

Исследование волнового теплообмена в тонких металлических пленках на основе гиперболического уравнения

Пашин А. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Н. В. Малаем)
Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
pashinalexey@yandex.ru

Аннотация. Выполнены исследования точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности третьего порядка, найденного с учетом релаксации теплового потока и градиента температуры, потока второго порядка в формуле закона Фурье. Исследования показали, что в зависимости от величин коэффициентов релаксации (временных и пространственных) и толщины пластины могут наблюдаться качественно различные варианты изменения температуры. И, в частности, при толщинах, существенно больших длины свободного пробега микрочастиц, наблюдается диффузионная передача теплоты с временной задержкой установления граничного условия 1-го рода. При сопоставимых с длиной свободного пробега микрочастиц толщинах (наноразмерная толщина) диффузионный теплообмен заменяется на волновой, который в зависимости от величин коэффициентов релаксации может протекать как в режиме баллистического переноса теплоты, так и в режиме колебаний с корреляцией в области отрицательных значений температур. Рассмотрены условия, приводящие к каждому из вариантов волнового переноса теплоты.

Ключевые слова: локально-неравновесный теплообмен, модифицированная формула закона Фурье, гиперболическое уравнение, точное решение, диффузионный теплообмен, волновой теплообмен, время релаксации, длина свободного пробега микрочастиц, тепловой поток второго порядка

Для цитирования: Пашин А. В. 2025. Исследование волнового теплообмена в тонких металлических пленках на основе гиперболического уравнения. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 131–141.
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-131-141 EDN DEKMWQ

Original Research

Study of Wave Heat Transfer in Thin Metal Films Based on the Hyperbolic Equation

Alexey V. Pashin 

(Article submitted by a member of the editorial board N. V. Malay)
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia
pashinalexey@yandex.ru

Abstract. Research has been conducted on the exact analytical solution of the third-order hyperbolic heat conduction equation, derived with consideration of heat flux relaxation, temperature gradient, and the second-order flux term in the Fourier law formulation. The studies have shown that, depending on the values of the relaxation coefficients (temporal and spatial) and the thickness of the plate, qualitatively different variants of temperature change can be observed. And, in particular, at thicknesses significantly greater than the mean free path of microparticles, diffusion heat transfer with a time delay in establishing the boundary condition of the 1st kind is observed. At thicknesses comparable to the mean free path of microparticles (nanoscale thickness), diffusion heat exchange is replaced by wave heat exchange, which, depending on the values of the relaxation coefficients, can occur both in the ballistic heat transfer mode and in the oscillation mode with correlation in the region of negative temperature values. The conditions leading to each of the wave heat transfer variants are considered.

Keywords: Locally-Nonequilibrium Heat Transfer, Modified Formula of Fourier's Law, Hyperbolic Equation, Exact Solution, Diffusion Heat Transfer, Wave Heat Transfer, Relaxation Time, Mean Free Path of Microparticles, Second-order Heat Flow

For citation: Pashin A. V. 2025. Study of Wave Heat Transfer in Thin Metal Films Based on the Hyperbolic Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 131–141. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-131-141 EDN DEKMWQ

1. Введение. При допущении локального термодинамического равновесия и сплошности среды находятся параболические уравнения тепломассопереноса, решения которых описывают бесконечную скорость передачи теплоты, в связи с чем, снижается круг задач, их применения. В частности, эти решения неприменимы ко всем быстротекущим процессам, время протекания которых сопоставимо со временем свободного пробега микрочастиц, а также процессы тепломассопереноса для систем, геометрические размеры которых сопоставимы с длиной свободного пробега микрочастиц. Параболические уравнения, выведенные без учёта пространственно-временной нелокальности, являются

локальными и по пространству, и по времени. Дифференциальные уравнения, выведенные с учётом пространственно-временной нелокальности, включают длину и время свободного пробега микрочастиц. Решению проблемы получения таких уравнений посвящены работы ряда авторов. В них рассматриваются следующие теории локально-неравновесных систем: на основе понятия тепловой памяти [1, 2]; с использованием молекулярно-кинетических методов [3, 4, 5, 6, 7]; на основе уравнения Больцмана [8, 9]; при использовании теории случайных блужданий и др. В ряде работ понятие температуры, определяемое лишь для равновесных систем, заменяется на другие понятия. Например, в работе [10] вводится понятие «термодинамической» температуры. Её отклонение от абсолютной температуры является характеристикой степени нелокальности системы. В молекулярно-кинетических методах используется понятие «кинетической» температуры, которая находится из локально-неравновесной функции распределения с учётом средней кинетической энергии микрочастиц [11, 12].

Наиболее известной теорией, не использующей принцип локального термодинамического равновесия, является теория, называемая в [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] как «расширенная необратимая термодинамика» (РНТ). Для теплового потока она приводит к дифференциальному уравнению Максвелла – Каттанео

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (1)$$

где q – тепловой поток, Bm/m^2 ; T – температура, K ; t – время, s ; x – координата, m ; λ – коэффициент теплопроводности, $Bm/(m \cdot K)$; τ_1 – время релаксации, s .

