Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 1. С. 41–51.
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 1. P. 41–51.

УДК 519.63
MSC 37N30
Оригинальное исследование

`DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-41-51`

Затенение в окрестности гиперболической стационарной точки для дробных уравнений

Пискарев С. И.,
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Э. Л. Шишкиной*)
МГУ имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 4
piskarev@gmail.com

Аннотация. В работе изучается поведение траекторий абстрактных параболических задач с дробной по времени производной в окрестности гиперболической стационарной точки, где дробная производная понимается по Капуто – Джрбашяну. Хорошо известно, что для динамических систем с целой производной фазовое пространство в окрестности гиперболической стационарной точки расщепляется таким образом, что данная начальная задача сводится к начальным задачам с экспоненциально убывающими решениями в противоположных направлениях. В случае с дробной производной ситуация драматически меняется. Во-первых, отсутствует экспоненциальное убывание. Во-вторых, спектр линеаризированного оператора допускает разложение, отличное от классической картины. Тем не менее удается доказать аналоги результатов по затенению. Основные условия наших результатов выполняются, в частности, для операторов с компактной резольвентой и могут быть проверены для метода конечных элементов и разностных методов.

Ключевые слова: дробные уравнения, полулинейные задачи Коши в банаховом пространстве, гиперболическая стационарная точка, компактная сходимость резольвент, общая аппроксимационная схема, затенение

Благодарности: Работа выполнена в НИВЦ МГУ имени М. В. Ломоносова в рамках исследований по теме «Исследование и разработка методов, алгоритмов и программного обеспечения в области вычислительной математики» ЦИТИС: АААА-А21-121011990147-4 и при поддержке РНФ (грант № 23-21-00005).

Для цитирования: Пискарев С. И. 2025. Затенение в окрестности гиперболической стационарной точки для дробных уравнений. *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 41–51. `DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-41-51`

Original Research

Shadowing in the Neighborhood of a Hyperbolic Equilibrium Point for Fractional Equations

Sergey I. Piskarev,
(*Article submitted by a member of the editorial board E. L. Shishkina*)
Lomonosov Moscow State University,
1, str. 4 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia
piskarev@gmail.com

Abstract. In this paper, we study the behavior of trajectories of abstract parabolic problems with fractional time derivative in the neighborhood of a hyperbolic equilibrium point, where the fractional derivative is understood in the Caputo – Djerbashyan sense. It is well known that for dynamical systems with integer derivative, the phase space in the neighborhood of a hyperbolic equilibrium point splits in such a way that this initial value problem reduces to initial value problems with exponentially decreasing solutions in opposite directions. In the case of a fractional derivative, the situation changes dramatically. First, there is no exponential decay. Second, the spectrum of the linearized operator admits an expansion different from the classical picture. Nevertheless, we manage to prove analogs of the results on shadowing. The main conditions of our results are satisfied, in particular, for operators with a compact resolvent and can be verified for the finite elements method and difference methods.

Keywords: Fractional Equations, Semilinear Cauchy Problems in Banach Space, Hyperbolic Equilibrium Point, Compact Convergence of Resolvents, General Approximation Scheme, Shadowing

Acknowledgements: The paper was carried out at the Research Computing Center of Moscow State University named after M. V. Lomonosov as part of the research work on the topic "Research and development of methods, algorithms and software in the field of computational mathematics"and with the support of the Russian Science Foundation (grant No. 23-21-00005).

For citation: Piskarev S. I. 2025. Shadowing in the Neighborhood of a Hyperbolic Equilibrium Point for Fractional Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 41–51. (in Russian)
`DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-41-51`

---

1. Введение. Дихотомические оценки. Пусть $B(E)$ обозначает банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов на комплексном банаховом пространстве E. Множество всех линейных замкнутых плотно определенных операторов в E будем обозначать $\mathbb{C}(E)$. Для $B \in \mathbb{C}(E)$ обозначим через $\sigma(B)$ спектр, через $\rho(B)$ – его резольвентное множество, а через $D(B)$ – область определения оператора B.

Мы напомним как возникают задачи дихотомии для уравнений с целой производной на примере полулинейного уравнения в банаховом пространстве E^β, т. е. $E^\beta := D((-A)^\beta)$ наделено нормой графика $\|x\|_{E^\beta} = \|(-A)^\beta x\|_E$,

$$\begin{aligned} &u'(t) = Au(t) + f(u(t)),\ t \geq 0,\\ &u(0) = u^0 \in E^\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

где $f(\cdot) : E^\beta \subseteq E \to E$, $0 \leq \beta < 1$, предполагается непрерывной, ограниченной и непрерывно дифференцируемой функцией по Фреше. Более точно, предположим, что выполнено условие:

(F1) Для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|f'(w) - f'(z)\|_{B(E^\beta,E)} \leq \epsilon$ при $\|w - z\|_{E^\beta} \leq \delta$ для всех $w, z \in \mathcal{U}_{E^\beta}(u^*; \rho)$, где u^* – гиперболическая стационарная точка задачи (1).

Здесь $\mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$ – замкнутый шар в пространстве E^β с центром в 0 и радиусом $\rho > 0$.

Всюду далее $A : D(A) \subseteq E \to E$ – замкнутый оператор, такой что

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{B(E)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \text{ для всех } \Re\lambda \geq 0. \tag{2}$$

При условии (2) спектр оператора A лежит слева от мнимой оси $\sup\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$ так, что можно определить дробные степени $(-A)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, (см. [1, 2, 3]) оператора $(-A)$ и пространства E^β.

Делая замену переменных $v(\cdot) = u(\cdot) - u^*$ в задаче (1), где u^* – гиперболическая стационарная точка, мы приходим к задаче

$$\begin{aligned} &v'(t) = (A + f'(u^*))v(t) + f(v(t) + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v(t),\\ &v(0) = u^0 - u^* = v^0. \end{aligned}$$

Эта задача может быть записана в виде:

$$v'(t) = A_{u^*}v(t) + F_{u^*}(v(t)),\ v(0) = v^0,\ t \geq 0, \tag{3}$$

где $A_{u^*} = A + f'(u^*), F_{u^*}(v(t)) = f(v(t) + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v(t)$. Заметим, что из условия (F1) следует, что функция $F_{u^*}(v(t)) = f(v(t) + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v(t)$ при малых $\|v^0\|_{E^\beta}$ имеет порядок $o(\|v(t)\|_{E^\beta})$. Поскольку $f'(u^*) \in B(E^\beta, E)$, $0 \leq \beta < 1$, то оператор $A_{u^*} = A + f'(u^*)$ является генератором аналитической C_0-полугруппы [4]. Рассмотрим случай, когда спектр оператора A_{u^*} расщепляется на две части σ^+ и σ^-.

