

Локализованные и локальные производные дробного порядка функций с заданным модулем непрерывности

Гринько А. П. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Барановичский государственный университет,
Беларусь, 225404, г. Барановичи, ул. Войкова, 21
agrinko_1999@yahoo.com

Аннотация. В статье рассматриваются локализованные производные типа Римана – Лиувилля, Маршо и локализованные интегралы типа Римана – Лиувилля функций с заданным модулем непрерывности. Для локализованного интеграла введён левый обратный оператор и доказана теорема о изоморфизме в гёльдеровских пространствах. Получены условия, связывающие модуль непрерывности функции, ограниченность винеровской р-вариации и выполнения условия гёльдеровости. Доказана возможность представления гёльдеровской функции в виде разности двух почти возрастающих гёльдеровской функции.

Ключевые слова: локализованная дробная производная, локальная дробная производная, модуль непрерывности функции, изоморфизм

Для цитирования: Гринько А. П. 2024. Локализованные и локальные производные дробного порядка функций с заданным модулем непрерывности. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 296–313.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-296-313

Original Research

Localized and Local Derivatives of Fractional Order of Functions with a Given Modulus of Continuity

Alexander P. Grinko 

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Baranovichi State University,
21 Voikova St., Baranovichi 225404, Belarus
agrinko_1999@yahoo.com

Abstract. The article considers localized derivatives of the Riemann – Liouville, Marchaud type and localized integrals of the Riemann – Liouville type of functions with a given modulus of continuity. For the localized integral, a left inverse operator is introduced and a theorem on isomorphism in Holder spaces is proved. Conditions are obtained that connect the modulus of continuity of a function, the boundedness of the Wiener p-variation and the fulfillment of the Holder condition. The possibility of representing a Holder function as a difference of two almost increasing Holder functions is proved.

Keywords: Localized Fractional Derivative, Local Fractional Derivative, Modulus of Continuity of a function, Isomorphism

For citation: Grinko A.P. 2024. Localized and Local Derivatives of Fractional Order of Functions with a Given Modulus of Continuity. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 296–313. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-296-313

1. Введение. В настоящей статье исследуется действие правосторонних усечённых локализованных дробных производных ([1]) типа Маршо

$$\begin{aligned} (D^{\alpha, -\varepsilon} f)(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} f \right)(x) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^{x-\delta} \frac{\phi(x) - \phi(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha}} d\tau \right) \end{aligned} \quad (1)$$

и правосторонних локализованных дробных интегралов ([2]) типа Римана – Лиувилля

$$(I^{\alpha, -\varepsilon} \phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} \phi(t) dt, \quad -\infty < a \leq x \leq b < +\infty \quad (2)$$

в пространстве функций с заданным модулем непрерывности ([3]).

В работе получены условия, связывающие модуль непрерывности функции (3), ограниченность винеровской p -вариации (12) и выполнения условия гёльдеровости (4). Доказана возможность представления гёльдеровской функции порядка λ в виде разности двух почти возрастающих гёльдеровской функции порядка λ или возможность представления гёльдеровской функции в виде разности двух монотонных ломанных и гёльдеровской функции с модулем меньшим любого сколь угодно малого ε , $\varepsilon > 0$. Для локализованного интеграла (2) введён левый обратный оператор

$$D_{[a,b]}^{\alpha,-\varepsilon} \phi(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-a}{\varepsilon} \rfloor} \left(D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon} \phi(x - \varepsilon k) \right) (x) = 0$$

и доказана теорема о изоморфизме фактор-пространства пространства $H^{\lambda}([a; b])$ по одномерному пространству, состоящему из констант и весового гёльдеровского пространства $H^{\lambda-\alpha}([a; b])$.

Целью данной работы является изучение свойств операторов локализованного дробного интегродифференцирования (1), (2) в пространствах функций с заданным модулем непрерывности. Библиографию по аналогичным результатам для операторов дробного интегродифференцирования содержит [3]. В работе обобщается известный факт, что функции с ограниченным изменением могут быть представлены в виде разности двух неубывающих функций с ограниченным изменением. Среди близких к настоящей статье работ, описывающих структуру гёльдеровских пространств, отметим работу [4] и работу [5], в которой авторы показывают, что функция имеет ограниченную p -вариацию тогда и только тогда, когда она является композицией ограниченной неубывающей функции с функцией Гельдера. В работе [6] рассматривались пространства с модулем непрерывности, удовлетворяющим условию Дини. В качестве приближающих объектов применялись гармонические в стягивающихся к кривой областях функции. Мы рассматриваем более узкие пространства, пространства, в которых модуль непрерывности содержит ненулевую степенную составляющую. Полученные результаты дополняют исследования автора в этом направлении [1, 2, 7, 8].

2. Основные результаты. Рассмотрим класс непрерывных функций с заданными модулями непрерывности или характеристиками $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)$, соответствующими разбиению $\pi = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$, $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ отрезка $[a; b]$ на конечное количество отрезков $[x_k; x_{k+1}]$, $x_{k+1} - x_k < 1$, см. [3], §13.6:

$$\omega(f, [x_k; x_{k+1}], h) = \sup_{0 < t < h} \sup_{x, x-t \in [x_k; x_{k+1}]} |f(x) - f(x-t)| \leq \omega_{x_k}^{x_{k+1}}(\pi, h) \equiv \omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h), \quad (3)$$

$\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)$ – заданные, непрерывные, неубывающие по h функции, для которых $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(0) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$. Обозначим класс функций с заданными модулями непрерывности $H^{\omega(\pi, h)}([a; b])$. В классе функций с заданными модулями непрерывности, соответствующими разбиению π , можно ввести норму:

$$\|f\|_{H^{\omega(\pi, h)}} = \max_{x \in [a; b]} |f(x)| + \sup_{\pi, h, k} \frac{\omega(f, [x_k; x_{k+1}], h)}{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}.$$

Частным случаем класса функций с заданными модулями непрерывности является класс функций с переменным порядком гёльдеровости $\lambda(x)$ и множителем $\sigma(h)$. Пусть t_k произвольная точка отрезка $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, $0 < \lambda(t_k) \leq 1$. Функция $f(x) \in H^{\lambda(x), \sigma(h)}([a; b]) \equiv H^{\lambda, \sigma}([a; b])$, если существует $\sigma(h) : [0; 1] \rightarrow R^+$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\lambda}}{\sigma(h)} = 0$, что для всех $x_k, x_{k+1} \in [a; b]$ выполнено условие

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |\sigma(h)| |h|^{\lambda}, |h| < \frac{1}{2}, \quad (4)$$

$C > 0$ – константа. В этом классе можно ввести норму:

$$\|f\|_{H^{\lambda, \sigma}} = \|f\| + \sup_{\substack{x, x+h \in [a; b] \\ |h| < 0,5}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|\sigma(h)| |h|^{\lambda}}.$$

В работах [7], [8] были получены следующие результаты.

Теорема 2.1. Пусть $x \in [a + 2\varepsilon, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство

$$(I^{\alpha,-\varepsilon} D^{\alpha,-\varepsilon} f)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(I^{\alpha,-\varepsilon} D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon} f \right) (x) = \phi(x) - \int_0^1 K(s, \alpha) f(x - \varepsilon - \varepsilon s) ds,$$

где $\int_0^1 K(s, \alpha) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 s^{\alpha-1} ds + \int_0^1 \frac{s^{-\alpha-s\alpha}}{s+1} ds \right) = 1$ имеет место поточечно для $\phi(x) \in H^{\lambda}([a; b])$, $0 < \alpha < \lambda < 1$ и почти всюду для $\phi(x) \in L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2.2. Пусть функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = I^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x)$, тогда для любого $x \in [a + 2\varepsilon, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство

$$(D^{\alpha, -\varepsilon} f)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} f)(x) = \phi(x) - \phi(x - \varepsilon), 0 < \delta < \varepsilon,$$

имеет место поточечно для $\phi(x) \in H^{\lambda}(a; b)$, $0 < \alpha < \lambda < 1$ и почти всюду для $\phi(x) \in L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2.3. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Интегральное уравнение

$$I^{\alpha, -\varepsilon} (D^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x))(x) = \phi(x) - \int_0^1 K(s, \alpha) f(x - \varepsilon - \varepsilon s) ds = 0$$

где

$$\int_0^1 K(s, \alpha) ds = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 s^{\alpha-1} ds + \int_0^1 \frac{s^{\alpha} - s^{-\alpha}}{s+1} ds \right) = 1,$$

в пространстве $H^{\lambda}(a; b)$, для $a > -\infty$, имеет единственное решение $\phi(x) \in H^{\lambda}(a; b)$, заданное следующими рекуррентными соотношениями:

1. $a < x < a + 2\varepsilon$, $\phi(x) = \phi_0(x)$ – задана произвольно;
2. $a + 2\varepsilon < x < a + 3\varepsilon$,

$$\phi(x) = \phi_1 = \int_0^1 \frac{\tau^{\alpha-1} \phi_0(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} + \int_0^1 \frac{(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}) \phi_0(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha) (\tau + 1)};$$

...