Из (1) следует, что тепловой поток не определяется только градиентом температуры, как в классической формуле закона Фурье, а является решением эволюционного уравнения, описывающего процесс его релаксации к локально-равновесному значению.

Формула (1) учитывает лишь временную нелокальность, исключая пространственно-нелокальные эффекты. Для их учёта в РНТ вводится дополнительное слагаемое [21]

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} - l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где l – характерный масштаб нелокальности (длина свободного пробега микрочастиц). Величина $\partial q / \partial x$ называется потоком теплового потока (потоком второго порядка). Она вводится с целью учёта пространственно-нелокальных эффектов. Соотношение (4) можно представить в виде

$$-q - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} + l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right). \quad (3)$$

Из (5) следует, что отклонение нестационарного теплового потока q от стационарного $\lambda \partial T / \partial x$ оценивается скоростью изменения потока во времени $\tau_1 \partial q / \partial t$ и скоростью изменения потока $\partial q / \partial x$ по пространственной переменной x , то есть $l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)$.

В эволюционном уравнении для теплового потока можно также учесть и производные более высокого порядка. Например, учитывая не только скорость изменения теплового потока во времени, но и его ускорение, а также, учитывая скорость изменения во времени градиента температуры $\partial T / \partial x$, получаем [21]

$$-q - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = (\tau_1 + \tau_2) \frac{\partial q}{\partial t} + \tau_1 \tau_2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + l^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где τ_1, τ_2 – времена релаксации, характеризующие реакцию среды на изменение теплового потока.

Известно, что вывод системы из состояния равновесия вызывает её противодействие такому изменению, степень которого оценивается временами релаксации τ_1, τ_2 и характерным масштабом пространственной нелокальности l . При $\partial T / \partial x = 0$ теплоперенос невозможен и, следовательно, $q = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = l = 0$.

Для вывода локально-неравновесных уравнений теплопроводности с учётом формул (1), (4), (3) будем использовать уравнение теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad (5)$$

где c – теплоёмкость, $Dж/(кг \cdot K)$; ρ – плотность, $кг/м^3$.

Подставляя (1) в (7), имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$ – температуропроводность.

Уравнение (8) является гиперболическим. Оно описывает как диссипативную передачу теплоты (при $\delta \gg l$, где δ – толщина пластины), так и волновую (при $\delta \sim l$).

Подставив (4) в (7), имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + l^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (7)$$

Смешанная производная переводит гиперболическое уравнение (6) в параболическое. Появление этой производной связано с учётом характерного масштаба пространственной нелокальности в уравнении для теплового потока (2). Применительно к уравнению (6) получено точное аналитическое решение, исследование которого показало наличие конечной скорости распространения теплоты со скачком температуры на фронте тепловой волны, отделяющем возмущенную и невозмущенную (где сохраняется начальная температура) части среды [18, 22, 23, 24, 25, 26]. Появление скачка температуры свидетельствует о бесконечных тепловых потоках на фронте волны и о возникновении изотерм внутри тела, что объясняется неучётом пространственной нелокальности.

Исследования точных аналитических решений уравнения (9) показывают, что наличие нелокального слагаемого $l^2 \partial^3 T / (\partial x^2 \partial t)$ приводит к сглаживанию скачков температуры. Однако обнаруживается новый эффект, связанный с невозможностью мгновенного установления граничного условия первого рода. И, в частности, температура на границе постепенно возрастает от температуры T_0 , заданной начальным условием, до температуры $T_{\text{ст}}$, заданной граничным условием первого рода ($T_0 > T_{\text{ст}}$), в течение некоторого диапазона начального времени [23, 24, 25, 26]. Для сверхтонких нанополюнок, сопоставимых по толщине с длиной свободного пробега микрочастиц (молекул, атомов, электронов, ионов), уравнение (9) описывает баллистическую передачу теплоты, при которой градиент температуры по толщине пластины равен нулю. Следовательно, охлаждение пластины от некоторой начальной температуры T_0 до температуры $T_{\text{ст}}$ практически происходит при отсутствии перепада температуры по её толщине. В данном случае граничное условие первого рода не принимается во всем диапазоне времени нестационарного процесса, вплоть до установления стационарного режима. Исследования точных аналитических решений уравнений (8) и (9) показывают, что в баллистическом режиме теплообмена (для сверхтонких плёнок) решения уравнений (8) и (9) совпадают в случае, если величину температуры, получаемой из решения уравнения (8), принимать в виде квадрата амплитуды волновой функции.

