде [13, 14] в нуле степени (3, 9) для функции  $\exp_t(\xi)$ , а для  $\tilde{y}(t)$  в качестве рациональной функции  $r_t^2$  — аппроксимация Паде в нуле степени (2, 6) для функции  $\theta_t(\xi)$ . Перед применением формул (27) полученные аппроксимации Паде раскладывались в сумму элементарных дробей.

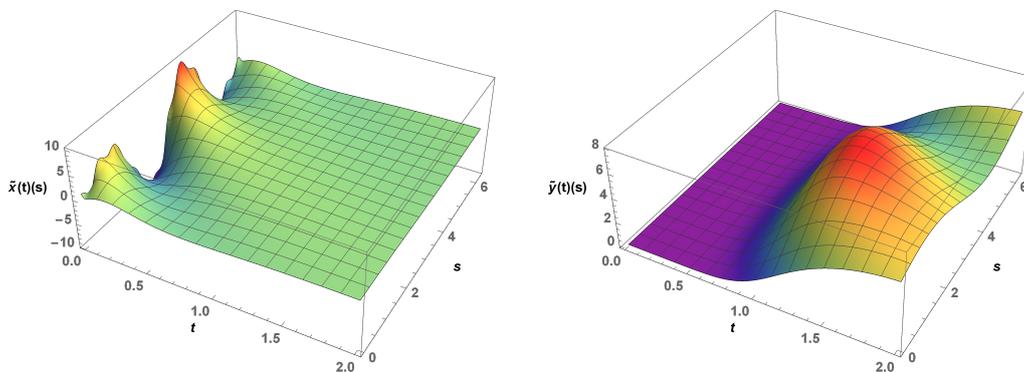


Рис. 2. Графики приближенных решений вспомогательных задач (4) (слева) и (6) (справа)  
 Fig. 2. Graphs of the approximate solutions of auxiliary problems (4) (left) and (6) (right)

На рис. 3 представлены графики зависимостей  $\|\tilde{x}(t) - x(t)\|$  и  $\|\tilde{y}(t) - y(t)\|$  абсолютной точности полученных приближений от  $t \in [0, 2]$ , при этом максимальные значения абсолютной погрешности составили

$$\max_{t \in [0,2]} \|\tilde{x}(t) - x(t)\| = 9.46652 \cdot 10^{-4}, \quad \max_{t \in [0,2]} \|\tilde{y}(t) - y(t)\| = 1.28625 \cdot 10^{-3}. \quad (29)$$

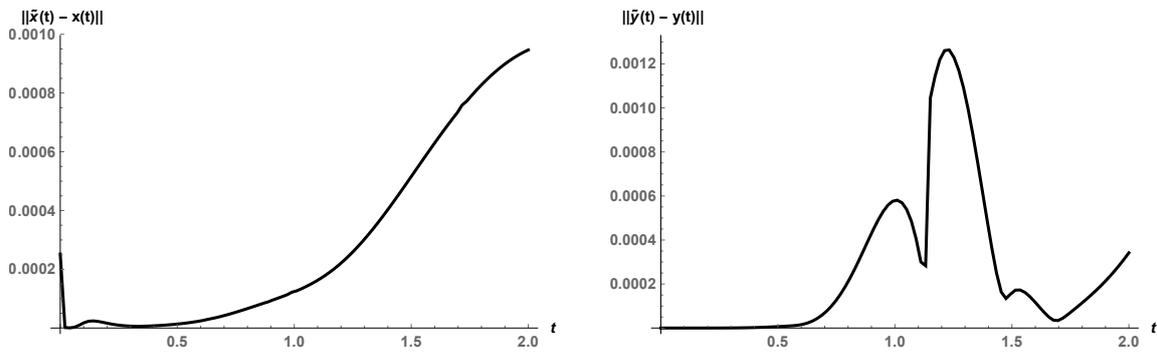


Рис. 3. Графики абсолютной точности приближенных решений задач (4) (слева) и (6) (справа)  
 Fig. 3. Graphs of the absolute errors for the approximate solutions of problems (4) (left) and (6) (right)

Для  $\xi \in \sigma(N)$ ,  $t \in [0, 2]$ , выполняются скалярные оценки  $|r_t^1(\xi) - e^{\xi t}| \leq 2 \cdot 10^{-4}$  и  $|r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)| \leq 1.89 \cdot 10^{-2}$ , при этом  $\|a\| \approx 5.15$ ,  $\|b\| \approx 14.14$ , поэтому из теоремы 3.1 получаем оценки

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5.15 = 1.03 \cdot 10^{-3}, \quad \|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq 1.89 \cdot 10^{-2} \cdot 14.14 = 2.67246 \cdot 10^{-1}.$$

Видно, что полученные максимальные значения абсолютной погрешности (29) укладываются в теоретические оценки, полученные с помощью теоремы 3.1.