$n. n > 2, a + n\varepsilon < x < b$,

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi_{n-1}(x) = & \int_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{\tau^{\alpha-1} \phi_{n-3}(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} + \int_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}) \phi_{n-3}(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha) (\tau + 1)} + \\ & + \int_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{\tau^{\alpha-1} \phi_{n-2}(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} + \int_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}) \phi_{n-2}(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha) (\tau + 1)}. \end{aligned}$$

Введём в пространстве функций с заданными модулями непрерывности порядок гёльдеровости. Если

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(t)|}{x - t} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(t)| - |f(x) - f(x)|}{x - t} = 0,$$

для всех $x \in (x_k, x_{k+1})$, то производные по t функции $|f(x) - f(t)|$ равны нулю и, следовательно, $f(x) = \text{const}$, на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Если

$$\lim_{t \rightarrow x_+} \frac{|f(t) - f(x)|}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x_-} \frac{|f(x) - f(t)|}{x - t} = \text{const} > 0,$$

для всех $x \in (x_k, x_{k+1})$, то односторонние производные по t функции $|f(x) - f(t)|$ в точке x равны константе, и следовательно, $|f(x) - f(t)| = \text{const} |x - t|$, т. е. липшицевы на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Если функция $f(x)$ -непрерывна, но

$$\lim_{t \rightarrow x_+} \frac{|f(t) - f(x)|}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x_-} \frac{|f(x) - f(t)|}{x - t} = +\infty.$$

Тогда существует $h < 1, N > 1$, такие, что для всех $|t - x| < h$ выполняется:

$$\frac{|f(t) - f(x)|}{t - x} > N, t > x \text{ или } \frac{|f(x) - f(t)|}{x - t} > N, t < x.$$

Поэтому имеем:

$$\log_{|t-x|} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t-x|} < \log_{|t-x|} N, \lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| \leq 1.$$

По предположению $0 < |f(x) - f(t)| \leq 1$, следовательно получаем:

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| \leq 1. \quad (5)$$

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция. В случае, если выполнено условие (5), в качестве порядка гёльдеровости $\lambda_a^b(x)$ в точке $x \in [a; b]$ можно взять

$$\lambda_a^b(x) = \lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)|. \quad (6)$$

Определённый в (6) порядок гёльдеровости в точке x означает, что поскольку

$$|f(t) - f(x)| \leq \frac{\sigma_{\min(t;x)}^{\max(t;x)} (|t-x|)}{|t-x|^{\lambda_x^t(x)}} |t-x|^{\lambda_x^t(x)}, \quad x, t \in [a; b],$$

множитель $\frac{\sigma_{\min(t;x)}^{\max(t;x)} (|t-x|)}{|t-x|^{\lambda_x^t(x)}}$ может стремиться к бесконечности, но $\lim_{t \rightarrow x} \frac{\sigma_{\min(t;x)}^{\max(t;x)} (|t-x|)}{|t-x|^{\lambda_x^t(x)}} |t-x|^\varepsilon = 0$, для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow x_+} \log_{t-x} |f(t) - f(x)| = \lim_{t \rightarrow x_+} \log_{t-x} \omega_x^t(t-x), \quad \lim_{t \rightarrow x_-} \log_{x-t} |f(x) - f(t)| = \lim_{t \rightarrow x_-} \log_{x-t} \omega_t^x(x-t),$$

то в качестве порядка гёльдеровости $\lambda_a^b(x)$, $x \in [a; b]$ можно взять

$$\lambda_a^b(x) = \min \left(\lim_{h \rightarrow 0, x+h \in [a;b]} \log_h \omega_x^{x+h}(h); \lim_{h \rightarrow 0, x-h \in [a;b]} \log_h \omega_{x-h}^x(h) \right). \quad (7)$$

По предположению $\omega_x^t(t-x) \leq 1$, следовательно, получаем:

$$0 \leq \min \left(\lim_{t \rightarrow x_-} \log_{t-x} \omega_x^t(t-x), \lim_{t \rightarrow x_+} \log_{x-t} \omega_t^x(x-t) \right);$$

$$\log_{t-x} \omega_x^t(t-x), \log_{x-t} \omega_t^x(x-t) \leq 1, |t-x| < h. \quad (8)$$

Пусть на некотором отрезке $[x_k; x_{k+1}] \subset [a; b]$, $0 < c < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x) \leq 1$, $x \in [x_k; x_{k+1}]$. Из определения порядка гёльдеровости $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x)$, имеющего множитель в точке (7), следует, что для любого выбора точек x_k, x_{k+1} , существует такое ε , $0 < \varepsilon < c$, для которого можно ввести кусочно постоянный порядок гёльдеровости на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$:

$$\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x) - \varepsilon > 0.$$

Лемма 2.1. Пусть $\lambda_a^b = \inf_{x \in [a;b]} \lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| > c > 0$. Тогда класс $H^{\omega(h)}([a, b]) \subset H^{\lambda_a^b - \varepsilon}([a, b])$, для любого ε , $0 < \varepsilon < c$.

Доказательство. Действительно, если $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x)$, то для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такой $x \in [x_k; x_{k+1}]$, что $\lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1$, т. е. существует такая последовательность $\{t_n\} \in [x_k; x_{k+1}]$, что $\lim_{t_n \rightarrow x} \log_{|t_n-x|} |f(t_n) - f(x)| = \lambda$, $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \lambda < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1$. Далее, для всех достаточно малых ε_2 таких, что $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} > \varepsilon_2 > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n, n > n_0$ будет выполняться:

$$\left| \log_{|x-t_n|} |f(x) - f(t_n)| - \lambda \right| < \varepsilon_2;$$

$$|x - t_n|^{\lambda + \varepsilon_2} < |f(x) - f(t_n)| < |x - t_n|^{\lambda - \varepsilon_2}.$$

Если последнее неравенство выполнено для всех точек $t_n, n > n_0$, в которых график функции $f(x)$ приближается на минимальное расстояние к графикам функций $\pm |x - t|^{\lambda - \varepsilon_2}$, оставаясь внутри площади, ограниченной сверху $|x - t|^{\lambda - \varepsilon_2}$ и снизу $-|x - t|^{\lambda + \varepsilon_2}$, то и для всех $t, |x - t| < \delta, 0 < \delta < |x - t_{n_0}|$ будет иметь место:

$$|f(x) - f(t)| < |x - t|^{\lambda_{k+1} - \varepsilon_2}. \quad (9)$$

Класс $H^{\omega(h)h^{\frac{\varepsilon}{2}}}([a, b])$ компактен в $H^{\omega(h)}([a, b])$. Действительно, по предположению класс $H^{\omega(h)h^{\frac{\varepsilon}{2}}}([a, b])$ равномерно ограничен $0 \leq |f(x)| \leq 1, x \in [a; b]$ и равномерно непрерывен. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $f(x) \in H^{\omega(h)h^{\frac{\varepsilon}{2}}}([a, b])$, $|f(x_2) - f(x_1)| \leq \omega_a^b(x_2 - x_1) < \varepsilon_1, x_1, x_2 \in [a; b], |x_2 - x_1| < \delta$. Следовательно, по теореме Арцела класс $H^{\omega(h)}([a, b])$ предкомпактен в пространстве непрерывных функций, а значит полон и компактен (см., [9] стр. 173) в $H^{\omega(h)}([a, b])$. Поэтому δ может быть выбрано независимо от $x \in [x_k; x_{k+1}]$. Следовательно, функция гёльдерова порядка $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_2$ с константой равной единице на отрезках $[x; x + \delta], [x + \delta; x]$, а значит с константой $C_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{\delta}$ на

всём $[x_k; x_{k+1}]$. Поэтому δ может быть выбрано независимо от $x \in [x_k; x_{k+1}]$. Следовательно, функция Гёльдера порядка $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_2$ с константой равной единице на отрезках $[x; x + \delta]$, $[x + \delta; x]$, а значит с константой $C_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{\delta}$ на всём $[x_k; x_{k+1}]$.

Оценка (9) имеет место и для $\omega_x^t(t-x)$, $\omega_t^x(x-t)$. Если $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \lambda(x)$, где $\lambda(x)$ вычисляется по формуле (7), то для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $x \in [x_k; x_{k+1}]$ такой, что

$$\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \min \left(\lim_{h \rightarrow 0, x, x+h \in [x_k; x_{k+1}]} \log_h \omega_x^{x+h}(h); \lim_{h \rightarrow 0, x, x-h \in [x_k; x_{k+1}]} \log_h \omega_x^x(h) \right) < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1.$$

Т. е. всегда существует такая последовательность $\{h_n\} \in [0; x_{k+1} - x_k]$, что

$$\min \left(\lim_{h_n \rightarrow 0, x, x+h_n \in [x_k; x_{k+1}]} \log_{h_n} \omega_x^{x+h_n}(h_n); \lim_{h_n \rightarrow 0, x, x-h_n \in [x_k; x_{k+1}]} \log_{h_n} \omega_x^x(h_n) \right) = \lambda_k, \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \lambda_k < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1.$$

Далее, для всех достаточно малых ε_2 таких, что $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} > \varepsilon_2 > 0$, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n, n > n_0$ будет выполняться:

$$\left| \min \left(\log_{h_n} \omega_x^{x+h_n}(h_n); \log_{h_n} \omega_x^x(h_n) \right) - \lambda_k \right| < \varepsilon_2;$$

$$h_n^{\lambda_k + \varepsilon_2} < \max \left(\omega_x^{x+h_n}(h_n); \omega_x^x(h_n) \right) < h_n^{\lambda_k - \varepsilon_2}.$$

Если последние неравенства выполнены для всех точек $h_n, n > n_0$, в которых график функций $\omega_x^{x+t}(t)$, $\omega_x^x(t)$ приближается на минимальное расстояние к графикам функций $\pm t^{\lambda_k - \varepsilon_2}$, оставаясь внутри площади, ограниченной сверху $t^{\lambda_k - \varepsilon_2}$ и снизу $-t^{\lambda_k + \varepsilon_2}$, то и для всех $t, |x-t| < \delta, 0 < \delta < |x-t_{n_0}|$ будет иметь место:

$$\max \left(\omega_x^{x+h_n}(h_n); \omega_x^x(h_n) \right) < h_n^{\lambda_k - \varepsilon_2}.$$