Выражая величину теплового потока q из (3) и подставляя в уравнение теплового баланса (7), находим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \tau_1 \tau_2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (a\tau_2 + l^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (8)$$

Найдем точное аналитическое решение уравнения (6) для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода. Краевые условия в данном случае имеют вид

$$T(x, 0) = T_0; \quad \partial T(x, 0) / \partial t = 0; \quad \partial^2 T(x, 0) / \partial t^2 = 0; \quad \partial T(0, t) / \partial x = 0; \quad T(\delta, t) = T_{\text{ст}}, \quad (9)$$

где T_0 – начальная температура, K ; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки, K ; δ – половина толщины пластины, m .

Обозначим

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad F_1 = \frac{a\tau_1}{\delta^2}; \quad F_2 = \frac{a\tau_2}{\delta^2}; \quad F_3 = \frac{l^2}{\delta^2}, \quad (10)$$

где Θ , ξ , Fo – безразмерные температура, координата, время (число Фурье); F_1 ,

F_2 – безразмерные коэффициенты релаксации; F_3 – безразмерный микромасштаб системы.

С учетом (10) задача (6), (9) будет

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} + \text{Fo}_3 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \text{Fo}^3} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \text{Fo}_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}}; \quad (11)$$

$$(\text{Fo} > 0; 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}^2} = 0; \quad (14)$$

$$\partial \Theta(0, \text{Fo}) / \partial \xi = 0; \quad (15)$$

$$\Theta(1, \text{Fo}) = 0, \quad (16)$$

где $\text{Fo}_1 = F_1 + F_2$; $\text{Fo}_2 = F_2 + F_3$; $\text{Fo}_3 = F_1 \cdot F_2$.

Начальным условием (12) задается температура во всем теле в начальный момент времени. Начальные условия (13), (14) означают отсутствие скорости изменения температуры и её ускорения в начальный момент времени соответственно. Граничным условием (15) задается отсутствие теплообмена на границе $\xi = 0$. Граничным условием (16) задается нулевая температура в точке $\xi = 1$.

Следуя методу Фурье, решение задачи (11)–(16) находится в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \phi(Fo)\psi(\xi), \quad (17)$$

где $\phi(Fo)$ и $\psi(\xi)$ – соответственно функции времени Fo и пространственной переменной ξ .

Подставляя (17) в (11), находим

$$\frac{\phi' + Fo_1\phi'' + Fo_3\phi'''}{\phi + Fo_2\phi'} = \frac{\psi''}{\psi}, \quad (18)$$

где $\phi' = d\phi/dFo$; $\phi'' = d^2\phi/dFo^2$; $\phi''' = d^3\phi/dFo^3$; $\psi'' = d^2\psi/d\xi^2$.

Приравняв правую и левую части соотношения (18) некоторой постоянной ν_k , относительно $\phi(Fo)$ и $\psi(\xi)$ получаем следующие уравнения:

$$\phi' + Fo_1\phi'' + Fo_3\phi''' + (\phi + Fo_2\phi')\nu = 0; \quad (19)$$

$$\psi'' + \nu\psi = 0. \quad (20)$$

где ν – некоторая постоянная.

Подставляя (17) в (15), (16), находим граничные условия для функции $\psi(\xi)$

$$\psi'(0) = 0; \quad (21)$$

$$\psi(1) = 0. \quad (22)$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (20)–(22) разыскивается в виде

$$\psi(\xi) = \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right). \quad (23)$$

Соотношение (23) удовлетворяет условиям (21), (22). Подставляя (23) в (20), получаем следующую формулу для определения собственных чисел краевой задачи (20)–(22)

$$\nu_k = r^2\pi^2/4, \quad (r = 2k - 1; k = \overline{1, \infty}). \quad (24)$$

Уравнение (19) может быть представлено в форме следующего характеристического уравнения

$$Fo_3z^3 + Fo_1z^2 + z + (1 + Fo_2z)\nu_k = 0. \quad (25)$$

Три корня уравнения (25) имеют вид

$$z_j = -2\sqrt{Q} \cos\left(\phi + \frac{2\pi j}{3}\right) - \frac{Fo_1}{3Fo_3},$$

где $j = 1, 2, 3$; $\phi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right)$; $Q = \left(\frac{Fo_1}{3Fo_3}\right)^2 - \frac{1+\nu_k Fo_2}{3Fo_3}$; $R = \left(\frac{Fo_1}{3Fo_3}\right)^3 - \frac{(1+\nu_k Fo_2)Fo_1}{6Fo_3^2} + \frac{\nu_k}{2Fo_3}$.