Предположим, что часть σ^+ спектра оператора $A + f'(u^*)$, которая находится справа от мнимой оси, состоит из конечного числа собственных значений конечной корневой кратности. Такое предположение выполняется, например, для операторов A, у которых резольвента компактна. Условия, при которых оператор A_{u^*} имеет свойство дихотомии, изучались, например, в [5, 6, 7]. В случае гиперболической стационарной точки u^* оператор A_{u^*} не имеет спектра на мнимой оси $i\mathbb{R}$. Пусть $U(\sigma^+) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > 0\}$ является открытой связанной окрестностью множества σ^+ с границей $\partial U(\sigma^+)$. Разложим E^β, используя проектор Рисса

$$P(\sigma^+) := P(\sigma^+, A_{u^*}) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U(\sigma^+)} \left(\zeta I - A_{u^*}\right)^{-1} d\zeta,$$

определенный по σ^+. В соответсвии с этим определением и аналитичностью C_0-полугруппы $e^{tA_{u^*}}, t \in \mathbb{R}_+$, существуют такие положительные константы $M_1, \gamma > 0$, что

$$\begin{cases} \|e^{tA_{u^*}}z\|_{E^\beta} \leq M_1 e^{-\gamma t}\|z\|_{E^\beta}, & t \geq 0,\\ \|e^{tA_{u^*}}w\|_{E^\beta} \leq M_1 e^{\gamma t}\|w\|_{E^\beta}, & t \leq 0, \end{cases} \tag{4}$$

для всех $w \in P(\sigma^+)E^\beta$ и $z \in (I-P(\sigma^+))E^\beta$. Поскольку $F_{u^*}(v(t)) = o(\|v(t)\|_{E^\beta})$ при малых $v(\cdot)$ дихотомические оценки (4) являются основными при рассмотрении поведения решения задачи (1) в окрестности гиперболической стационарной точки u^*.

Если элемент v^0 близок к 0, т. е., скажем, $v^0 \in \mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$ при малом $\rho > 0$, тогда обобщенное решение $v(t; v^0)$ задачи (3) будет некоторое время оставаться в шаре $\mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$. Мы обозначим максимальное время нахождения решения $v(t; v^0)$ в шаре $\mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$ через $T = T(v^0) = \sup\{\, t \geq 0 : \|v(t; v^0)\|_{E^\beta} \leq \rho$ или $v(t; v^0) \in \mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)\}$. Возвращаясь к решению задачи (3) для любых $v^0, v^T \in \mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$, мы рассмотрим граничную задачу

$$\begin{cases} v'(t) = A_{u^*}v(t) + F_{u^*}(v(t)),\ 0 \leq t \leq T,\\ (I - P(\sigma^+))v(0) = (I - P(\sigma^+))v^0,\ P(\sigma^+)v(T) = P(\sigma^+)v^T. \end{cases} \tag{5}$$

Обобщенное решение задачи (5), как было показано в [8], удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t) = e^{(t-T)A_{u^*}}P(\sigma^+)v^T + e^{tA_{u^*}}(I - P(\sigma^+))v^0 + \tag{6}$$

$$+\int_0^t e^{(t-s)A_{u^*}}(I-P(\sigma^+))F_{u^*}(v(s))ds-\int_t^T e^{(t-s)A_{u^*}}P(\sigma^+)F_{u^*}(v(s))ds,\ 0\le t\le T.$$

Предложение 1.1. [8] Пусть $0 < T \le \infty$ и выполняется условие $(F1)$. Тогда существует $\rho > 0$ такое, что для любых $v^0, v^T \in \mathcal{U}_{E^\beta}(0;\rho)$ уравнение (6) имеет единственное решение $v(\cdot) \in C([0,T];\mathcal{U}_{E^\beta}(0;\rho))$. Если $T=\infty$, то $\|v(t)\|_{E^\beta} \to 0$ при $t \to \infty$.

Итак, если мы дискретизируем задачу (3) по пространственным или временной переменным, то удается доказать, что оценки типа (4) для аппроксимирующих решений сохраняются. Если оценки типа (4) выполняются равномерно по параметру дискретизации, то эти оценки будут выполняться для аппроксимирующих решений задачи (6) и можно доказать, что имеет место затенение, т. е. близость решений исходной и аппроксимирующих задач равномерно по времени T. Затенение рассматривалось, например, в работах [8, 9, 10, 11, 12, 13].

В настоящей работе мы рассмотрим затенение (shadowing) траекторий для дробных уравнений.

1. Подготовительные сведения. Рассмотрим корректно поставленную задачу Коши

$$\mathbf{D}_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad 0 < t \le T; \quad u(0) = u^0, \tag{7}$$

где $\mathbf{D}_t^\alpha$ – производная Капуто – Джрбашяна, функция $f(\cdot)$ является достаточно гладкой (см. условие (F1)), а оператор A порождает аналитическое и компактное α–разрешающее семейство $S_\alpha(\cdot, A)$. О разрешимости задач (7) см., например, [15].

Дробный интеграл порядка $\alpha > 0$ определяется как

$$(J^\alpha q)\,(t) := (g_\alpha * q)(t), \quad t > 0,$$

где $g_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$ а $\Gamma(\alpha)$ есть гамма-функция. Производная Римана—Лиувилля порядка $0 < \alpha \le 1$ определяется как

$$\left(D_t^\alpha q\right)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)(J^{1-\alpha}q)(t), \quad t > 0,$$

а дробная производная Капуто – Джрбашяна порядка $0 < \alpha \le 1$ определяется как

$$(\mathbf{D}_t^\alpha q)(t) = \left(D_t^\alpha q\right)(t) - \frac{q(0)}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}, \quad t > 0.$$

Решение задачи Коши (7) с $f \equiv 0$ дается α-разрешающим семейством операторов $E_\alpha(\cdot)$, которое является операторным обобщением функции Миттаг-Леффлера, и обычно его записывают $u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u^0$. Мы обозначим это семейство операторов через $S_\alpha(t,A) \equiv E_\alpha(t^\alpha A)$.

Решение задачи (7) с неоднородным уравнением записывается в виде

$$u(t) = S_\alpha(t,A)u^0 + \int_0^t P_\alpha(t-s,A)f(u(s))ds, \tag{8}$$

где

$$(\lambda^\alpha I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}P_\alpha(t,A)xdt, \quad \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S_\alpha(t,A)xdt$$

для любых $Re\,\lambda > \omega, x \in E$.

Общая аппроксимационная схема (см. [14]) может быть описана следующим образом. Пусть E_n и E — банаховы пространства, а $\{p_n\}$ — последовательность линейных ограниченных операторов $p_n : E \to E_n, p_n \in B(E, E_n), n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$, обладающих следующим свойством:

$$\|p_n x\|_{E_n} \to \|x\|_E \quad \text{при} \quad n \to \infty \text{ для любого } x \in E. \tag{9}$$

Определение 1.1. *Последовательность элементов* $\{x_n\}, x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}$, *называется* $\mathcal{P}$*–сходящейся к* $x \in E$, *если* $\|x_n - p_n x\|_{E_n} \to 0$ *при* $n \to \infty$; *это записывается как* $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Определение 1.2. *Последовательность ограниченных линейных операторов* $B_n \in B(E_n), n \in \mathbb{N}$, *называется* $\mathcal{PP}$*–сходящейся к ограниченному оператору* $B \in B(E)$, *если для любого* $x \in E$ *и для любой последовательности* $\{x_n\}, x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}$, *такой, что* $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, *имеем* $B_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Bx$. *Это записывается в виде* $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$.