Следовательно, на отрезках $[x_k; x_{k+1}] \subset [a; b]$ функции $\frac{\omega_x^{x+t}(t)}{t^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_k}}, \frac{\omega_x^x(t)}{t^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_k}}, k = \overline{1; n-1}$ непрерывны и равномерно ограничены. Имеет место следующее свойство:

$$\begin{aligned} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| &\leq \omega_{x_k}^{x_{k+1}}(t_{k+1} - t_k) \leq \max_{h \in [0; t_{k+1} - t_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}} \right\} h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon} \\ &\leq \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \left(\max_{h \in [0; t_{k+1} - t_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}} \right\} \right) |t_{k+1} - t_k|^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon} = C_{x_k}^{x_{k+1}} |t_{k+1} - t_k|^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}, \\ C_{x_k}^{x_{k+1}} &= \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \left(\max_{h \in [0; t_{k+1} - t_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}} \right\} \right) < \infty, t_k, t_{k+1} \in [x_k; x_{k+1}], \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} > \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим винеровскую вариацию с переменной экспонентой $p(x)$, введённую в работе [10].
Определение 2.1. Пусть $f(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) : [a; b] \rightarrow [1, \infty)$, π – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$ точками $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ вместе с произвольным выбором точек $t_k, x_k \leq t_k \leq x_{k+1}, k = \overline{1, N}$. Функция $f(x)$ называется функцией с ограниченным винеровским изменением с переменным показателем степени $p(x)$ на отрезке $[a; b]$, если существует такая константа $C > 0$, что выполнено неравенство:

$$\sum_{k=0}^N |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(t_k)} \leq C. \quad (11)$$

Определение 2.2. Пусть $f(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) : [a; b] \rightarrow [1, \infty)$, π – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$ точками $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ вместе с произвольным выбором точек $t_k, x_k \leq t_k \leq x_{k+1}, k = \overline{1, N}$. Точная верхняя грань сумм (12) по всевозможным конечным разбиениям π отрезка $[a; b]$ называется полным винеровским изменением с переменным показателем степени $p(x)$ (винеровской вариацией с переменной экспонентой $p(x)$) и обозначается

$$V_a^{b, p(x)}[f] = \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N |f(x_k) - f(x_{k+1})|^{p(t_k)} \right). \quad (12)$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что функции равномерно ограничены, т. е. $0 \leq f(x) \leq 1$ и $|b-a| \leq 1$. Если $f(x) = \text{const}$ такие условия не выполняются, то можно рассмотреть функцию $\bar{f}(x)$, где $\bar{f}(t) = f^*(t) - \min_t f^*(t)$, $f^*(t) = \frac{f(t)}{\max_t f(t) - \min_t f(t)}$, $t = \frac{x}{b-a}$, поскольку в неравенстве Гёльдера (4) для преобразованных функций значение множителя $\sigma(h)$ изменится на константу.

Для полной вариация порядка $p(x)$ имеют место следующие свойства:

$$1) V_a^{b,p(x)} [f - const] = V_a^{b,p(x)} [f], \quad (13)$$

$$2) V_a^{b,p(x)} [Af] \leq \begin{cases} \sup_{A^{x \in [a,b]}} p(x) V_a^{b,p(x)} [f], A \geq 1, \\ \inf_{A^{x \in [a,b]}} p(x) V_a^{b,p(x)} [f], A < 1. \end{cases} \quad (14)$$

$$3) \text{ Если } f(x) \in V_a^{b,p(x)}, \text{ то } V_a^{b,p_1(x)} [f] \leq V_a^{b,p(x)} [f], 1 \leq p(x) \leq p_1(x). \quad (15)$$

$$4) \text{ Если } V_a^{b,p(x)} [f^{p_0}] < +\infty, 1 \leq p(x) < +\infty, \text{ то } V_a^{b,p(x)} [f^{p_1}] \leq V_a^{b,p(x)} [f^{p_0}], 0 \leq f(x) \leq 1, 1 \leq p_0 \leq p_1. \quad (16)$$

$$5) \text{ Если } V_a^{b,p(x)} [f^{p_0}] < +\infty, 1 \leq p(x), p_0 < +\infty, \text{ то } V_a^{b,p_0 p(x)} [f] < +\infty. \quad (17)$$

$$6) V_a^{b,p(x)} [f_1 + f_2] \geq V_a^{b,p(x)} [f_1] + V_a^{b,p(x)} [f_2], V_a^{b,p(x)} [f_1 - f_2] \leq V_a^{b,p(x)} [f_1] + V_a^{b,p(x)} [f_2]. \quad (18)$$

7) Если $f(x)$ – непрерывная и кусочно монотонная функция на $[a; b]$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_N = b$ – не более чем счётное число всех точек локальных экстремумов, $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 1, k = \overline{0; N-1}, N \leq +\infty$, то

$$V_a^{b,p(x)} [f] = \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x)}, 1 \leq p(x). \quad (19)$$

Также в работе [5] были получены свойства:

8) $V_a^{b,p(x)} [f]$ – неотрицательная неубывающая функция;

$$9) |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x)} \leq V_a^{b,p(x)} [f], x_{k+1}, x_k \in [a, b], x \in [x_k, x_{k+1}];$$

$$10) V_a^{b,p(x)} [f] + V_b^{c,p(x)} [f] \leq V_a^{c,p(x)} [f], a \leq b \leq c.$$

Обозначим $p(t_k) = p(x_k; x_{k+1}), t_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Имеют место неравенства:

$$|a^p - b^p| \geq |a - b|^p, b, a \geq 0, p \geq 1; \quad (20)$$

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p, b, a \geq 0, p \geq 1; \quad (21)$$

$$|a|^p + |b|^p \geq |a - b|^p, ab \geq 0, p \geq 1. \quad (22)$$

Доказательство свойства (15):

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p_1(x_k; x_{k+1})} \leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})}.$$

Доказательство (16):

$$\begin{aligned} |f(x_{k+1})^{p_0} - f(x_k)^{p_0}| &= \left| \int_0^{f(x_{k+1})} \frac{t^{p_0-1}}{p_0} dt - \int_0^{f(x_k)} \frac{t^{p_0-1}}{p_0} dt \right| = \left| \int_{f(x_k)}^{f(x_{k+1})} \frac{t^{p_0-1}}{p_0} dt \right| \geq \left| \int_{f(x_k)}^{f(x_{k+1})} \frac{t^{p_1-1}}{p_1} dt \right| = \\ &= |f(x_{k+1})^{p_1} - f(x_k)^{p_1}|, 0 \leq f(x_k), f(x_{k+1}) \leq 1, 1 \leq p_0 \leq p_1. \end{aligned}$$

Доказательство (17). Из неравенства (21) следует, что

$$\left| \overline{f}^{p_0}(x_{k+1}) - \overline{f}^{p_0}(x_k) \right|^{p(x_1, x_2)} \geq \left| \overline{f}(x_{k+1}) - \overline{f}(x_k) \right|^{p_0 p(x_1, x_2)}.$$

Доказательство (18). Из неравенства (21) следует, что

$$\begin{aligned} |(f_1(x_{k+1}) + f_2(x_{k+1})) - (f_1(x_k) + f_2(x_k))|^{p(x_k; x_{k+1})} &= ((f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)) + \\ &+ (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)))^{p(x_k; x_{k+1})} \geq (f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^{p(x_k; x_{k+1})} + (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k))^{p(x_k; x_{k+1})}. \end{aligned}$$

т. е. $V_a^{b,p(x)} [f_1 + f_2] \geq V_a^{b,p(x)} [f_1] + V_a^{b,p(x)} [f_2]$. Из неравенства (22) следует, что

$$\begin{aligned} |(f_1(x_{k+1}) - f_2(x_{k+1})) - (f_1(x_k) - f_2(x_k))|^{p(x_k; x_{k+1})} &= ((f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)) - \\ &- (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)))^{p(x_k; x_{k+1})} \leq (f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^{p(x_k; x_{k+1})} + (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k))^{p(x_k; x_{k+1})}. \end{aligned}$$

т. е. $V_a^{b,p(x)} [f_1 - f_2] \leq V_a^{b,p(x)} [f_1] + V_a^{b,p(x)} [f_2]$.

Доказательство (19). Покажем, что если функция непрерывная и кусочно монотонна на отрезках $[x_k; x_{k+1}]$, то винеровская вариация по всему отрезку $[a; b]$ равна сумме винеровских вариаций по отрезкам $[x_k; x_{k+1}]$. Пусть в точке $c \in [a; b]$ функция $f(x)$ имеет единственный локальный экстремум на отрезке $f(x)$, тогда $|f(c) - f(a)|^p + |f(c) - f(b)|^p \geq |f(x) - f(a)|^p$, т. к. либо $|f(c) - f(a)|^p \geq |f(x) - f(a)|^p$, либо $|f(c) - f(b)|^p \geq |f(x) - f(a)|^p$. Следовательно, разбиение π всегда содержит точки локальных экстремумов и наоборот внутри промежутков монотонности разбиение π не содержит точек. Поскольку если $f(x)$ -монотонная на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, $d \in [x_k; x_{k+1}]$, то из свойства (21) следует

$$\begin{aligned} & |f(d) - f(x_k)|^{p(x_k;d)} + |f(x_{k+1}) - f(d)|^{p(d;x_{k+1})} \leq \\ & \leq |f(d) - f(x_k)|^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})} + |f(x_{k+1}) - f(d)|^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})} \leq \\ & \leq \left(|f(d) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(d)| \right)^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})} \leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})}. \end{aligned}$$

Значит разбиение π не будет содержать точек монотонности. Следовательно $\pi = \{x_k, k = \overline{0; N-1}\}$.