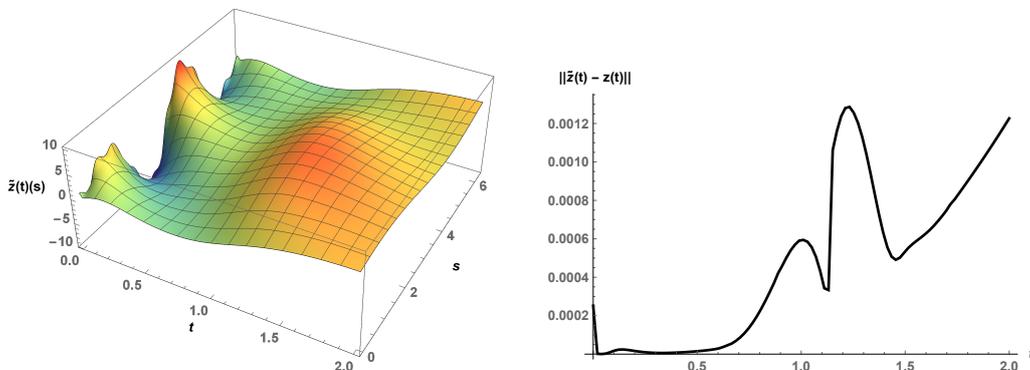


Рис. 4. Графики приближенного решения задачи (24)–(26) (слева) и абсолютной точности (справа)  
 Fig. 4. Graphs of the approximate solution of problem (24)–(26) (left) and the absolute accuracy (right)

На рис. 4 представлен график приближенного решения  $\tilde{z}(t)(s) = \tilde{u}(t, s)$  исходной задачи (24)–(26), а также график зависимости  $\|\tilde{z}(t) - z(t)\|$  абсолютной точности полученного приближения для  $t \in [0, 2]$ , при этом максимальное значение абсолютной погрешности составило  $\max_{t \in [0, 2]} \|\tilde{z}(t) - z(t)\| = 1.28625 \cdot 10^{-3}$ .

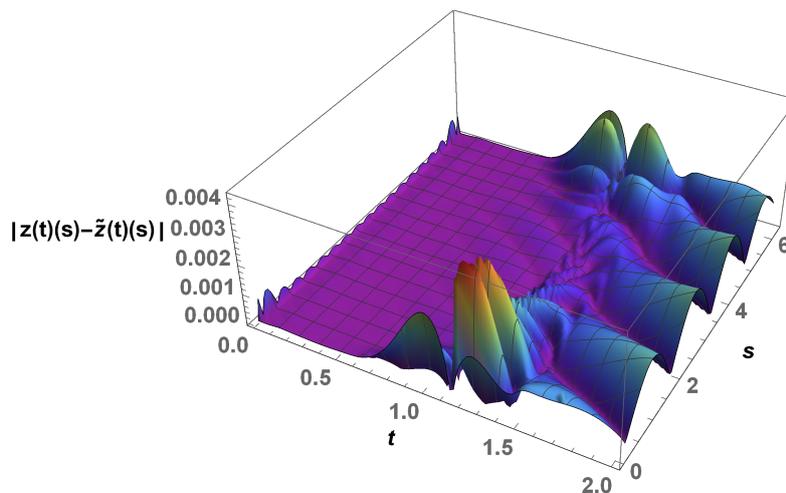


Рис. 5. График поточечной абсолютной ошибки  
 Fig. 5. Graph of the pointwise absolute error

Для удобства сравнения на рис. 5 изображен также график поточечной абсолютной ошибки, то есть модуля разности между полученным приближением и точным решением. Максимум поточечной абсолютной ошибки приближения составил  $\max_{s \in [0, 2\pi], t \in [0, 1]} |\tilde{u}(t, s) - u(t, s)| = 4.28 \cdot 10^{-3}$ .

**5. Заключение.** Предложен операторный метод построения приближенного решения линейного дифференциального уравнения первого порядка с нормальным операторным коэффициентом, позволяющий выписать априорные оценки точности приближения. Для этого используется вычисление рациональных функций от нормального оператора, в качестве которых можно использовать, например, аппроксимации Паде. Для повышения точности можно увеличить степени аппроксимации Паде или заменить их на рациональные функции наилучшего приближения. Однако нахождение наилучших рациональных приближений, особенно в случае комплексного спектра, является существенно более трудоемкой задачей. Тем не менее, если необходимо решать несколько задач с одним и тем же оператором, но разными начальными условиями, такой подход может быть оправдан. В этом случае можно заранее вычислить рациональные функции для данного оператора при различных значениях  $t$ , которые затем многократно использовать для решения задач с этим оператором. В частности, для однородного уравнения с оператором, спектр которого лежит на отрицательной действительной полуоси, удобно использовать функции, приведенные в [15].