Обозначим $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : arg(\lambda) < \theta\}$.

Теорема 1.1. [15] *Предположим, что* $0 < \alpha \le 2$ *и операторы* A, A_n *порождают экспоненциально ограниченные аналитические* α*–разрешающие семейства* $S_\alpha(\cdot, A)$, $S_\alpha(\cdot, A_n)$ *в банаховых пространствах* E, E_n, *соответственно. Следующие условия (A) и (B) вместе эквивалентны условию (C).*

(A) (согласованность): существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, *что резольвенты сходятся:*

$$\big(\lambda I_n - A_n\big)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1};$$

(B) (устойчивость): найдутся такие константы $M \geq 1$, $0 < \varphi \leq \pi/2$ *и* $\omega \in \mathbb{R}$, *не зависящие от* n, *что сектор* $\omega + \Sigma_{\varphi+\pi/2}$ *содержится в* $\rho(A_n)$ *и*

$$\left\|\lambda^{\alpha-1}\big(\lambda^{\alpha} I_n - A_n\big)^{-1}\right\|_{B(E_n)} \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad \lambda \in \omega + \Sigma_{\beta+\pi/2},$$

для любых $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \beta < \varphi$;

(C) (сходимость): для некоторого конечного $\omega_1 > 0$ *имеем*

$$\sup_{z \in \Sigma_\beta} e^{-\omega_1 \Re z}\left\|S_\alpha(z, A_n)x_n - p_n S_\alpha(z, A)x\right\|_{E_n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

если $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ *при всех* $x_n \in E_n$, $x \in E$ *и любого* $0 < \beta < \varphi$. При полудискретизации естественно предполагать, что условия (A) и (B) выполняются.

2. Формулировка основных результатов. Следуя конструкциям раздела 1, задаче Коши (7) сопоставим граничную задачу

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^{\alpha} v(t) = A_{u^*} v(t) + F_{u^*}(v(t)),\ 0 \leq t \leq T, \\ (I - P(\sigma^+))v(0) = (I - P(\sigma^+))v^0,\ P(\sigma^+)v(T) = P(\sigma^+)v^T. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь u^* – стационарная точка, т. е.

$$Au^* + f(u^*) = 0. \tag{11}$$

В случае $T = \infty$ второе граничное условие исчезает. Обобщенное решение задачи (10), в силу равенства [16, (8.2.16)])

$$u(T) = S_\alpha(T - t, A_{u^*})u(t) + \int_t^T P_\alpha(T - s, A_{u^*})F_{u^*}(v(s))ds,$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t) = S_\alpha(t, A_{u^*})(I - P(\sigma^+))v^0 + \int_0^t P_\alpha(t - s, A_{u^*})(I - P(\sigma^+))F_{u^*}(v(s))ds + \tag{12}$$

$$S_\alpha(T - t, A_{u^*})^{-1}\left(P(\sigma^+)v^T - \int_t^T P_\alpha(T - s, A_{u^*})P(\sigma^+)F_{u^*}(v(s))ds\right),\ 0 \leq t \leq T.$$

В последнем уравнении оператор $S_\alpha(T - t, A_{u^*})^{-1} \equiv E_\alpha((t - \tau)^\alpha A_{u^*}^+)^{-1}$ на конечномерном подпространстве $P(\sigma^+)E^\beta$ корректно определен [17], поскольку все корни функции Миттаг-Леффлера имеют аргумент в интервале $(\alpha\pi/2, \alpha\pi)$, см. [18]. В силу теоремы об отображении спектра нули не появятся в спектре оператора $S_\alpha(T - t, A_{u^*})P(\sigma^+)$, если спектр оператора $A_{u^*}P(\sigma^+)$ принадлежит сектору от $-\alpha\pi/2$ до $\alpha\pi/2$.

Заметим, что множество σ^-, т. е. подмножество спектра $\sigma(A_{u^*}) \not\subseteq \Sigma_{\alpha\pi/2}$, в дробном случае может содержать несколько точек $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\Re\lambda \geq 0$. В силу условия (2) оператор A_{u^*} также порождает аналитическую полугруппу и поэтому число таких точек конечно. Обозначим это множество через Σ_α^+.

Теорема 2.1. *Пусть оператор* A, *имеющий компактную резольвенту, и функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяют условиям* (2) *и* $(F1)$. *Тогда найдется такое* $\hat{\rho} > 0$, *что для любого* $0 < \hat{\rho}_2 \leq \hat{\rho}$ *можно указать* $0 < \hat{\rho}_1 \leq \hat{\rho}_2$ *со свойством, что уравнение (12) имеет единственное решение* $v(\cdot) = v(v^0, v^T, \cdot) \in C([0, T]; \mathcal{U}_{E^\beta}(0; \hat{\rho}_2))$ *для всех* $v^0, v^T \in \mathcal{U}_{E^\beta}(0, \hat{\rho}_1)$ *и всех* $0 < T \leq \infty$. *Если* $T = \infty$, *то* $\|v(t)\|_{E^\beta} \to 0$ *при* $t \to \infty$.

В случае компактных операторов естественно рассмотреть аппроксимацию, сохраняющую указанное свойство.

Определение 2.1. *Последовательность элементов* $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, *называется* $\mathcal{P}$*-компактной, если для любого* $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, *найдутся* $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}'$ *и* $x \in E$ *такие что* $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ *при* $n \to \infty$ *из* $\mathbb{N}''$.

Определение 2.2. *Последовательность операторов* $\{B_n\}$, $B_n : E_n \to E_n$, $n \in \mathbb{N}$, *называется* компактно сходящейся *к оператору* $B : E \to E$, *если* $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ *и выполняется следующее условие:*

$$\|x_n\|_{E_n} = O(1) \Longrightarrow \{B_n x_n\} \text{ является } \mathcal{P}\text{-компактной.}$$

Определение 2.3. *Областью* компактной сходимости резольвент Δ_{cc}, *где* $A_n \in C(E_n)$ *и* $A \in C(E)$, *называется множество всех* $\lambda \in \rho(A)$ *таких, что* $(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}$ *компактно.*

Определение 2.4. *Последовательность линейных замкнутых операторов* $A_n \in C(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *называется согласованной с замкнутым линейным оператором* $A \in C(E)$, *если для любого* $x \in D(A)$ *найдется такая* *последовательность элементов* $\{x_n\}, x_n \in D(A_n) \subseteq E_n, n \in \mathbb{N}$, *что* $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ *и* $A_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ax$. *Пишут* (A_n, A) *– согласованы.*

Рассмотрим в банаховых пространствах E_n^β задачи Коши

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}_t^\alpha u_n(t) = A_n u_n(t) + f_n(u_n(t)),\ t \geq 0, \\ &u_n(0) = u_n^0 \in E_n^\beta, \end{aligned} \tag{13}$$

где $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} u^0$, операторы (A_n, A) – согласованы, в функции $f_n(\cdot) : E_n^\beta \to E_n$ глобально ограничены и глобально Липшицево непрерывны равномерно по $n \in \mathbb{N}$, и непрерывно дифференцируемы по Фреше, причем $f_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}} f(\cdot)$ в подходящем смысле (см. условия (F2)–(F3)).