Для функций $f(x)$ из пространства $H^{\omega(x)}([a; b])$ с $\lambda_a^b > c > \varepsilon > 0$ рассмотрим винеровскую вариацию с переменной экспонентой $p(x) \geq 1$. Пусть $\pi : a = x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ -произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Учитывая (8) и свойство $\frac{1}{\log_h \omega(h)^{-\varepsilon}} = \frac{\log_h h}{\log_h \omega(h)^{-\varepsilon}} = \log_{\omega(h)h^{-\varepsilon}} h$, введём переменную экспоненту:

$$p(x) = \max \left(\overline{\lim}_{t \rightarrow x-} \log_{\omega_x^t} (t-x)^{(t-x)^{-\varepsilon}} (t-x), \overline{\lim}_{t \rightarrow x+} \log_{\omega_x^t} (x-t)^{(x-t)^{-\varepsilon}} (x-t) \right), 1 \leq p(x) < \infty, x \in [a; b].$$

Из свойства (13) следует, что $V_a^{b,p(x)} [const] = 0$. Если $f(x) = const$, то $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) = 0$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, и $p(x_k) = \log_{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k)}(x_{k+1} - x_k)$ не определено. В тоже время $|f(x_k) - f(x_{k-1})|^{p(x)} = 0$, для любого $p(x) > 0$. Поскольку для константы $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) \leq |x_{k+1} - x_k|$, то $\log_{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k)}(x_{k+1} - x_k) \leq \log_{(x_{k+1} - x_k)}(x_{k+1} - x_k) = 1$ и $p(x)$ примем равным единице. Можно также при вычислении $V_a^{b,p(x)} [f(x)]$ вместо функции $f(x)$ рассматривать функцию $\bar{f}(x)$ с уменьшенной областью определения на интервалы $[x_k, x_{k+1}]$, для которых $f(x) = const$.

Лемма 2.2. Пусть для произвольного разбиения $\pi : a = x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ $f(x) \in H^{\omega(x)}([a; b])$ с заданными модулями непрерывности $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)$ и с $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x) = \min_{x+h, x-h \in [x_k; x_{k+1}]} \left(\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \log_h \omega_x^{x+h}(h); \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \log_h \omega_x^{x-h}(h) \right)$, $h > 0$, $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x)$, $0 < c \leq \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}$. Тогда, для всех ε , удовлетворяющих условиям $0 < \varepsilon < c$, функции $f(x)$ имеют ограниченную винеровскую вариацию кусочно переменного порядка $p(t_k) = p_{x_k}^{x_{k+1}}(t_k) = p_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}$, $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$ вида:

$$V_a^{b,p(x)} [f] = \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(t_k)} \right) = \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right), t_k \in [x_k; x_{k+1}].$$

Доказательство. Из оценки (10) имеем:

$$\begin{aligned} V_a^{b,p(x)} [f] &= \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(t_k)} \right) \leq \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N \left(C_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x_k)^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right) = \\ &= (b-a) \sup_{\pi} \left(\max_{k=1, n-1} \left(C_{x_k}^{x_{k+1}} \right)^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right) = (b-a) \sup_{\pi} \left(\max_{k=1, n-1} \left(\max_{h \in [0; x_{k+1} - x_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right\} \right)^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right) \leq \\ &\leq (b-a) \sup_{\pi} \left(\max_{k=1, n-1} C_{x_k}^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right) < \infty, \varepsilon < c. \end{aligned} \quad (23)$$

Следующая лемма показывает, что для непрерывных функций ограниченность винеровской вариации с переменным порядком $p(x) \geq 1$ совпадает с принадлежностью пространству $H^{\omega}([a; b])$ с характеристиками $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) = V_{x_k}^{x_{k+1}, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x)}}$ и кусочно постоянным порядком вариации $p(x) = p_{x_k}^{x_{k+1}} = \sup_{t \in [x_k; x_{k+1}]} (p(t))$.

Лемма 2.3. Если непрерывная функция $f(x)$ имеет ограниченную винеровскую вариацию с переменным непрерывным порядком $p(x)$, $1 \leq p(x) \leq P < \infty$, то $f(x) \in H^{\omega}([a; b])$. Для любых $x_{k+1}, x_k \in [a, b]$ непрерывные, монотонные характеристики $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k)$ на отрезках $[x_k; x_{k+1}]$ могут быть вычислены

по формуле $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) = V_{x_k}^{x_{k+1}, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(z)}}$. Переменный порядок гёльдеровости функции $f(x)$ в точке x равен $\frac{1}{p(x)}$.

Доказательство. Покажем, что из непрерывности $f(x)$ следует непрерывность винеровской вариации $\phi(x) = V_a^{x, p(x)} [f]$ на $[a, b]$. Предположим противное, $f(x)$ имеет разрыв в точке x . В силу ограниченности $f(x)$ это разрыв первого рода. Для определённости будем считать, что $V_a^{y, p(x)} [f] = T$, тогда имеем:

$$\lim_{x \rightarrow y-} V_a^{x, p(x)} [f] = M > 0, M < T.$$

Т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $x, y - \delta < x < y$ одновременно будет выполняться

$$V_a^{x, p(x)} [f] \leq M, f(y) - f(x) < \varepsilon.$$

Тогда можем записать:

$$V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] \geq T - M > \varepsilon. \quad (24)$$

С другой стороны, если $V_a^{y, p(x)} [f] = T$, то для $\varepsilon > 0$, существует такое конечное разбиение $\pi = \{x_i\}$, $i = 1, N$, $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = y$ и такой выбор $t_k, x_k \leq t \leq x_{k+1}, p(t_k) = p(x_k; x_{k+1})$, что

$$V_a^{y, p(x)} [f] \leq \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})} + \varepsilon \leq T + \varepsilon.$$

В случае, если $x_{N-1} > y - \delta$, возьмём $x = x_{N-1}$, имеем:

$$\begin{aligned} V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x_{N-1}, p(x)} [f] &\leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})} - V_a^{x_{N-1}, p(x)} [f] = \\ &= \varepsilon + \sum_{k=0}^{N-2} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})} + |f(y) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} - V_a^{x_{N-1}, p(x)} [f] + \\ &+ |f(y) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} - V_a^{x_{N-1}, p(x)} [f] = \varepsilon + |f(y) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} \leq \varepsilon + \varepsilon^{\min_{x \in [a, b]} p(x)} \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $x_{N-1} < y - \delta$. Тогда учитывая, что $V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] \geq 0$, $||a| - |b|| \leq |a - b|$, существует $\delta > 0$, такое, что если $y - x < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\max_{x \in [x_{N-1}, x], y \in [x_{N-1}, y]} |p(x_{N-1}; y) - p(x_{N-1}; x)| < \varepsilon$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] &\leq \\ V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] &\leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{N-2} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})} + |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; x)} + \\ &+ |f(y) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} - |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} + |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} - \\ &- |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; x)} - V_a^{x, p(x)} [f] \leq \varepsilon + V_a^{x, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] + p(x_{N-1}; y) |f(y) - f(x)| \times \\ &\times (|f(x) - f(x_{N-1})| + \theta_1 (|f(y) - f(x_{N-1})| - |f(x) - f(x_{N-1})|))^{p(x_{N-1}; y)-1} + \\ &+ |p(x_{N-1}; y) - p(x_{N-1}; x)| |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; x) + \theta_1 (p(x_{N-1}; y) - p(x_{N-1}; x))} \leq \varepsilon + \varepsilon 2^{p-1} + \varepsilon 1^1. \end{aligned} \quad (26)$$

Полученные противоречия в неравенствах (24), (25) или (24), (26) показывают, что функция $\phi(x) = V_a^{x, p(x)} [f]$ непрерывна.

Из леммы 2 работы [5] следует, что $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq V_{x_k}^{x_{k+1}, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x_{k+1}, x_k)}}$ для любого порядка $p(x_{k+1}, x_k) = p(z)$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$. В качестве характеристики, т. е. непрерывной по $h > 0$, неотрицательной, монотонной на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ функции возьмём $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h) \equiv V_{x_k}^{x_k+h, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x_{k+1}, x_k)}}$. Из леммы 4.2 [5] следует, что $f(x) = g(\phi(x))$, где $\phi(x) = V_{x_k}^{x, p(x)} [f]$ ограниченная неотрицательная неубывающая функция, а $g(y) \in H^{\frac{1}{p(x_{k+1}, x_k)}}([\phi(x_k), \phi(x_{k+1})])$. Поскольку $\phi(x)$ непрерывна, т. е. гёльдера порядка $\theta(x)$, $0 \leq \theta(x) \leq 1$, а $g(y)$ гёльдера порядка $\frac{1}{p(x_{k+1}, x_k)}$, то из [9] следует, что порядок гёльдеровости композиции $g(\phi(x)) = f(x)$ равен произведению $\frac{1}{p(x_k; x_{k+1})} \theta(x) \leq \frac{1}{p(x_k; x_{k+1})}$. С другой стороны, поскольку мы показали, что $V_x^{y, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x; y)}}$ – характеристика, то из леммы 2.2 оценка (23) следует, что для полного винеровского изменения имеет место оценка:

$$V_x^{y, p(x)} [f] \leq G(y - x),$$

а значит

$$V_x^{y,p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x;y)}} \leq G^{\frac{1}{p(x;y)}} (y-x)^{\frac{1}{p(x;y)}} \leq C |y-x|^{\frac{1}{p(x;y)}}.$$

Т. е. переменный порядок гёльдеровости больше либо равен $\frac{1}{p(x;y)}$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет порядок гёльдеровости $\frac{1}{p(x;y)}$. Лемма доказана.

Поскольку неограниченное изменение даёт осцилляция функции с модулем меньшим любого наперёд заданного числа, то введём понятие почти монотонной функции.

Определение 2.3. Функция $f(x, \varepsilon) \in D(f), E(f) \subset R$ называется почти возрастающей (почти убывающей) с показателем ε , если $f(x_1, \varepsilon) - f(x_2, \varepsilon) \leq \varepsilon, (f(x_2, \varepsilon) - f(x_1, \varepsilon) \leq \varepsilon)$ для $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D(f)$.

Лемма 2.4. Если функция $f(x)$ имеет ограниченную винеровскую вариацию с переменной экспонентой $p(x), 1 \leq p(x)$ на отрезке $[a; b]$, то функцию $f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ можно представить в виде разности двух почти неубывающих функций с показателем ε .