После определения z_1, z_2, z_3 решение уравнения (19) будет

$$\phi(Fo) = C_1 \exp(z_1 Fo) + C_2 \exp(z_2 Fo) + C_3 \exp(z_3 Fo), \quad (26)$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Подставляя частные решения (23), (26) в (17) и определяя их сумму, получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{1k} \exp^{z_{1k} Fo} + C_{2k} \exp^{z_{2k} Fo} + C_{3k} \exp^{z_{3k} Fo} \right) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right), \quad (r = 2k - 1). \quad (27)$$

Для нахождения постоянных интегрирования C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} используются начальные условия (12)–(14). Составляя их невязки и требуя ортогональности невязок к собственным функциям $\cos(j\pi\xi/2)$, находим

$$\begin{cases} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} + C_{2k} + C_{3k}) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = \int_0^1 \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi; \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (z_{1k} C_{1k} + z_{2k} C_{2k} + z_{3k} C_{3k}) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = 0; \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (z_{1k}^2 C_{1k} + z_{2k}^2 C_{2k} + z_{3k}^2 C_{3k}) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = 0; \end{cases} \quad (28)$$

$$(r = j = 2k - 1).$$

Вследствие ортогональности косинусов, соотношения (28) относительно неизвестных C_{1k} , C_{2k} , C_{3k} приводятся к системе трех алгебраических уравнений. Её решение

$$C_{1k} = \frac{4\eta z_{3k} z_{2k}}{(-2\mu\eta z_{3k} - r\pi z_{3k} + 2\mu\eta z_{1k} + r\pi z_{1k})(z_{1k} - z_{2k})};$$

$$C_{2k} = \frac{-4\eta z_{3k} z_{1k}}{z_{3k}(z_{1k} - z_{2k})(2\mu\eta z_{2k} + r\pi z_{2k} - 2\mu\eta) - r\pi z_{3k}};$$

$$C_{3k} = \frac{4\eta z_{1k} z_{2k}}{-2\mu\eta z_{3k} z_{1k} - r\pi z_{3k} + 2\mu\eta z_{3k}^2 + r\pi z_{3k}^2 - 2z_{2k} z_{3k} \mu\eta - r\pi z_{2k} z_{3k} + 2\mu\eta z_{1k} z_{2k} + r\pi z_{1k} z_{2k}}.$$

где $\mu = \cos((2k - 1)\pi/2)$; $\eta = \sin((2k - 1)\pi/2)$.

Результаты расчетов по формуле (27) даны на рис. 1–9, из которых следует, что при прочих равных условиях существенное влияние на температурное поле оказывает толщина пластины. Показано, что при переходе к пластинам, толщина которых соизмерима с длиной свободного пробега микрочастиц, происходит качественное изменение режима теплообмена. При этом существует некоторая толщина, отделяющая диффузионные режимы от волновых. Рассмотрим результаты расчетов для толщины пластины $\delta = 10^{-3}$ м (при $l = 10^{-10}$ м) (см. рис. 1).

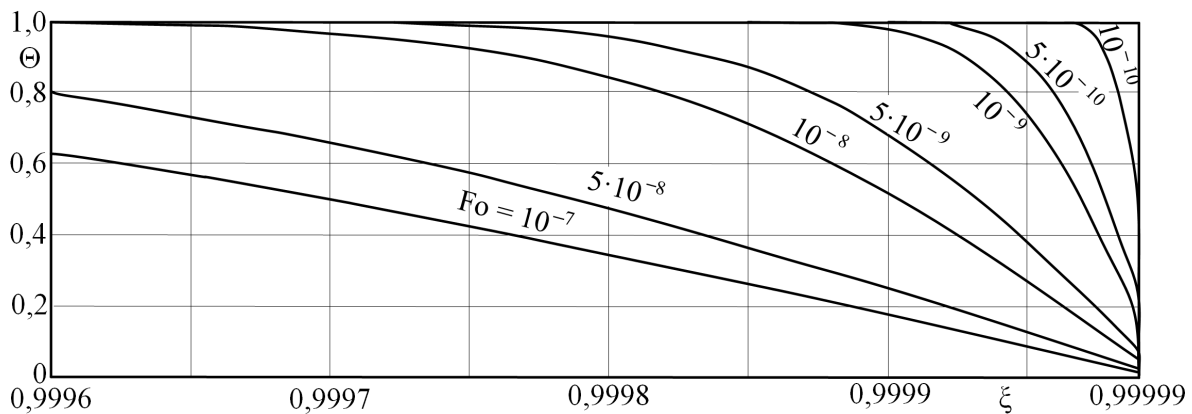


Рис. 1. Распределение температуры в диапазоне координаты $0.9996 \leq \xi \leq 1.0$.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-3} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-11} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 2 \cdot 10^{-11}$; $\text{Fo}_2 = 10^{-11}$; $\text{Fo}_3 = 10^{-22}$

Fig. 1. Temperature distribution in the coordinate range $0.9996 \leq \xi \leq 1.0$.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-3} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-11} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 2 \cdot 10^{-11}$; $\text{Fo}_2 = 10^{-11}$; $\text{Fo}_3 = 10^{-22}$