Эти условия имеют вид:

(F2) Для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|f_n'(w_n) - f_n'(z_n)\|_{B(E_n^\beta, E_n)} \leq \epsilon$ при $\|w_n - z_n\|_{E_n^\beta} \leq \delta$ для всех $w_n, z_n \in \mathcal{U}_{E_n^\beta}(u_n^*; \delta)$, где u_n^* – гиперболические стационарные точки задачи (13).

(F3) Отображения f_n непрерывно дифференцируемы в $\mathcal{U}_{E_n^\beta}(p_n^\beta u^*, \rho)$ и как только $x_n \in \mathcal{U}_{E_n^\beta}(p_n^\beta u^*, \rho)$ и $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} x$, то $f_n(x_n) \xrightarrow{\mathcal{P}} f(x)$ и $f_n'(x_n) \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}} f'(x)$.

Замечание 2.1. *Как результат мы получаем* $\|F'_{u_n^*, n}(w_n)\| \leq c_\rho \|w_n\|_{E_n^\beta}$ *с константами* $c_\rho \to 0$ *при* $\rho \to 0$. *Здесь* $\rho > 0$ *являются радиусами шаров* $\mathcal{U}_{E_n^\beta}(0; \rho)$, *для которых найдется такое* $\delta > 0$, *что*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|w_n\|_{E_n^\beta} \leq \delta} \|f_n'(w_n + p_n^\beta u^*) - f_n'(p_n^\beta u^*)\|_{B(E_n^\beta, E_n)} \leq \rho.$$

Пусть задача (11) имеет гиперболическую стационарную точку u^* и выполняются условия $(F2)$,$(F3)$. Тогда существуют такие $n^* \in \mathbb{N}$ и $\rho^* > 0$, что уравнения $A_n u_n + f_n(u_n) = 0$ имеют единственные решения $u_n^* \in D(A_n) \cap \mathcal{U}_{E_n^\beta}(p_n^\beta u^*, \rho^*)$ для каждого $n \geq n^*$. Более того [8], каждая u_n^* является гиперболической и удовлетворяет $\|u_n^* - p_n^\beta u^*\|_{E_n^\beta} \to 0 \quad$ при $n \to \infty$. В случае $\Delta_{cc} \neq \emptyset$ этот факт можно установить, например, так. Определим операторы $\mathcal{M}(w) = Iw + A^{-1} f(w)$, $\mathcal{M}_n(w_n) = I_n w_n + A_n^{-1} f_n(w_n)$. Производная по Фреше $\mathcal{M}'(w) = I + A^{-1} f'(w)$ – это оператор, действующий из E^β в E^β, поскольку A^{-1} отображает E в $D(A) \subset E^\beta$. Из условия (F3) мы получаем $\mathcal{M}_n(v_n) \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}^\beta} \mathcal{M}(v)$ при $v_n \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} v$ и $\|\mathcal{M}_n'(w_n + p_n^\beta u^*) - \mathcal{M}_n'(p_n^\beta u^*)\|_{E_n^\beta} \leq \rho$, если $\|w_n\|_{E_n^\beta} \leq \delta$ с $\rho = \rho(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ равномерно по n. Из условия (F2) следует, что $\mathcal{M}_n'(p_n u^*) \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}^\beta} \mathcal{M}'(u^*)$ собственно, операторы $\mathcal{M}_n'(p_n^\beta u^*)$ Фредгольмовы с нулевым индексом и $\mathcal{N}(A + f'(u^*)) = \{0\}$. По теореме 2 из [14] следует сходимость $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} u^*$.

Рассмотрим теперь гиперболическую стационарную точку u^* задачи (1) и гиперболические стационарные точки $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} u^*$ задачи (13). В этом случае

$$\mathbf{D}_t^\alpha v_n(t) = A_{u_n^*, n} v_n(t) + F_{u_n^*, n}(v_n(t)),\ v_n(0) = v_n^0,\ t \geq 0,$$

где $A_{u_n^*, n} = A_n + f_n'(u_n^*)$, $F_{u_n^*, n}(v_n(t)) = f_n(v_n(t) + u_n^*) - f_n(u_n^*) - f_n'(u_n^*) v_n(t)$.

Теорема 2.2. *(О затенении) Пусть оператор* A *порождает экспоненциально убывающую аналитическую* C_0*-полугруппу и* $0 \leq \beta < \gamma < 1$. *Пусть резольвенты операторов* A_n, A *компактны,* $\Delta_{cc} \neq \emptyset$ *и выполнены условия* (B), $(F1), (F2), (F3)$. *Тогда найдется такое* $\rho_0 > 0$, *что для любого* $\varepsilon_0 > 0$ *существует число* $n_0 = n_0(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}$ *такое, что для любого обобщенного решения* $u(t)$ *задачи (1), удовлетворяющего* $u(t) \in \mathcal{U}_{E^\gamma}(u^*, \rho_0), 0 \leq t \leq T$ *при некотором* $0 < T \leq \infty$ *найдутся такие начальные условия* $u_n^0 \in E_n^\beta, n \geq n_0$, *что обобщенные решения* $u_n(t; u_n^0)$ *задач (13) существуют на* $[0, T]$ *и удовлетворяют*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|p_n^\beta u(t) - u_n(t; u_n^0)\|_{E_n^\beta} \leq \varepsilon_0 \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon). \tag{14}$$

Теорема 2.3. *(О затенении) Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда найдется такое* $\rho_0 > 0$, *что для любого* $\varepsilon_0 > 0$ *существует число* $n_0 = n_0(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}$ *такое, что для любых обобщенных решений* $u_n(t), n \geq n_0$ *задачи (13), удовлетворяющих* $u_n(t) \in \mathcal{U}_{E_n^\gamma}(u_n^*, \rho_0), 0 \leq t \leq T$ *для некоторого* $0 < T \leq \infty$ *существуют такие начальные условия* $u^{n,0} \in E^\beta, n \geq n_0$, *что обобщенные решения* $u(t; u^{n,0})$ *задачи (1) существуют на* $[0, T]$ *и удовлетворяют*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t) - p_n^\beta u(t; u^{n,0})\|_{E_n^\beta} \leq \varepsilon_0 \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon_0).$$

3. Доказательство теоремы 2.1. Дадим некоторые определения.