Доказательство. Построим для любой функции с ограниченным винеровским изменением $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ почти возрастающие функции $f_1(x, \varepsilon) = f_1(x), f_2(x, \varepsilon) = f_2(x)$, для которых $V_a^{x,p(x)} [f_1], V_a^{x,p(x)} [f_2] < \infty$ и $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. По определению, если функция имеет ограниченную винеровскую вариацию, то для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое конечное разбиение $\pi : a = x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_N = b$ и такой выбор точек $t_i \in [x_i; x_{i+1}]$, что

$$V_a^{x,p(x)} [f] - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|^{p(t_i)} \leq V_a^{x,p(x)} [f]. \quad (27)$$

Для того, чтобы при переходе к соседнему интервалу знаки $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ и $f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})$ были различны, объединим соседние интервалы, если $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ и $f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})$ имеют одинаковый знак. В силу свойства (21), новая сумма $\sum_{i=1}^{M-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|^{p(t_i)}$ не уменьшится и неравенство (27) будет иметь место. Полученное разбиение обозначим $\pi' : a = x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_M = b, M \leq N$. Для определённости будем считать, что $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$. Рассмотрим последовательность функций

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(x) &= f(x_1) - (f(x) - f(x_1)) = 2f(x_1) - f(x), x \in [a; b]; \\ \bar{f}_2(x) &= \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1; x_2], \\ 2f_1(x_2) - \bar{f}_1(x), x \in [x_2; b]; \end{cases} = \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1; x_2], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x), x \in [x_2; b]; \end{cases} \\ \bar{f}_3(x) &= \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1; x_2], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x), x \in [x_2; x_3], \\ 2(2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)) - 2f(x_1) + 2f(x_2) - f(x), x \in [x_3; b]; \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1; x_2], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x), x \in [x_2; x_3], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + 2f(x_3) - f(x), x \in [x_3; b]; \end{cases} \end{aligned}$$

и т. д.

$$\bar{f}_k(x) = \begin{cases} \bar{f}_{k-1}(x), x \in [x_1; x_k], \\ 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) + (-1)^k f(x), x \in [x_k; b]; \end{cases}$$

и т. д.

$$\bar{f}_{M-1}(x) = \begin{cases} \bar{f}_{M-2}(x), x \in [x_1; x_{M-1}], \\ 2 \sum_{j=1}^{M-1} (-1)^{j+1} f(x_j) - (-1)^{M-1} f(x), x \in [x_{M-1}; b]. \end{cases} \quad (28)$$

Покажем, что $\bar{f}_{M-1}(x)$ – почти возрастающая. На частичных отрезках разбиения π' не может быть локального максимума в точке $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$, для которого $f(t_k) > \max(f(x_k); f(x_{k+1})) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf_{t \in [x_k; x_{k+1}]} p(t)}}$, или локального минимума, для которого $f(t_k) < \min(f(x_k); f(x_{k+1})) - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf_{t \in [x_k; x_{k+1}]} p(t)}}$. В противном случае добавляя точку t_k к разбиению π мы увеличим $V_a^{b,p(x)} [f_{N-1}]$ более чем на ε . Действительно, пусть t_k локальный максимум на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ и $\max(f(x_k); f(x_{k+1})) = f(x_{k+1})$, тогда, используя оценку (21) и учитывая то, что $0 < |f(x)| < 1$, можем записать:

$$\begin{aligned} &|f(t_k) - f(x_k)|^{\inf_{t \in [x_k; t_k]} p(t)} + |f(t_k) - f(x_{k+1})|^{\inf_{t \in [t_k; x_{k+1}]} p(t)} - |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\inf_{t \in [x_k; x_{k+1}]} p(t)} = \\ &= (f(t_k) - f(x_{k+1}) + f(x_{k+1}) - f(x_k))^{\inf_{t \in [x_k; t_k]} p(t)} + (f(t_k) - f(x_{k+1}))^{\inf_{t \in [t_k; x_{k+1}]} p(t)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (f(x_{k+1}) - f(x_k))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} \geq (f(x_{k+1}) - f(x_k))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} + (f(t_k) - f(x_{k+1}))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} + \\
& + (f(t_k) - f(x_{k+1}))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} - (f(x_{k+1}) - f(x_k))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} = 2(f(t_k) - f(x_{k+1}))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} > \varepsilon.
\end{aligned}$$

Доказательство для минимума аналогично. Мы доказали, что $\bar{f}_{N-1}(x)$ – почти возрастающая с показателем $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}$. Покажем, что $f_1(x) = \bar{f}_{N-1}(x) - f(x)$ – почти возрастающая с показателем $2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}} > 0$. Используя представление (28), для $t_1 < t_2, t_1, t_2 \in [x_k; x_{k+1}]$ имеем:

$$\begin{aligned}
f_1(t_1) - f_1(t_2) &= \bar{f}_k(t_1) - f(t_1) - \bar{f}_k(t_2) + f(t_2) = 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) + (-1)^k f(t_1) - \\
& - 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) - (-1)^k f(t_2) - f(t_1) + f(t_2) = (f(t_2) - f(t_1)) \left(1 - (-1)^k\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, $f_1(t_1) - f_1(t_2) = 0$, для промежутков $[x_k; x_{k+1}]$, где $f(t)$ почти возрастает и $f_1(t_1) - f_1(t_2) = 2(f(t_2) - f(t_1)) \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}$, для промежутков, где $f(t)$ почти убывает. Окончательно, $f_1(t_1) - f_1(t_2) \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}$, т. е. $f_1(t)$ – почти возрастающая с показателем $2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}$. Пусть $t_1 < t_2, t_1 \in [x_s; x_{s+1}], t_2 \in [x_k; x_{k+1}], s < k$, тогда можем записать:

$$\begin{aligned}
f_1(t_1) - f_1(t_2) &= \bar{f}_s(t_1) - f(t_1) - \bar{f}_k(t_2) + f(t_2) = -2 \sum_{j=s+1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) + \\
& + (-1)^s f(t_1) - (-1)^k f(t_2) - f(t_1) + f(t_2).
\end{aligned}$$

Если s, k – чётные, то, по предположению, для чётных j $f(x_j) - f(x_{j+1}) \leq 0, -f(x_{s+1}) \leq 0$, имеем:

$$f_1(t_1) - f_1(t_2) = 2(-f(x_{s+1}) + f(x_{s+2}) - f(x_{s+3}) + f(x_{s+4}) - f(x_{s+5}) + \dots + f(x_{k-1}) - f(x_k)) \leq 0.$$

Если s – нечётная, k – чётная, то поскольку для чётных k функция $f(x)$ – почти возрастающая, то $f(x_k) - f(t_2) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}$ и можем записать:

$$\begin{aligned}
& f_1(t_1) - f_1(t_2) = \\
& = 2(f(x_{s+1}) - f(x_{s+2}) + \dots + f(x_{k-2}) - f(x_{k-1}) + f(x_k) - f(t_2)) \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}.
\end{aligned}$$

Если s – чётная, k – нечётная, по предположению $-f(x_{s+1}) \leq 0$, то функция $f(x)$ – почти убывающая и $-f(x_k) + f(t_2) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}$, имеем:

$$\begin{aligned}
& f_1(t_1) - f_1(t_2) = \\
& = 2(-f(x_{s+1}) + f(x_{s+2}) - \dots - f(x_{k-2}) + f(x_{k-1}) - f(x_k) + f(t_2)) \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}.
\end{aligned}$$

Если s – нечётная, k – нечётная, то можем записать:

$$\begin{aligned}
& f_1(t_1) - f_1(t_2) = 2(-f(t_1) + f(x_{s+1}) - f(x_{s+2}) + \\
& + f(x_{s+3}) - f(x_{s+4}) + \dots + f(x_{k-3}) - f(x_{k-2}) + f(x_{k-1}) - f(x_k) + f(t_2)) \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}.
\end{aligned}$$

Мы доказали, что функция $f_1(x)$ – почти возрастающая с показателем $2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf^{p(t)} [x_k; x_{k+1}]}}$. Лемма доказана.

Из леммы 2.4 следует, что каждую функцию $f(x)$ с ограниченным винеровским изменением, для любого $\varepsilon > 0$, можно представить в виде

$$f(x) = \omega[f](x) - (\omega[f](x) - f(x) + \psi(x)) + \psi(x),$$

где $\omega[f](x)$ – монотонно неубывающая ломанная, проходящая через точки

$\left(x_k; 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) + (-1)^k f(x_k)\right)$, $k = \overline{1, M-1}$, $(\omega[f](x) - f(x) + \psi(x))$ – монотонно неубывающая функция, $\psi(x)$ – функция с ограниченным винеровским изменением, для которой $|\psi(x)| < \varepsilon$. В случае, если $f(x) \in H^{w(x)}([a, b])$, тогда $\omega[f](x), \psi(x) \in H^{w(x)}([a, b])$, $|\psi(x)| < \varepsilon$.

Лемма 2.5. Пусть $0 < \varepsilon, 0 < \alpha < \lambda < 1$, функция $f(x) \in H^\lambda([a, b])$ продлена нулём вне отрезка $[a, b]$, тогда оператор локализованного дифференцирования $D^{\alpha, -\varepsilon}$ ограниченно действует из пространства $H^\lambda([a, b])$ в пространство $H^{\lambda-\alpha}([a, b])$ и

$$D^{\alpha, -\varepsilon} f(a) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha}.$$

Для любого $\delta > 0$ существует такое ε_0 , что для любых $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} - \delta \leq D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) \leq \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \delta. \quad (29)$$

Доказательство. Из леммы 2.4 следует, что для любого $\delta > 0$, $f(x)$ может быть представлена в виде:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) + \psi(x),$$

где $f_1(x), f_2(x), \psi(x) \in H^\lambda[a, b]$, $|\psi(x)| < \delta$ и $f_1(x), f_2(x)$ неубывающие. Обозначим $f_1(x) - f_2(x) = \phi(x)$. Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} D^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x) &= \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{c(x-t) dt}{(x-t)^{1+\alpha}} = \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha c \varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = \\ &= \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha(\phi(x) - \phi(x-\varepsilon))}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} = \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)\varepsilon^\alpha}. \end{aligned} \quad (30)$$

Для функции $\psi(x)$ можем записать:

$$\begin{aligned} |D^{\alpha, -\varepsilon} \psi(x)| &\leq \frac{2\delta}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\delta}^x \frac{c dt}{(x-t)^{\alpha+1-\lambda}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^{x-\delta} \frac{2\delta dt}{(x-t)^{\alpha+1}} = \\ &= \frac{\alpha \delta^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(\lambda-\alpha)} + \frac{2\delta^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\delta^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\lambda-\alpha} + 2\delta^{1-\lambda} \right) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Из оценок (30), (31) следует утверждение леммы (29).