Их анализ позволяет заключить о временной задержке принятия граничного условия первого рода (16) в окрестности точки ξ . Так, при точном выполнении условия (16) непосредственно в точке $\xi = 1$, что следует из решения (27), в бесконечно малой её окрестности ($0.99999 \leq \xi \leq 1.0$) в диапазоне начального времени ($0 \leq \text{Fo} \leq 0.081$) наблюдается скачок температуры, что свидетельствует о сопротивлении, оказываемом средой процессу изменения её температурного состояния (рис. 1). Например, в точке $\xi = 0.99999$ для $\text{Fo} = 10^{-10}$; $5 \cdot 10^{-10}$; 10^{-9} ; $5 \cdot 10^{-9}$ имеют место температуры $\Theta = 0.59$; 0.28 ; 0.18 ; 0.09 . Температура $\Theta = 0$ устанавливается в этой точке лишь при $\text{Fo} \approx 0.081$. Отметим, что для всех $\text{Fo} > 10^{-8}$ полученное решение практически совпадает с точным аналитическим решением параболического уравнения теплопроводности [12]. Расхождение с точным решением параболического уравнения для $\text{Fo} < 10^{-8}$ свидетельствует о неадекватности этого решения при сверхмалых значениях временной и пространственной переменных, сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц. Таким образом, при толщинах $\delta \geq 10^{-3}$ при заданных временах релаксации τ_1 , τ_2 и длине свободного пробега микрочастиц l происходит диффузионная передача теплоты с задержкой установления граничного условия (16) в окрестности точки $\xi = 1.0$ и, как следствие, расхождение с решением параболического уравнения теплопроводности в области сверхмалых величин времени и пространства.

Расчеты при $\delta = 10^{-6}$ м ($l = 10^{-7}$ м) даны на рис. 2.

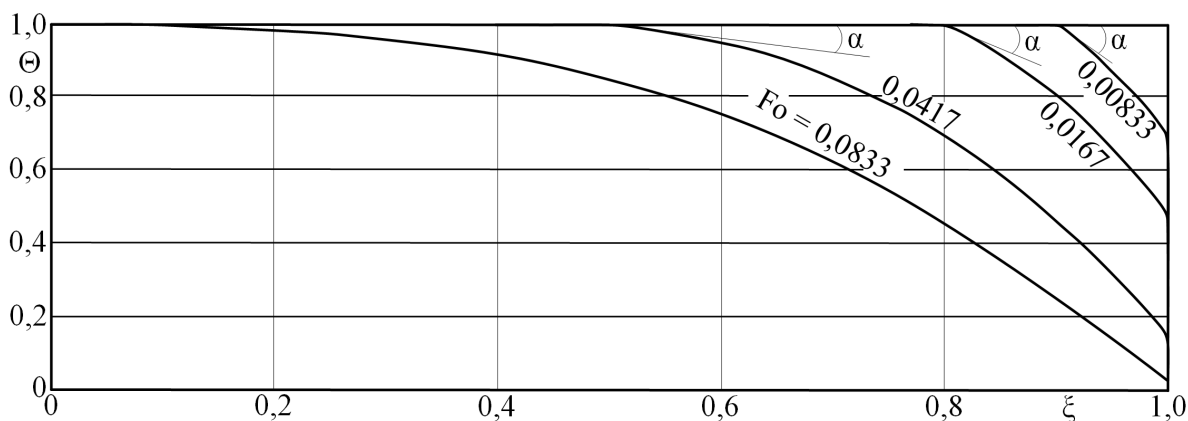


Рис. 2. Распределение температуры в диапазоне координаты.

$a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-6} \text{ м}$; $l = 10^{-7} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 1.25 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $Fo_1 = 0.025$; $Fo_2 = 0.0225$; $Fo_3 = 0.00015625$

Fig. 2. Temperature distribution in the coordinate range.

$a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-6} \text{ м}$; $l = 10^{-7} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 1.25 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $Fo_1 = 0.025$; $Fo_2 = 0.0225$; $Fo_3 = 0.00015625$

Из расчетов следует, что, как и в предыдущем случае, принятие граничного условия первого рода наблюдается в течение некоторого диапазона начального времени. Однако важным отличием является тот факт, что температурные кривые пересекают линию начальной температуры $\Theta(\xi, 0) = 1.0$ под некоторым углом α , который уменьшается с увеличением времени и принимает величину $\alpha = 0$ при достижении фронтом тепловой волны точки $\xi = 0$. Температурная кривая в этой точке касательная к линии начальной температуры $\Theta(\xi, 0) = 1.0$. Этот факт объясняется выполнением в точке $\xi = 0$ условия симметрии вида (15). Наличие угла α свидетельствует о движении фронта тепловой волны, отделяющего прогретую и непрогретую части пластины. Существенным отличием от предыдущего случая является запаздывание во времени температуры в центре пластины ($\xi = 0$) по сравнению с решением классического параболического уравнения теплопроводности. Однако, начиная с $Fo \approx 4.55$, запаздывание переходит в опережение, что является свидетельством волнового характера изменения температуры, определяемой по формуле (27).