Определение 3.1. *Стационарная точка* u^* *называется гиперболической, если оператор* $A_{u^*} = A + f'(u^*)$ *не имеет спектра на границе* $\partial\Sigma_{\alpha\pi/2}$.

Определение 3.2. *Точки спектра оператора* A_{u^*}, *лежащие внутри* $\Sigma_{\alpha\pi/2} = \{\lambda \in \mathbb{C} : arg(\lambda) < \alpha\pi/2\}$ *и обозначаемые* σ^+, *назовем неустойчивым спектром, а точки спектра оператора* A_{u^*}, *лежащие вне* $\overline{\Sigma_{\alpha\pi/2}}$, *и обозначаемые* σ^-, *назовем устойчивым спектром оператора* A_{u^*}.

Заметим, что множество σ^- может содержать несколько (конечное число) точек $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\Re\lambda > 0$. В силу условия (2) оператор A_{u^*} также порождает аналитическую полугруппу и поэтому число таких точек конечно. Обозначим это множество через Σ_α^+.

Теорема 2.1. имеет следующее

Доказательство. Определим оператор $G(z; v(\cdot))$ как правую часть выражения (12), где $z = \binom{v^0}{v^T}$ – вектор с нормой $\|z\| = \|v^0\|_{E^\beta} + \|v^T\|_{E^\beta}$. Во-первых, например, в [19, 20, 21, 15] установлено, что компактность резольвенты $R(\lambda^\alpha; A)$ для некоторого $\lambda^\alpha \in \rho(A)$ эквивалентна компактности семейства $S_\alpha(t, A)$ для любого $t > 0$, а также компактности $P_\alpha(t, A)$ для любого $t > 0$. Во-вторых, рассмотрим уравнение

$$v(t) = G(z; v(\cdot))(t), \quad t \in [0, T], \tag{15}$$

в пространстве непрерывных функций $\Upsilon = C\big([0, T]; E^\beta\big)$. В [22] установлено, что оператор $G(z; \cdot) : \Upsilon \to \Upsilon$ непрерывен. Наконец, в силу компактности резольвенты $R(\lambda^\alpha; A)$ в [22] показано, что оператор $G(z; v(\cdot)) : \Upsilon \to \Upsilon$ компактен при любом векторе z. Компактность оператора $S_\alpha(t, A_{u^*})(I - P(\sigma^+))v^0 + \int_0^t P_\alpha(t - s, A_{u^*})(I - P(\sigma^+))F_{u^*}(v(s))ds$ в пространстве Υ установлена в [22], теорема 4.5. Обратим внимание лишь на то, что проектор $P(\sigma^+)$ конечномерен, и, кроме того, часть оператора $A^-_{u^*}$, где $A^-_{u^*}$ – сужение оператора A_{u^*} на подпространство $(I - P(\sigma^+))E^\beta$, отвечающая спектру Σ_α^+, также действует в конечномерном пространстве, т. к. часть спектра Σ_α^+ состоит из конечного числа точек конечной корневой кратности. Оператор $S_\alpha(T - t, A_{u^*})^{-1}\left(P(\sigma^+)v^T - \int_t^T P_\alpha(T - s, A_{u^*})P(\sigma^+)F_{u^*}(v(s))ds\right)$ является компактным в пространстве Υ согласно теореме 4.1 из [23].

Производная оператора $G'_v(z; v(\cdot))$ при $z_0 = 0$ и $v_0(\cdot) = 0$ существует и оператор $I - G'_v(z_0; v_0(\cdot))$ имеет ограниченный обратный. Остается воспользоваться теоремой 54.3 из [24], которая утверждает существование таких $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 > 0$, что уравнение (15) имеет при любых $\|z\| \le \rho_1$ решение $v(\cdot)$ в $C\big([0, T]; E^\beta\big)$ с $\|v(\cdot)\|_\Upsilon \le \rho_2$.

Случай $T = \infty$ вытекает из оценок раздела 3 в [22], леммы 2 в [25] и (11) из [23].

4. Доказательство теорем 2.2 и 2.3. Определим операторы

$$p_n^\beta = (-A_n)^{-\beta} p_n (-A)^\beta \in B(E^\beta, E_n^\beta). \tag{16}$$

Сходимость $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} x$ имеет место тогда и только тогда, когда $\|x_n - p_n^\beta x\|_{E_n^\beta} \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем $\|x_n - p_n^\beta x\|_{E_n^\beta} = \|(-A_n)^\beta x_n - p_n(-A)^\beta x\|$ и

$$\|p_n^\beta x\|_{E_n^\beta} = \|p_n(-A)^\beta x\|_{E_n} \to \|(-A)^\beta x\|_E = \|x\|_{E^\beta} \;\text{ при }\; n \to \infty$$

для любого $x \in D((-A)^\beta)$ и, следовательно, выполняется (9) для пространств E^β, E_n^β.

Кроме связывающих отображений p_n, p_n^β нам понадобятся отображения, согласованные с гиперболической точкой. Заметим, что проекторы $P = P(\sigma^+)$ и $P_n = P_n(\sigma_n^+)$ конечномерны и сходятся $P_n \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{P}} P$ компактно. Определим отображения $\tilde{p}_n : E \mapsto E_n$ по формуле

$$\tilde{p}_n = P_n p_n P + (I_n - P_n) p_n (I - P) \tag{17}$$

и отображения $\tilde{p}_n^\beta : E^\beta \mapsto E_n^\beta$ по формуле

$$\tilde{p}_n^\beta x = \begin{cases} (A_{u_n^*,n})^{-\beta} P_n p_n (A_{u^*})^\beta P x, & x \in PE^\beta, \\ (-A_{u_n^*,n})^{-\beta} (I_n - P_n) p_n (-A_{u^*})^\beta (I - P) x, & x \in (I - P)E^\beta. \end{cases} \tag{18}$$

Без потери общности мы можем определить норму в E^β таким образом, что

$$\|v\|_{E^\beta} = \max(\|P(\sigma^+)v\|_{E^\beta}, \|(I - P(\sigma^+))v\|_{E^\beta}). \tag{19}$$

В силу равенства

$$(\tilde{p}_n - p_n)x = 2(P_n p_n - p_n P)Px - (P_n p_n - p_n P)x,$$

получаем, что система отображений $\{\tilde{p}_n\}$ эквивалентна системе отображений $\{p_n\}$ на E, а система $\{\tilde{p}_n^\beta\}$ эквивалентна системе $\{p_n^\beta\}$ на E^β (это показывается как и в [8]).