Поскольку

$$\frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha}([a, b]) \subset H^{\lambda-\alpha}([a, b]),$$

то докажем, что

$$\psi_1(x) = \int_{x-\varepsilon}^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt = \int_0^\varepsilon \frac{f(x) - f(x-s)}{s^{\alpha+1}} ds \in H^{\lambda-\alpha}([a, b]).$$

Используя подстановку $t|_0^\varepsilon = h + s|_{-h}^{\varepsilon-h}$ в $\psi_1(x+h)$, можем записать:

$$\begin{aligned} \psi_1(x+h) - \psi_1(x) &= \int_{-h}^{\varepsilon-h} \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}} dt + \int_0^\varepsilon \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt = \\ &= \int_0^\varepsilon (f(x) - f(x-t)) ((t+h)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}) dt + \int_{-h}^0 (f(x+h) - f(x-t)) (t+h)^{-\alpha-1} dt + \\ &+ \int_0^\varepsilon (f(x+h) - f(x)) (t+h)^{-\alpha-1} dt - \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}} dt = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

В случае, если $x-a < \varepsilon$ $D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt$ и $|\psi_1(x)| \leq c \int_0^{x-a} t^{\lambda-\alpha-1} dt < \infty$. Поэтому $|\psi_1(a)| = 0$ и $D^{\alpha, -\varepsilon} f(a) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha}$. Результат действия оператора $D^{\alpha, -\varepsilon} f(x)$ следует из леммы 13.1 ([3]).

Пусть $x - a \geq \varepsilon$, тогда, используя лемму 13.1 ([3]), можем записать:

$$|J_1| \leq \int_0^{x-a} |f(x) - f(x-t)| (t^{-\alpha-1} - (t+h)^{-\alpha-1}) dt \leq c_1 h^{\lambda-\alpha};$$

$$|J_2| \leq c_2 h^{\lambda-\alpha};$$

$$|J_3| \leq \int_0^{x-a} |f(x+h) - f(x)| (t+h)^{-\alpha-1} dt \leq c_3 h^{\lambda-\alpha},$$

где $c_1, c_2, c_3 < \infty$. Оценим J_4 . Используя (3.8) из [3], имеем:

$$|J_4| \leq c_4 \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} (t+h)^{\lambda-\alpha-1} dt = \frac{c_4}{\lambda-\alpha} \left((\varepsilon+h)^{\lambda-\alpha} - \varepsilon^{\lambda-\alpha} \right) \leq c_5 h (\varepsilon+h)^{\lambda-\alpha-1} \leq c_5 h^{\lambda-\alpha}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.6. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \varepsilon$, тогда оператор локализованного дробного интегрирования $I^{\alpha, -\varepsilon}$ для $\alpha + \lambda < 1$ ограничен из $H^\lambda[a; b]$, в $H^{\alpha+\lambda}[a; b]$ и для $\alpha + \lambda \leq 1$ ограничен из $H^{\lambda, 1}[a; b]$ в $H^{\alpha+\lambda, 1}[a; b]$.

Доказательство. Представим оператор локализованного дробного интегрирования в виде:

$$\begin{aligned} I^{\alpha, -\varepsilon} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t) - f(a)) dt + \frac{f(a) \varepsilon^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t) - f(a)) dt - \int_a^{x-\varepsilon} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (f(t) - f(a)) dt + \frac{f(a) \varepsilon^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = M + N(x). \end{aligned}$$

Вспользуемся подстановками $x - t|_a^{x-\varepsilon} = s|_{x-a}^\varepsilon$ и $g(x) = f(x) - f(a)$, тогда можем записать:

$$\begin{aligned} N(x+h) - N(x) &= \int_\varepsilon^{x-a} ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha)} ds + \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha)} ds + \\ &+ \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_\varepsilon^{x-a} ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) ds + \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha)} ds = \\ &= \int_\varepsilon^{x-a} \frac{((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)} (g(x-s) - g(x)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} (g(x-s) - g(x)) ds + \\ &+ \frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)} ((x-a+h)^\alpha - (x-a)^\alpha - (\varepsilon+h)^\alpha + \varepsilon^\alpha + (\varepsilon+h)^\alpha - \varepsilon^\alpha) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\varepsilon^{x-a} ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) (g(x-s) - g(x)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} (g(x-s) - g(x)) ds + \\ &+ \frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)} ((x-a+h)^\alpha - (x-a)^\alpha) = N_1 + N_2 + N_3. \end{aligned}$$

Для слагаемых N_1 и N_3 известны оценки (см. [3], теорема 3.1.):

$$|N_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) (g(x-s) - g(x)) ds \leq \begin{cases} ch^{\lambda+\alpha}, \lambda + \alpha < 1; \\ ch \ln \frac{1}{h}, \lambda + \alpha = 1; \end{cases} \quad (32)$$

$$|N_3| \leq ch^{\lambda+\alpha}. \quad (33)$$

Оценим слагаемое N_2 . Для этого вычислим максимум подынтегрального выражения:

$$\left((s+h)^{\alpha-1} s^\lambda \right)' = 0, s = \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}.$$

Поскольку знак производной положителен для $s \in \left(0, \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}\right)$ и отрицателен для $s > \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}$, то $s = \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}$ точка максимум. Тогда можем записать:

$$|N_2| \leq \frac{Ah}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda} + h \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda} \right)^\lambda = \frac{Ah^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\lambda} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda} \right)^\lambda. \quad (34)$$

Собирая оценки (32) – (34), получаем доказательство леммы.

Докажем, что $I^{\alpha, -\varepsilon}$ ограничен из $H^{\lambda, 1}[a; b]$ в $H^{\alpha+\lambda, 1}[a; b]$, для $\alpha + \lambda \leq 1$. Воспользуемся подстановками

$$x - t \Big|_{x+h-\varepsilon}^{x+h} = s \Big|_{\varepsilon-h}^{-h}, \quad x - t \Big|_{x-\varepsilon}^x = s \Big|_\varepsilon^0$$

и обозначая $g(x) = f(x) - f(a)$, можем записать:

$$\begin{aligned} I^{\alpha, -\varepsilon} f(x+h) - I^{\alpha, -\varepsilon} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) (g(x-s) - g(x)) ds + \\ &- \int_{-h}^0 \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha) (s+h)^{1-\alpha}} ds - \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha) (s+h)^{1-\alpha}} ds = N_1 + N_2 + N_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое $N_2(x)$. Воспользуемся свойством $g(x-s) - g(x) \leq A|s|^\lambda \ln \left| \frac{1}{s} \right|$, тогда проинтегрируем по частям:

$$\left[\begin{array}{l} \ln \frac{1}{t} = u, \quad -\frac{1}{t} dt = du, \\ h^{\alpha+\lambda-1+1} \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{t}{h}\right)^\lambda d\frac{t}{h} = dv, \quad h^{\alpha+\lambda} \int (1-z)^{\alpha-1} z^\lambda dz = h^{\alpha+\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \int z^{k+\lambda} dz = \\ = \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\lambda+1} \left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda+1} {}_2F_1\left(1-\alpha, \lambda+1; \lambda+2; \frac{t}{h}\right) = v; \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} |N_2| &\leq c \int_0^h \frac{(h-t)^{\alpha-1} t^\lambda}{\Gamma(\alpha)} \ln \frac{1}{t} dt = c \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha) (\lambda+1)} \left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda+1} {}_2F_1\left(1-\alpha, \lambda+1; \lambda+2; \frac{t}{h}\right) \ln \left(\frac{1}{t}\right) \Big|_0^h + \\ &+ c \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha) (\lambda+1)} \int_0^h \frac{1}{t} \left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda+1} {}_2F_1\left(1-\alpha, \lambda+1; \lambda+2; \frac{t}{h}\right) dt \leq c_1 h^{\alpha+\lambda} \ln \left(\frac{1}{h}\right) + \\ &+ c \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\alpha) (\lambda+1) \Gamma(\lambda+\alpha+1)} h^{\alpha+\lambda} \int_0^1 s^\lambda ds \leq c_2 h^{\alpha+\lambda} \ln \left(\frac{1}{h}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

В случае, если $\frac{1}{2} \geq \varepsilon \geq h, \lambda + \alpha \leq 1$, с учётом оценок

$$\left(x^\lambda \ln \frac{1}{x}\right)' = x^{\lambda-1} \left(\lambda \ln \frac{1}{x} - 1\right) > 0, \ln \frac{1}{x^\lambda} > \ln e, 0 < x < \frac{1}{e^{\frac{1}{\lambda}}}, \quad (36)$$

и того, что

$$\left(x^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{x}\right)' = x^{\lambda+\alpha-2} \left((\lambda+\alpha-1) \ln \frac{1}{x} - 1\right) < 0, 0 < x < 1, \quad (37)$$

имеем:

$$|N_3| \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} (s+h)^\lambda \ln \frac{1}{s+h} ds \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon h^{\alpha+\lambda-1} \ln \frac{1}{h} ds \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} h^{\alpha+\lambda} \ln \frac{1}{h}. \quad (38)$$

В случае, если $\frac{1}{2} \geq h \geq \varepsilon > 0, \lambda + \alpha \leq 1$, с учётом того, что

$$\left(z^a \ln \frac{1}{z} + \frac{z^a}{a}\right)' = az^{a-1} \ln \frac{1}{z}, 0 \leq a \leq 1, 0 < z < 1, \quad (39)$$