Волновое изменение температуры в еще большей степени проявляется при дальнейшем уменьшении толщины пластины (см. рис. 3, 4).

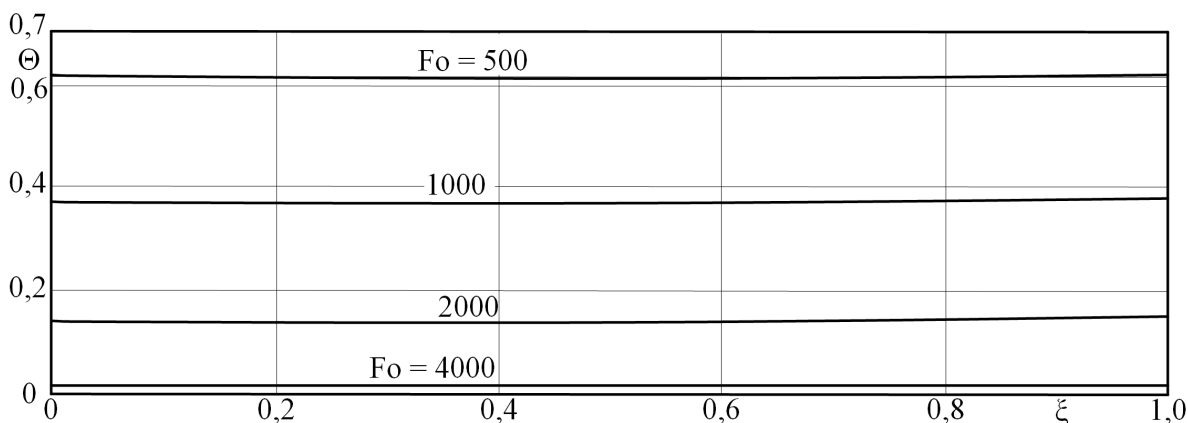


Рис. 3. Изменение температуры.

$a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-8} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $Fo_1 = 2000$; $Fo_2 = 1000$; $Fo_3 = 10^6$

Fig. 3. Temperature change. $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-8} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $Fo_1 = 2000$; $Fo_2 = 1000$; $Fo_3 = 10^6$

Так, например, при $\delta = 10^{-8} \text{ м}$ ($l = 10^{-10} \text{ м}$) теплообмен протекает при незначительных градиентах температуры в пределах толщины пластины (см. рис. 3) при периодическом (волновом) изменении температуры во времени в каждой точке пространства (см. рис. 4). При этом на оси симметрии ($\xi = 0$) кривая изменения температуры имеет изломы. Во всех других внутренних точках ($0 < \xi < 1$) происходит сглаживание изломов, что объясняется интерференцией прямых и обратных волн.

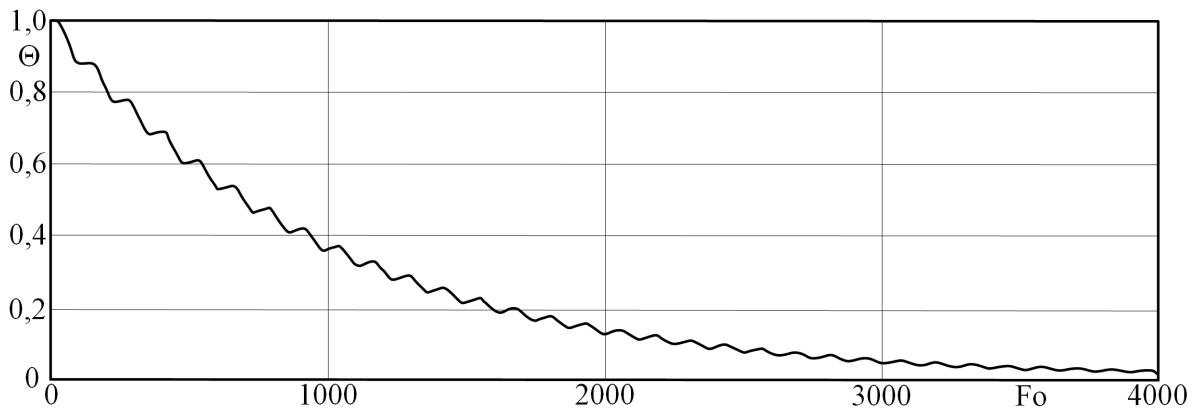


Рис. 4. Изменение температуры в центре пластины ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-8} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 2000$; $\text{Fo}_2 = 1000$; $\text{Fo}_3 = 10^6$
 Fig. 4. Temperature change at the center of the plate ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{s}$; $\delta = 10^{-8} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 2000$; $\text{Fo}_2 = 1000$; $\text{Fo}_3 = 10^6$

Дальнейшее уменьшение толщины пластины приводит к качественному изменению распределения температуры. Результаты расчетов при $\delta = 10^{-9} \text{ м}$ ($l = 10^{-10} \text{ м}$) даны на рис. 5–7.