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $u(t)$, $0 \le t \le T$, является обобщенным решением задачи (1), а точнее $u(t) \in \mathcal{U}_{E^\gamma}(u^*, \rho_0)$ для всех $0 \le t \le T$. Тогда $v(t) := u(t) - u^* \in \mathcal{U}_{E^\gamma}(0, \rho_0)$ является решением уравнения (12) с краевыми условиями

$$v^- = (I - P)v(0), \quad v^+ = Pv(T).$$

В силу выбора нормы (19) имеем

$$\|v^-\|_{E^\gamma} \le \rho_0, \quad \|v^+\|_{E^\gamma} \le \rho_0.$$

Применим теорему 2.1 с γ вместо β. В силу единственности в $C([0,T], \mathcal{U}_{E^\gamma}(0, \hat{\rho}_2))$ решение $v(v^-, v^+, \cdot)$ по теореме 2.1 удовлетворяет $v(t) = v(v^-, v^+, t), 0 \le t \le T$. Определим далее полудискретные граничные задачи с условиями

$$v_n^- = \tilde{p}_n^\beta v^-, \quad v_n^+ = \tilde{p}_n^\beta v^+.$$

По определению (18) имеем $v_n^- = \tilde{p}_n^\beta v^- = (I_n - P_n)\tilde{p}_n^\beta v^-$ и $v_n^+ = \tilde{p}_n^\beta v^+ = P_n \tilde{p}_n^\beta v^+$ и в силу (4.3) из [8]

$$\|v_n^\pm\|_{E_n^\beta} \le \tilde{C}_\beta \|v^\pm\|_{E^\beta} \le \tilde{C}_\beta \rho_0.$$

Выбирая сходящиеся стационарные точки $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}} u^*$ и соответствующие единственные решения $v_n(\cdot) = v_n(v_n^-, v_n^+, \cdot) \in C([0,T]; \mathcal{U}_{E_n^\beta}(0, \rho))$ задач

$$v_n(t) = S_\alpha(t, A_{u_n^*})(I_n - P_n)v_n^- + \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u_n^*})(I_n - P_n)F_{u_n^*}(v_n(s))ds + \tag{20}$$

$$S_\alpha(T-t, A_{u_n^*})^{-1}\left(P_n v_n^+ - \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u_n^*})P_n F_{u_n^*}(v_n(s))ds\right), \ 0 \le t \le T.$$

мы получаем, что

$$u_n^0 = u_n^* + v_n(0), \quad u_n(t) = v_n(t) + u_n^*$$

удовлетворяют утверждению настоящей теоремы. Выберем ρ_0 так, чтобы для (12) и (20) можно было применить оценку из теоремы о неявной функции см., например, лемма 1 в [14] или лемма 6.1 в [8]. Таким образом, для решения $v_n(t)$ и функции $\tilde{p}_n^\beta v(t)$ получаем

$$\sup_{0 \le \le T} \|v_n(t) - \tilde{p}_n^\beta v(t)\|_{E_n^\beta} \le \tag{21}$$

$$\le C^* \|v_n - G_n(v_n^-, v_n^+, v_n) - \tilde{p}_n^\beta v(t) + G_n(v_n^-, v_n^+, \tilde{p}_n^\beta v(t))\|_{C([0,T];E_n^\beta)} \le$$

$$\le C^* \sup_{0 \le t \le T} \|\eta_n^-(t) + \eta_n^+(t)\|_{E_n^\beta},$$

где члены справа заданы равенствами

$$\eta_n^-(t) = \tilde{p}_n^\beta S_\alpha(t, A_{u^*})(I-P)v^- + \tilde{p}_n^\beta \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u^*})(I-P)F_{u^*}(v(s))ds$$

$$-S_\alpha(t, A_{u_n^*,n})(I_n - P_n))v_n^- - \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u_n^*,n})(I_n - P_n)F_{u_n^*}(\tilde{p}_n^\beta v(s))ds$$

$$\eta_n^+(t) = \tilde{p}_n^\beta S_\alpha(T-t, A_{u^*})^{-1}\left(Pv^+ - \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u^*})PF_{u^*}(v(s))ds\right)$$

$$-S_\alpha(T-t, A_{u_n^*,n})^{-1}\left(P_n v_n^+ + \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u_n^*,n})P_n F_{u_n^*}(\tilde{p}_n^\beta v(s))ds\right).$$

Оценим η_n^-, полагая $\tilde{E} = (I-P)E$, $g(t) = (I-P)F_{u^*}(v(t))$, $g_n(t) = (I_n - P_n)F_{u_n^*,n}(\tilde{p}_n^\beta v(t))$, $K_1 = \mathcal{U}_{E^\gamma}(0, \rho_0)$, $K_2 = \{(I-P)F_{u^*}(w) : w \in \mathcal{U}_{E^\gamma}(0, \rho_0)\}$, $u^0 = v^-$, $u_n(0) = \tilde{p}_n^\beta u(0) = \tilde{p}_n^\beta v^-$. Заметим, что в силу непрерывности F_{u^*} из E^β в E и компактному вложению пространства E^γ в E^β множество K_1 компактно в E^β, а K_2 компактно в E. Остается заметить, что сильная дискретная сходимость становится равномерной на компакте, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ при $n \ge n_1 = n(\epsilon)$

$$\begin{aligned}\sup_{0 \le t \le T} \|g_n(t) - \tilde{p}_n g(t)\|_{\tilde{E}_n} &\le \sup_{0 \le t \le T} \|(I_n - P_n)\left(F_{u_n^*,n}(\tilde{p}_n^\beta v(t)) - p_n F_{u^*}(v(t))\right)\|_{E_n} \\ &+ \sup_{w \in K_2} \|(I_n - P_n)(p_n P - P_n p_n)F_{u^*}(w)\|_{E_n} \\ &\le \varepsilon.\end{aligned}$$

Поэтому мы получаем $\|\eta_n^-\|_{E_n^\beta} \leq \varepsilon$ при $n \geq n_1$. Аналогичным образом получаем оценку для $\|\eta_n^+\|_{E_n^\beta}$ при $n \geq n_2$. Наконец, в силу (21) и сходимости стационарных точек $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} u^*$ мы получаем для всех $n \geq c \max(n_1, n_2)$ и всех $0 \leq t \leq T$,

$$\|u_n(t) - p_n^\beta u(t)\|_{E_n^\beta} \leq \|v_n(t) - p_n^\beta v(t)\|_{E_n^\beta} + \|u_n^* - p_n^\beta u^*\|_{E_n^\beta} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 2.3. Как и в теореме 2.2, возьмем некоторое $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим обобщенные решения $u_n(t), 0 \leq t \leq T$, задач (13), которые лежат в $\mathcal{U}_{E_n^\gamma}(u_n^*, \rho_0)$ и определим

$$v_n(t) = u_n(t) - u_n^*, \quad v_n^- = (I_n - P_n)v_n(0), \quad v_n^+ = P_n v_n(T).$$

В силу равномерной ограниченности проекторов имеем для некоторой константы $C_b \geq 1$

$$\|v_n^-\|_{E_n^\gamma} \leq C_b\rho_0, \quad \|v_n^+\|_{E_n^\gamma} \leq C_b\rho_0.$$