имеем:

$$N_3 \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} s^\lambda \ln \frac{1}{s} ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^0 (s+h)^{\alpha-1} (-s)^\lambda \ln \frac{1}{-s} ds \leq$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon s^\lambda \ln \frac{1}{s} ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{h-\varepsilon} (h-t)^{\alpha-1} t^\lambda \ln \frac{1}{t} dt = \\
&= \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{s^{\lambda+1}}{\lambda+1} \ln \frac{1}{s} \Big|_0^\varepsilon + \int_0^\varepsilon \frac{s^{\lambda+1}}{\lambda+1} \frac{1}{s} ds \right) + \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(1-\alpha)_n}{h^n n!} \int_0^{h-\varepsilon} t^{\lambda+n} \ln \frac{1}{t} dt = \\
&= \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\varepsilon^{\lambda+1}}{\lambda+1} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2} \right) + \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(1-\alpha)_n}{h^n n!} \left(\frac{(h-\varepsilon)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1} \ln \frac{1}{h-\varepsilon} + \frac{(h-\varepsilon)^{\lambda+n+1}}{(\lambda+n+1)^2} \right) \leq \\
&\leq \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)^2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{h^{\alpha-1}(1-\alpha)_n}{\Gamma(\alpha)h^n(\lambda+n+1)n!} \left(h^{\lambda+n+1} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1} \right) \leq \\
&\leq \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)^2} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(1-\alpha)_n(\lambda+1)_n h^n}{(\lambda+1)(\lambda+2)_n n!} \left(\ln \frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda+1} \right) \leq \\
&\leq \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)^2} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \left(\ln \frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda+1} \right) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(1+\lambda+\alpha)} \leq ch^{\alpha+\lambda} \ln \frac{1}{h}. \quad (40)
\end{aligned}$$

Для $|N_1|$ после подстановки $s|_0^\varepsilon = h t|_0^{\frac{\varepsilon}{h}}$ можем записать:

$$|N_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon (s^{\alpha-1} - (s+h)^{\alpha-1}) |g(x-s) - g(x)| ds \leq \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{\varepsilon}{h}} (t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}) t^\lambda \ln \frac{1}{ht} dt.$$

Пусть $\varepsilon \leq h \leq \frac{1}{2}$, $\alpha + \lambda \leq 1$. С учётом (39) и подстановки

$$\left[\begin{array}{l} \ln \frac{1}{ht} = u, \quad -\frac{1}{t} dt = du, \\ t^{\alpha+\lambda-1} dt = dv, \quad \frac{t^{\alpha+\lambda}}{\alpha+\lambda} = v; \end{array} \right]$$

можем записать:

$$\begin{aligned}
|N_1| &\leq \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{\varepsilon}{h}} t^{\alpha-1} t^\lambda \ln \frac{1}{ht} dt = \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} \frac{\varepsilon}{h} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^{\lambda+\alpha} - \lim_{A \rightarrow 0} \ln \frac{1}{hA} A^{\lambda+\alpha} + \frac{1}{\lambda+\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^{\alpha+\lambda} \right) \leq \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)(\lambda+\alpha)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^{\lambda+\alpha} + \varepsilon^{\alpha+\lambda} \frac{1}{\lambda+\alpha} \right) \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)(\lambda+\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} h^{\lambda+\alpha} + h^{\alpha+\lambda} \frac{1}{\lambda+\alpha} \right) \leq c_1 h^{\lambda+\alpha} \ln \frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

Пусть $1 > \varepsilon > h$, $\lambda + \alpha < 1$. С учётом знака производной в (39), имеем:

$$\begin{aligned}
|N_1| &\leq \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}) t^\lambda \left| \ln \frac{1}{ht} \right| dt + \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} (t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}) t^\lambda \left| \ln \frac{1}{ht} \right| dt \leq \\
&\leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (ht)^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} d(ht) + \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\alpha-1} \right) t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^h s^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{s} ds + \\
&\quad + \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} (1-\alpha) \frac{1}{t} t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{s} \frac{s^{\lambda+\alpha}}{\lambda+\alpha} \Big|_0^h + \int_0^h \frac{s^{\lambda+\alpha-1}}{\lambda+\alpha} ds \right) + \\
&\quad + \frac{ch^{\alpha+\lambda}(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{ht} \frac{t^{\lambda+\alpha-1}}{\lambda+\alpha-1} \Big|_1^{\frac{\varepsilon}{h}} + \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \frac{t^{\lambda+\alpha-2}}{\lambda+\alpha-1} dt \right) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} \frac{h^{\lambda+\alpha}}{\lambda+\alpha} + \frac{h^{\lambda+\alpha}}{(\lambda+\alpha)^2} \right) + \\
&\quad + \frac{ch^{\alpha+\lambda}(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} \frac{\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^{\lambda+\alpha-1}}{\lambda+\alpha-1} - \ln \frac{1}{h} \frac{1}{\lambda+\alpha-1} + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^{\lambda+\alpha-1}}{(\lambda+\alpha-1)^2} - \frac{1^{\lambda+\alpha-1}}{(\lambda+\alpha-1)^2} \right) \leq c_2 h^{\lambda+\alpha} \ln \frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

Пусть $x - a > \varepsilon \geq h, \lambda + \alpha = 1$. Воспользуемся неравенством $1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} \leq |\alpha - 1| \frac{1}{t}$, которое следует из [3], отрицательностью производной

$$\begin{aligned} & \left((\varepsilon - h) (h + \theta (\varepsilon - h))^{-1} \ln \frac{1}{h + \theta (\varepsilon - h)} \right)' = - (h + \theta (\varepsilon - h))^{-1} \ln \frac{1}{h + \theta (\varepsilon - h)} - \\ & - \frac{(\varepsilon - h) (1 - \theta)}{(h + \theta (\varepsilon - h))^2} \ln \frac{1}{h + \theta (\varepsilon - h)} - (h + \theta (\varepsilon - h))^{-1} \frac{(\varepsilon - h) (1 - \theta)}{h + \theta (\varepsilon - h)} < 0, 0 < h \leq \varepsilon, 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

и свойствами (37), для $\lambda + \alpha = 1$ и (36), для $\lambda = 1$, тогда можем записать:

$$\begin{aligned} |N_1| & \leq \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\right) t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt + \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\right) t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt \leq \\ & \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^h \ln \frac{1}{s} ds + c_3 h \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \frac{1}{ht} \ln \frac{1}{ht} d(ht) = c_1 h \ln \frac{1}{h} - c_4 h \int_h^{\varepsilon} \ln \frac{1}{s} d\left(\ln \frac{1}{s}\right) = \\ & = c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4}{2} h \left(\ln^2 \frac{1}{h} - \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} \right) \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4}{2} \frac{h(\varepsilon - h)}{h + \theta(\varepsilon - h)} \ln \frac{1}{h + \theta(\varepsilon - h)} \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \\ & + \frac{c_4 h}{2} \frac{\varepsilon}{\theta \varepsilon} \ln \frac{1}{\theta \varepsilon} \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4 h}{2\theta} \left(\ln \frac{1}{\theta \varepsilon} \right) \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4 h}{2\theta} \ln \frac{1}{\theta h} \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4}{2\theta^2} \left(\theta h \ln \frac{1}{\theta h} \right) \leq \\ & \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4}{2\theta^2} h \ln \frac{1}{h} \leq c_5 h \ln \frac{1}{h}. \end{aligned} \quad (41)$$

Собирая оценки (35), (38)–(41), получаем доказательство леммы.

Рассмотрим фактор-пространство пространства $H^\lambda([a; b])$ по одномерному пространству, состоящему из констант.

Определение 2.4. Классом функций $f_{const}(x) \equiv f(x) \equiv H_{const}^\lambda([a; b])$, назовём множество функций, получаемых из функций $f(x) \in H^\lambda([a; b])$ добавлением констант

$$H_{const}^\lambda([a; b]) = \left\{ \phi(x) \mid \phi(x) = f(x) + const, \phi(x), f(x) \in H^\lambda([a; b]), const \in R \right\}.$$

Доказательство. Аналогично пространству суммируемых функций, в случае, если это не вызывает затруднений, мы будем использовать одинаковые обозначения $f(x)$ для класса и представителя класса. Поскольку отношение принадлежать классу есть отношением эквивалентности, то классы разбивают пространства $H^\lambda([a; b])$ на систему непересекающихся множеств. Для пространства классов $H_{const}^\lambda([a; b])$ с обычными операциями для классов, как операции для произвольных представителей классов, введём норму:

$$\left\| f_{const}^\lambda(x) \right\|_{H_{const}^\lambda([a; b])} = \left\| f_{const}^\lambda(x) \right\| = \max_{x \in [a; b]} (f(x)) - \min_{x \in [a; b]} (f(x)) + \sup_{x_1, x_2 \in [a; b]} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda}.$$

Действительно, поскольку $f_{const}^\lambda(x) = const$ – это класс, для которого $f(x)$ константа, то для любой функции $\left\| f_{const}^\lambda(x) \right\| \geq 0$ и $\left\| f_{const}^\lambda(x) \right\| = 0 \Leftrightarrow f_{const}^\lambda(x) = const$;

$$\begin{aligned} & \left\| f_{const}^\lambda(x) + g_{const}^\lambda(x) \right\| = \max_{x \in [a; b]} (f(x) + g(x)) + \max_{x \in [a; b]} (-f(x) - g(x)) + \\ & + \sup_{x_1, x_2 \in [a; b]} \frac{|f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \max_{x \in [a; b]} (f(x)) + \max_{x \in [a; b]} (g(x)) + \max_{x \in [a; b]} (-f(x)) + \\ & + \max_{x \in [a; b]} (-g(x)) + \sup_{x_1, x_2 \in [a; b]} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} + \sup_{x_1, x_2 \in [a; b]} \frac{|g(x_1) - g(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = \left\| f_{const}^\lambda(x) \right\| + \left\| g_{const}^\lambda(x) \right\|; \\ & \left\| a f_{const}^\lambda(x) \right\| = |a| \left\| f_{const}^\lambda(x) \right\|, a \in R. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующий оператор:

$$D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} \left(D_\delta^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x - \varepsilon k) \right) (x) = 0.$$

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2.7. Для любого $x \in [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство

$$\left(D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(D_{[a;b], \delta}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) = f(x), \quad 0 < \varepsilon, 0 < \alpha < 1$$

имеет место поточечно для $f(x) \in H^{\lambda}(a; b)$, $-\infty < a, 0 < \alpha < \lambda < 1$.