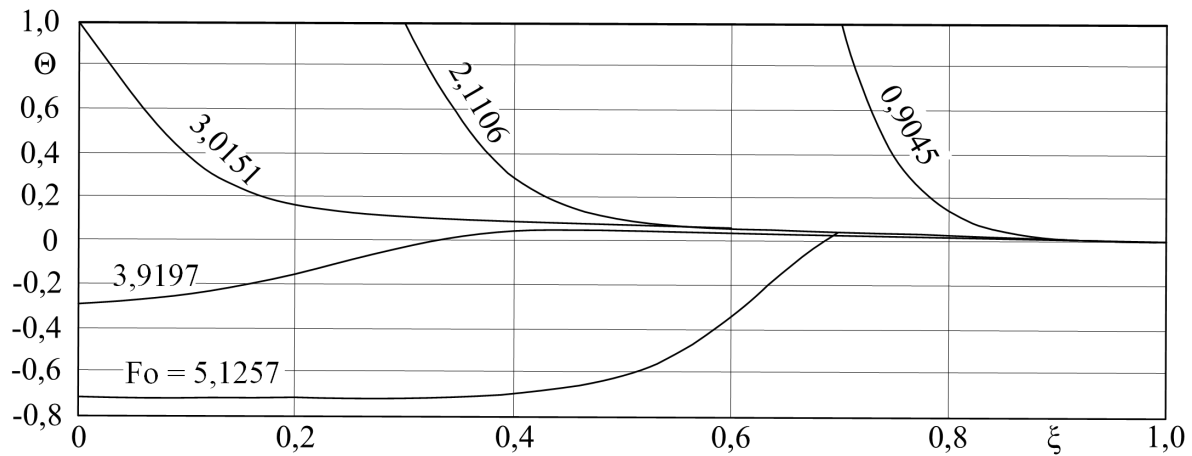


Рис. 5. Распределение температуры.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 10.1$; $\text{Fo}_2 = 0.11$; $\text{Fo}_3 = 1.0$
 Fig. 5. Temperature distribution.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{s}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 10.1$; $\text{Fo}_2 = 0.11$; $\text{Fo}_3 = 1.0$

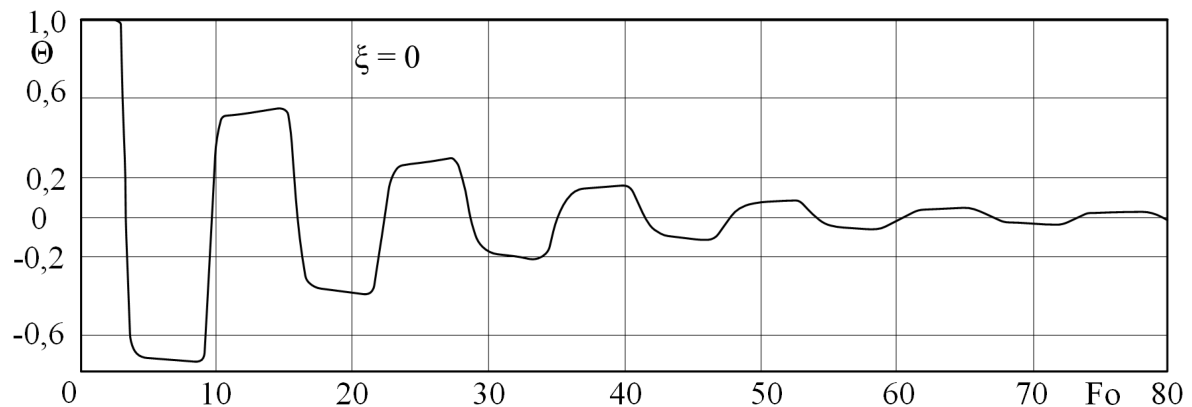


Рис. 6. Изменение температуры во времени в центре пластины ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 10.1$; $\text{Fo}_2 = 0.11$; $\text{Fo}_3 = 1$
 Fig. 6. Temperature change over time at the center of the plate ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{s}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 10.1$; $\text{Fo}_2 = 0.11$; $\text{Fo}_3 = 1$