Применим теорему 2.1 к данным $v_n^\pm$ с γ вместо β. Пусть $C_b\rho_0 \leq \rho$ так что выполняется $v_n(t) = v_n(v_n^-, v_n^+, t), 0 \leq t \leq T$ в силу единственности решений в $C([0,T], \mathcal{U}_{E_n^\gamma}(0, \tilde{\rho}))$. Положим $\beta < \mu < \gamma$ и воспользуемся леммой 4.5 из [8] для утверждения существований граничных условий $v^{n,-} \in (I-P)E^\mu, v^{n,+} \in PE^\mu, n \geq n_1(\varepsilon_0)$ для исходной задачи (12) таких, что

$$\|v_n^- - \tilde{p}_n^\beta v^{n,-}\|_{E_n^\beta} + \|v_n^+ - \tilde{p}_n^\beta v^{n,+}\|_{E_n^\beta} \leq C^*\varepsilon_0, \quad \|v^{n,\pm}\|_{E^\mu} \leq \hat{C}\rho_0. \tag{22}$$

Напомним вкратце эти рассуждения. Пусть задана последовательность $\{v_n^0\}, v_n^0 \in E_n^\gamma$ с $\|(-A_n)^\gamma v_n^0\| \leq b$. Предположим от противного, что найдутся $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$ и $v \in E^\beta$ со свойством $\|v_n^0 - p_n^\beta v\| \geq \varepsilon > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}'$. Понятно, что последовательность $(-A_n)^{-\beta}(-A_n)^\beta v_n^0 = v_n^0$ является $\mathcal{P}-$компактной, и, значит, для некоторой $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ имеем $v_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{v}$ при $n \in \mathbb{N}''$. Кроме того, $(-A_n)^{\beta-\gamma}(-A_n)^\gamma v_n^0 = (-A_n)^\beta v_n^0$ тоже $\mathcal{P}-$компактна. Поэтому для $\mathbb{N}''' \subset \mathbb{N}''$ имеем $(-A_n)^\beta v_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} z$ при $n \in \mathbb{N}'''$. Значит, $\bar{v} = (-A)^{-\beta} z \in E^\beta$. Наконец, $\|v_n^0 - p_n^\beta \bar{v}\|_{E_n^\beta} = \|(-A_n)^\beta v_n^0 - p_n z\|_{E_n} \to 0$ при $n \in \mathbb{N}'''$, что противоречит нашему допущению.

Далее, мы применяем теорему 2.2 с граничными условиями $v^{n,\pm}$. Обозначим единственное решение в $C([0,T]; \mathcal{U}_{E^\gamma}(0; \hat{\rho}_2))$ через $v^n(t), 0 \leq t \leq T$. Покажем, что

$$u^{n,0} = v^n(0) + u^*, \quad u(t; u^{n,0}) = v^n(t) + u^*, \ 0 \leq t \leq T,$$

удовлетворяет (14). Для этой цели мы подставим $v_n(\cdot)$ и $\tilde{p}_n^\beta v^n(\cdot)$ в неравенство (21). Это неравенство выполняется, поскольку $\|v_n(t)\|_{E_n^\beta} \leq \bar{C}\rho_0$, с должной константой $\bar{C}$.

Мы получили оценку

$$\|v_n(\cdot) - \tilde{p}_n^\beta v^n(\cdot)\|_{C([0,T];E_n^\beta)} \leq \tag{23}$$

$$\|\tilde{p}_n^\beta v^n - G_n(v_n^-, v_n^+, \tilde{p}_n^\beta v^n)\|_{C([0,T];E_n^\beta)} \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|\eta_n^-(t) + \eta_n^+(t) + \varphi_n^-(t) + \varphi_n^+(t)\|_{E_n^\beta},$$

где члены справа заданы как

$$\eta_n^-(t) = \tilde{p}_n^\beta S_\alpha(t, A_{u^*})(I-P)v^- + \tilde{p}_n^\beta \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u^*})(I-P)F_{u^*}(v(s))ds$$

$$-S_\alpha(t, A_{u_n^*,n})(I_n - P_n))v_n^- - \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u_n^*,n})(I_n - P_n)F_{u_n^*}(\tilde{p}_n^\beta v(s))ds$$

$$\eta_n^+(t) = \tilde{p}_n^\beta S_\alpha(T-t, A_{u^*})^{-1}\left(Pv^+ - \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u^*})PF_{u^*}(v(s))ds\right)$$

$$-S_\alpha(T-t, A_{u_n^*,n})^{-1}\left(P_n v_n^+ + \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u_n^*,n})P_n F_{u_n^*}(\tilde{p}_n^\beta v(s))ds\right).$$

$$\varphi_n^-(t) = S_\alpha(t, A_{u_n^*,n})(I_n - P_n)(\tilde{p}_n^\beta v^{n,-} - v_n^-),$$

$$\varphi_n^+(t) = S_\alpha(T-t, A_{u_n^*,n})^{-1}P_n(\tilde{p}_n^\beta v^{n,+} - v_n^+).$$

Мы получили оценку $\|\eta_n^\pm\| \leq C\varepsilon_0$ практически как и в теореме 2.2, см. (21), основное отличие состоит в том, что $v(s)$ заменено на $v^n(s)$, а компактные множества даны как $K_2 = \{(I-P)F_{u^*}(w) : w \in \mathcal{U}_{E^\gamma}(0, \rho_0)\}$ и $K_1 = \mathcal{U}_{E^\gamma}(0, \hat{C}\rho_0)$, см. (22).

Для почти всех n, т. е. при $n \geq n_1(\varepsilon_0)$, мы имеем

$$\|\varphi_n^-(t) + \varphi_n^+(t)\|_{E_n^\beta} \leq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Используя (23) мы, наконец, получаем для $n \geq \max(n_1(\varepsilon_0), n_2(\varepsilon_0))$

$$\|u_n(t) - p_n^\beta u(t, u^{n,0})\|_{E_n^\beta} \leq \|v_n(t) - p_n^\beta v^n(t)\|_{E_n^\beta} + \|u_n^* - p_n^\beta u^*\|_{E_n^\beta} \leq \varepsilon_0$$

равномерно по $0 \leq t \leq T$.