#### Список литературы

1. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир; 1975. 444 с.
2. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО; 2004. 552 с.
3. Орешина М.Н. Спектральное разложение нормального оператора в действительном гильбертовом пространстве. *Уфимский математический журнал*. 2017;9(4):87–99. English translation: Spectral decomposition of normal operator in real Hilbert space. *Ufa Mathematical Journal*. 2017;9(4):85–96. DOI: 10.13108/2017-9-4-85
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир; 1988. 352 с.
5. Разгулин А.В. Весовая оценка скорости сходимости проекционно-разностной схемы для параболического уравнения и ее применение для аппроксимации задачи управления начальными данными. *Журнал вычислительной математики и математической физики*; 2010;50(6):1023–1037.
6. Макаренков А.М., Серегина Е.В., Степович М.А. Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области. *Журнал вычислительной математики и математической физики* 2017;57(5):801–813.
7. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука; 1977. 440 с.
8. Дробышев В.И., Каткова Л.Н. Метод Кранка–Николсон с различными временными шагами в подобластях для решения параболических задач. *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2001;4(2):137–150.
9. Смагин В.В. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики* 2000;40(6):908–919.
10. Орешина М.Н. Приближенное решение параболического уравнения с использованием рациональной аппроксимации операторной экспоненты. *Дифференциальные уравнения*. 2017;53(3):407–417. English translation: Approximate solution of a parabolic equation with the use of a rational approximation to the operator exponential. *Differential Equations*. 2017;53(3):398–408. DOI: 10.1134/S0012266117030107
11. Oreshina M.N. A spectral method for approximate solving a second-order linear differential equation. *Journal of Physics: Conference Series* 2018;973(1):012057. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012057
12. Oreshina M.N. Spectral method for approximate solving of linear differential equations with self-adjoint coefficients. *2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)* 2020;9280753:125–127. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280753
13. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир; 1986. 502 с.
14. Аптекарев А.И., Буслаев В.И., Мартинес-Финкельштейн А., Суетин С.П. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены. *Успехи математических наук*. 2011;66(6):37–122. English translation: Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials. *Russian Math. Surveys*. 2011;66(6):1049–1131. DOI: 10.1070/RM2011v066n06ABEH004770
15. Carpenter A.J., Ruttan A., Varga R.S. Extended numerical computations on the "1/9"conjecture in rational approximation theory. *Rational Approximation and Interpolation. Series: Lecture notes in mathematics*. 1983;1105:383-411.

#### References

1. Rudin W. Functional analysis. New York: McGraw-Hill Book Company; 1973. 397 p. (Funkcional'nyj analiz. Moscow: Mir; 1975. 444 p.)
2. Helemskii AY. Lectures and exercises on functional analysis [Lekcii po funkcional'nomu analizu]. Moscow: MCzNMO; 2004. 552 p.
3. Oreshina MN. Spectral decomposition of normal operator in real Hilbert space. *Ufa Mathematical Journal*. 2017;9(4):85–96. DOI: 10.13108/2017-9-4-85
4. Fletcher CAJ. Computational Galerkin methods. Springer Science & Business Media; 2012. 310 p. (Chislennyye metody na osnove metoda Galyorkina. M.: Mir; 1988. 352 p.)

5. Razgulin AV, A weighted estimate for the rate of convergence of a projection-difference scheme for a parabolic equation and its application to the approximation of the initial-data control problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2010;50(6):1023–1037 (In Russian)
6. Makarenkov AM, Seregina EV, Stepovich MA. The projection Galerkin method for solving the time-independent differential diffusion equation in a semi-infinite domain. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(5):801–813. (In Russian)
7. Godunov SK., Ryaben'kii VS. *Difference Schemes: An Introduction to the Underlying Theory*. Amsterdam: North-Holland; 1987. 489 p.
8. Drobyshevich VI, Katkova LN. Crank–Nicolson's scheme with different time-step in subdomains for the solution of parabolic problems. *Sib. Zh. Vych. Mat.* 2001;4(2):137–150. (In Russian)
9. Smagin, V.V. Mean-square error estimates for a projection-difference method for parabolic equations *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2000;40(6):908–919. (In Russian)
10. Oreshina MN. Approximate solution of a parabolic equation with the use of a rational approximation to the operator exponential. *Differential Equations*. 2017;53(3):398–408. DOI: 10.1134/S0012266117030107
11. Oreshina MN. A spectral method for approximate solving a second-order linear differential equation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;973(1):012057. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012057
12. Oreshina MN. Spectral method for approximate solving of linear differential equations with self-adjoint coefficients. *2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)* 2020;9280753:125–127. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280753
13. Baker GA and Graves-Morris P. *Padé Approximants*. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 1996. 746 p. (Апроксимации Падэ. М.: Мир; 1986. 502 p.)
14. Aptekarev AI, Buslaev VI, Martinez-Finkelshtein A, Suetin SP. Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials. *Russian Math. Surveys*. 2011;66(6):1049–1131. DOI: 10.1070/RM2011v066n06ABEH004770
15. Carpenter AJ., Ruttan A, Varga RS. Extended numerical computations on the "1/9"conjecture in rational approximation theory. *Rational Approximation and Interpolation. Series: Lecture notes in mathematics*. 1983;1105:383–411.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.10.2024

Поступила после рецензирования 18.11.2024

Принята к публикации 21.11.2024

Received October 4, 2024

Revised November 18, 2024

Accepted November 21, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Орешина Мария Николаевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Maria N. Oreshina** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

[К содержанию](#)