Доказательство. Из теоремы 2.2, а также того, что в случае $f(x) \in L_p(-\infty, b)$, $1 \leq p < \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $_{L_p(-\infty, b)}$ следует:

$$\begin{aligned} \left(D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] - 1} \left(D_{a+}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x - \varepsilon k) + \left(D_{a+}^{\alpha} I^{\alpha} f \right) \left(x - \varepsilon \left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] \right) = \\ &+ f(x) - f(x - \varepsilon) + f(x - \varepsilon) - f(x - 2\varepsilon) + \dots + f \left(x - \varepsilon \left(\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] - 1 \right) \right) - f \left(x - \left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] \varepsilon \right) + \\ &+ f \left(x - \left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] \varepsilon \right) = f(x), \end{aligned}$$

в случае конечного отрезка и

$$\begin{aligned} \left(D_{[-\infty; b]}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(D_{a+}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x - \varepsilon k) = f(x) - f(x - \varepsilon) + \\ &+ f(x - \varepsilon) - f(x - 2\varepsilon) + \dots = f(x), \end{aligned}$$

в случае бесконечного промежутка.

Лемма 2.8. Пусть $f(x), g(x) \in H^{\lambda}([a; b])$, $f(x) = \text{const}_1$, $g(x) = \text{const}_2$, для $x \leq a$.

$$D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} g(x) \quad (D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = D^{\alpha, -\varepsilon} g(x)),$$

тогда и только тогда, когда $f(x) - g(x) = \text{const}$, $x \in [a, b]$.

Доказательство. Заметим, что поскольку $D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = 0$, если $f(x) = \text{const}_1$, то имеем:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x - \varepsilon k) \right) (x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{\varepsilon} \right] + 2} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x - \varepsilon k) \right) (x).$$

Необходимость. Пусть $f(x) - g(x) = \text{const}$, $g(x), f(x) \in H_0^{\lambda}([a; b], \rho)$. В силу того, что $D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} \text{const} = 0$, то $D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} g(x) = D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} (f + \text{const})(x) = D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} f(x)$.

Достаточность. Докажем, что если $D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} g(x)$, то $f(x) - g(x) = \text{const}_1 - \text{const}_2$. Вычислив локализованный интеграл (2) от локализованной производной, имеем:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} (f - g)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} I^{\alpha, -\varepsilon} \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} (f - g)(x - \varepsilon k) \right) (x) = 0.$$

Из теоремы 2.1 следует, что последнее равенство может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} \left(I^{\alpha, -\varepsilon} D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} (f - g) \right) (x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} \left((f - g)(x - \varepsilon k) - \int_0^1 K(s, \alpha) (f - g)(x - \varepsilon k - \varepsilon - \varepsilon s) ds \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} (f - g)(x - \varepsilon k) - \int_0^1 K(s, \alpha) \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} (f - g)(x - \varepsilon(k+1) - \varepsilon s) ds = 0. \end{aligned}$$

Из теоремы 2.3 следует, что такие уравнения с усредняющими ядрами имеют единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $(f - g) = \text{const}_1 - \text{const}_2$, для $x \leq a$. Решение задаётся рекуррентными формулами, например, для $x \in [a, a + \varepsilon]$, имеем:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} (f - g)(x - \varepsilon k) = \int_0^1 K(s, \alpha) \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} (f - g)(x - \varepsilon(k+1) - \varepsilon s) ds =$$

$$= \int_0^1 K(s, \alpha) (f - g)(x - \varepsilon - \varepsilon s) ds = (\text{const}_1 - \text{const}_2) \int_0^1 K(s, \alpha) ds = \text{const}_1 - \text{const}_2.$$

Продолжая вычисления $(f - g)(x)$ последовательно, для отрезков $[a + \varepsilon, a + 2\varepsilon]$, $[a + 2\varepsilon, a + 3\varepsilon]$, . . . , $[b - \varepsilon, b]$ получаем, что $(f - g)(x) = \text{const}_1 - \text{const}_2$, для $x \in [a, b]$. Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4. Пусть $f_{\text{const}}(x) \in H_{\text{const}}^\lambda([a; b])$, $f(x) = 0$, для $x \leq a$. Если выполнены следующие условия: $0 < \varepsilon$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda$, $\alpha + \lambda < 1$, то оператор локализованного интегрирования $I^{\alpha, -\varepsilon}$ осуществляет изоморфизм пространства классов $H_{\text{const}}^\lambda([a; b])$ на пространство $H_{\text{const}}^{\lambda+\alpha}([a; b])$.

Доказательство. Из лемм 2.5, 2.6 и 2.7 следует, что между пространством $H^\lambda([a; b])$ и, по крайней мере частью пространства $H^{\lambda+\alpha}([a; b])$, т. е. частью пространства функций представимых в виде $(I^{\alpha, -\varepsilon}\phi)(x)$, $\phi(x) \in H_{\text{const}}^{\lambda+\alpha}([a; b])$ оператор $I^{\alpha, -\varepsilon}$ осуществляет изоморфизм. Покажем, что каждая функция $f(x) \in H^{\lambda+\alpha}([a; b])$ может быть представлена в виде $f(x) = I^{\alpha, -\varepsilon}\phi(x)$, $\phi(x) \in H^{\lambda+\alpha}([a, b])$. Предположим противное, т. е. существует $g(x) \in H^{\lambda+\alpha}([a; b])$ и $g(x) \neq I^{\alpha, -\varepsilon}\psi(x)$, $\psi(x) \in H^\lambda([a, b])$. Поскольку $D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x) \in H^\alpha([a; b])$ и $I^{\alpha, -\varepsilon}D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x) \in H^{\alpha+\lambda}([a; b])$, то в пространстве $H^{\alpha+\lambda}([a; b])$ существуют две неравные функции $g(x)$, $I^{\alpha, -\varepsilon}D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x)$, имеющие равные локализованные производные $D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x)$. Поскольку для функций из пространства $H^{\lambda+\alpha}([a; b])$ такое возможно, только для $I^{\alpha, -\varepsilon}D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x) - g(x) = \text{const}$, т. е. функций, принадлежащих одному классу. Наше предположение о существовании классов функций, не представимых в виде локализованного интеграла, ложно.

3. Заключение. Несмотря на то, что локализованные дробные производные и интегралы типа Римана – Лиувилля во многом похожи на дробные производные и интегралы Римана – Лиувилля, дифференциальные уравнения с локализованными дробными производными (теорема 2.2) являются разностными и, следовательно, решения таких уравнений не ограничены в весовых гёльдеровских пространствах. Вторым отличием локализованных дробных производных есть то, что локализованные дробные производные констант равны нулю и, следовательно, изоморфизм локализованные дробные производные и интегралы типа Римана – Лиувилля осуществляют между фактор-пространствами гёльдеровских пространств по пространству констант.

Список литературы

1. Grinko A.P. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions*. 2019;30(10):817-832.
2. Grinko A.P. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions*. 2018;29(6):489-504.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.; Наука и Техника; 1987. 687с.
4. Chistyakov V.V. and Galkin O.E. On Maps of Bounded p-Variation with $p > 1$. *Positivity*. 1998;2:19-45.
5. Mejia O., Merentes N., Sanchez JL. The Space of Bounded p(-)-Variation in Wiener's Sense with Variable Exponent. *Advances in Pure Mathematics*. 2015;5(11):703-716.
6. Павлов Д.А. Конструктивное описание гёльдеровых классов на компактах в \mathbb{R}^3 . *Записки научных семинаров ПОМИ*. 2020;491:119-144.
7. Grinko A.P. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk*;2009;17(1):41-50. (In Russian)
8. Grinko A.P. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions*. 2022;33(8):623-636.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука; 1968. 511 с.
10. Castillo R., Merentes N. and Rafeiro H. Bounded Variation Spaces with p-Variable. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2014;11: 1069-1079.

References

1. Grinko AP. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions*. 2019;30(10):817-832.
2. Grinko AP. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions*. 2018;29(6):489-504.
3. Samko SG., Kilbas AA., Marichev OI. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Ml.; Science and Technology; 1987. 687с.
4. Chistyakov VV. and Galkin OE. On Maps of Bounded p-Variation with $p > 1$. *Positivity*. 1998;2:19-45.

5. Mejia O., Merentes N., Sanchez JL. The Space of Bounded $p(\cdot)$ -Variation in Wiener's Sense with Variable Exponent. *Advances in Pure Mathematics*. 2015;5(11):703–716.
6. Pavlov DA. Constructive description of Hölder classes on compacta in \mathbb{R}^3 . *Notes scientific seminars POMI*. 2020;491:119–144.
7. Grinko AP. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk*;2009;17(1):41-50. (In Russian)
8. Grinko AP. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions*. 2022;33(8):623-636.
9. Muskhelishvili NI. Singular integral equations. - M.: Science; 1968. 511 p.
10. Castillo R., Merentes N. and Rafeiro H. Bounded Variation Spaces with p -Variable. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2014;11: 1069–1079.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 17.09.2024

Received September 17, 2024

Поступила после рецензирования 04.11.2024

Revised November 4, 2024

Принята к публикации 07.11.2024

Accepted November 7, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гринько Александр Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и физико-математических дисциплин, Барановичский государственный университет, г. Барановичи, Беларусь

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander P. Grinko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines, Baranovichi State University, Baranovichi, Belarus

[К содержанию](#)