Список литературы

1. Ashyralyev A. and Sobolevskii P.E. Well-Posedness of Parabolic Difference Equations, Operator Theory Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, vol.69, 1994.
2. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука. 1967. 464 с.
4. Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их аппроксимация. М.: издательство МГУ имени М. В. Ломоносова. 2005. 287 с.
5. Kaashoek M.A., Verduyn Lunel S.M. An integrability condition on the resolvent for hyperbolicity of the semigroup. *Differential Equations.* 1994;112(2):374–406.
6. Vu Quoc Phong. A new proof and generalizations of Gearhart's theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 2007;135(no.7):2065–2072.
7. Vu Quoc Phong. The spectral radius, hyperbolic operators and Lyapunov's theorem. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998), 187–194, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 215, Dekker, New York, 2001.
8. Beyn W.-J., Piskarev S. Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.* 2008;10(1):19–42 .
9. Beyn W.-J. Numerical methods for dynamical systems. Advances in numerical analysis, Vol. I (Lancaster, 1990), 175–236, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1991.
10. Larsson S. Numerical analysis of semilinear parabolic problems. (English) Ainsworth, Mark (ed.) et al., The graduate student's guide to numerical analysis '98. Lecture notes from the 8th EPSRC summer school in numerical analysis. Leicester, GB, July 5-17, 1998. Berlin: Springer. Springer Ser. Comput. Math. 26, 83-117 (1999).
11. Larsson S., Sanz-Serna J.-M. The behavior of finite element solutions of semilinear parabolic problems near stationary points. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 1994;31(4):1000–1018.
12. Larsson S., Sanz-Serna J.-M. A shadowing result with applications to finite element approximation of reaction-diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation.* 1999;68(225): 55–72.
13. Pilyugin S.Yu. Shadowing in Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
14. Vainikko G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem). *Nonlinear Analysis.* 1978;2:647–687.
15. Piskarev S., Ovchinnikov A. Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations. World Scientific, 2023. 204 pp. ISBN: 978-981-124-892-4
16. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag – Leffler functions, related topics and applications. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer (2020).
17. Kokurin M.M. The uniqueness of a solution to the inverse Cauchy problem for a fractional differential equation in a Banach space. *Russian Mathematics.* 2013;57:16–30.
18. Popov A.Yu., Sedletskiy A.M. Distribution of the roots of the Mittag – Leffler functions. *Sovremennaja mathematica. Fundamental'nye Napravlenija.* 2011;V.40:3–171.
19. Антонюк А.В., Кочубей А.Н., Пискарев С.И. О компактности и равномерной непрерывности разрешающего семейства для уравнения с дробными производными (English summary). Доповіді Національної академії наук України, 2014, №6. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky 2014; 6:7–12.
20. Fan Z. Characterization of compactness for resolvents and its applications. *Applied Mathematics and Computation.* 2014;232:60–67.
21. Liu R., Li M., Piskarev S.I. Approximation of semilinear fractional Cauchy problem. *Applied Mathematics and Computation.* 2015;15:203–212.
22. Siegmund S., Piskarev S. Approximations of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points for fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics (NODY)* 2019;95(1):685–697.
23. Piskarev S., Siegmund S. Unstable manifolds for fractional differential equations. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications.* 2022;10(3):58–72.

24. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука. 1975. 510 с.
25. Tuan Hoang The, Siegmund Stefan, Son Doan Thai, Cong Nguyen. An instability theorem for nonlinear fractional differential systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.* 2017;22(8):3079–3090.

References

1. Ashyralyev A. and Sobolevskii PE. Well-Posedness of Parabolic Difference Equations, Operator Theory Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, vol.69, 1994.
2. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
3. Krein SG. Linear differential equations in Banach space. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. Translated from the Russian by J. M. Danskin, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 29.
4. Piskarev S. Differential equations in Banach space and thier approximation. M.: Lomonosov Moscow States University press. 2005. 287 p. (In Russ.)
5. Kaashoek MA, Verduyn Lunel SM. An integrability condition on the resolvent for hyperbolicity of the semigroup. *Differential Equations.* 1994;112(2):374–406.
6. Vu Quoc Phong. A new proof and generalizations of Gearhart's theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 2007; 135(7):2065–2072.
7. Vu Quoc Phong. The spectral radius, hyperbolic operators and Lyapunov's theorem. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998), 187–194, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 215, Dekker, New York, 2001.
8. Beyn W.-J., Piskarev S. Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.* 2008;10(1):19–42.
9. Beyn W.-J. Numerical methods for dynamical systems. Advances in numerical analysis, Vol. I (Lancaster, 1990), 175–236, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1991.
10. Larsson S. Numerical analysis of semilinear parabolic problems. (English) Ainsworth, Mark (ed.) et al., The graduate student's guide to numerical analysis '98. Lecture notes from the 8th EPSRC summer school in numerical analysis. Leicester, GB, July 5-17, 1998. Berlin: Springer. Springer Ser. Comput. Math. 26, 83–117 (1999).
11. Larsson S., Sanz-Serna J.-M. The behavior of finite element solutions of semilinear parabolic problems near stationary points. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 1994;31(4):1000–1018.
12. Larsson S, Sanz-Serna J.-M. A shadowing result with applications to finite element approximation of reaction-diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation.* 1999;68(225): 55–72.
13. Pilyugin SYu. Shadowing in Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
14. Vainikko G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem) *Nonlinear Anal.* 1978. **2**: 647–687.
15. Piskarev S., Ovchinnikov A. Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations. World Scientific, 2023. 204 pp.
16. Gorenflo R., Kilbas AA., Mainardi F., Rogosin SV. Mittag – Leffler functions, related topics and applications. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer (2020).
17. Kokurin MM. The uniqueness of a solution to the inverse Cauchy problem for a fractional differential equation in a Banach space. *Russian Mathematics.* 2013;57:16–30.
18. Popov AYu, Sedletskiy AM. Distribution of the roots of the Mittag – Leffler functions *Sovremennaja mathematica. Fundamental'nye Napravlenija.* 2011;40:3–171.
19. Antoniouk AV., Kochubei AN., Piskarev SI. On the compactness and the uniform continuity of a resolvent family for a fractional differential equation. Reports of National Academy of Sciences of Ukraine. (English summary). Доповіді Національної академії наук України, 2014, №6. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky 2014;6:7–12.
20. Fan Z. Characterization of compactness for resolvents and its applications. *Applied Mathematics and Computation.* 2014;232:60–67.
21. Liu R., Li M., Piskarev SI.: Approximation of semilinear fractional Cauchy problem. *Applied Mathematics and Computation.* 2015;15:203–212.
22. Siegmund S, Piskarev S. Approximations of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points for fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics (NODY)*, 2019;95(1):685–697.
23. Piskarev S, Siegmund S. Unstable manifolds for fractional differential equations. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications.* 2022;10(3):58 – 72.
24. Krasnosel'skiĭ MA, Zabreĭko PP. Geometrical methods of nonlinear analysis. Transl. from the Russian by Christian C. Fenske. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 263, Springer, 1984.
25. Tuan Hoang The, Siegmund Stefan, Son Doan Thai, Cong Nguyen. An instability theorem for nonlinear fractional differential systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.* 2017;22(8):3079–3090.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.01.2024
Поступила после рецензирования 20.02.2025
Принята к публикации 24.02.2025

Received January 13, 2025
Revised February 20, 2025
Accepted February 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Пискарев Сергей Игоревич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник по специальности акустика, ведущий научный сотрудник, МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey I. Piskarev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher in Acoustics, Leading Scientific Fellow, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

К содержанию