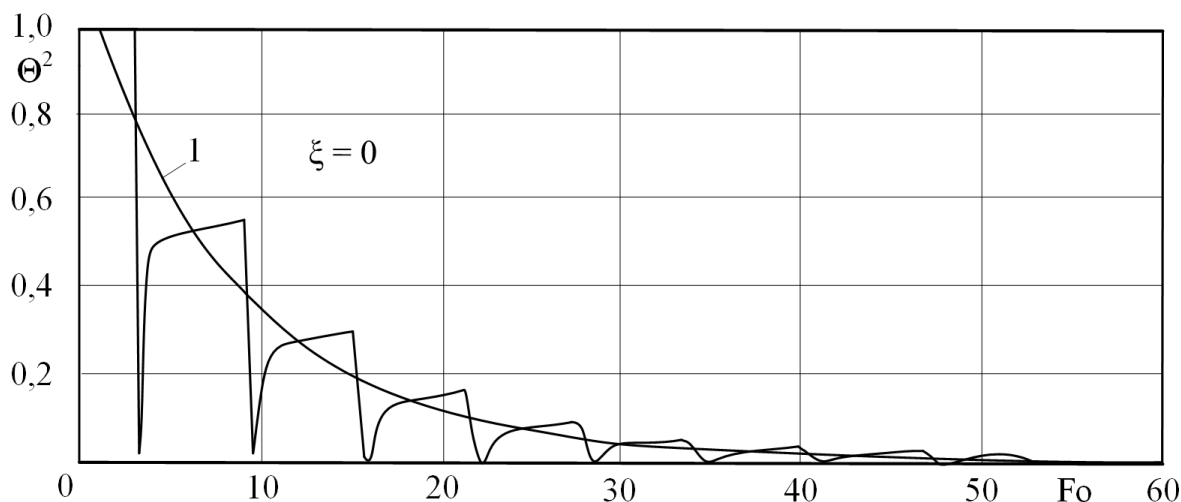


Рис. 7. Изменение квадрата амплитуды волновой функции в центре пластины ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $Fo_1 = 10.1$; $Fo_2 = 0.11$; $Fo_3 = 1$ – действительное изменение температуры

Fig. 7. Change in the square of the amplitude of the wave function at the center of the plate ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $Fo_1 = 10.1$; $Fo_2 = 0.11$; $Fo_3 = 1$ – real temperature change

Из результатов расчетов следует, что изменение температуры в центре симметрии ($\xi = 0$) происходит по закономерности, приближающейся к гармонической, включающей как положительные, так и отрицательные значения температуры (рис. 5, 6). Классическое понятие температуры, как характеристики внутренней энергии некоторой совокупности частиц, в данном случае теряет смысл. Однако, если определить квадрат амплитуды волновой функции (Θ^2), то за действительное изменение температуры можно принять кривую 1 на рис. 7. Причиной такого распределения температуры является малая величина коэффициента $Fo_2 = 0.11$ (зависящего от значений τ_2 и l) по сравнению с коэффициентами $Fo_1 = 10.1$ и $Fo_3 = 1.0$. Столь малая его величина приводит к незначительному влиянию смешанной производной в уравнении (11), сглаживающей скачкообразное изменение температуры. В подтверждение этого факта был выполнен расчет для соизмеримых между собой коэффициентов $Fo_1 = 200000$ и $Fo_2 = 100000$, найденных при значениях $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$ ($l = 10^{-10} \text{ м}$). Результаты расчетов для данного варианта исходных данных представлены на рис. 8, 9.

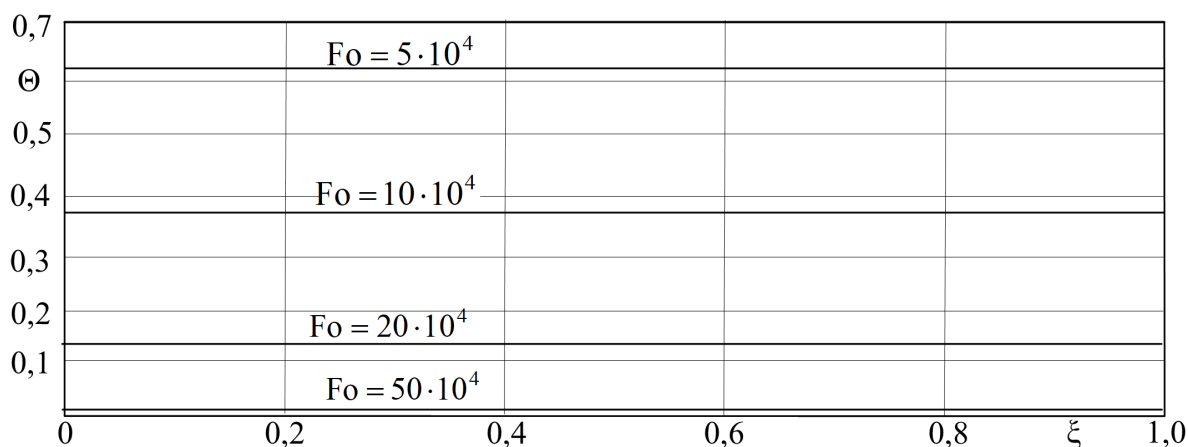


Рис. 8. Распределение температуры.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-11} \text{ с}$; $Fo_1 = 200000$; $Fo_2 = 100000$; $Fo_3 = 10^{10}$

Fig. 8. Temperature distribution.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-11} \text{ с}$; $Fo_1 = 200000$; $Fo_2 = 100000$; $Fo_3 = 10^{10}$

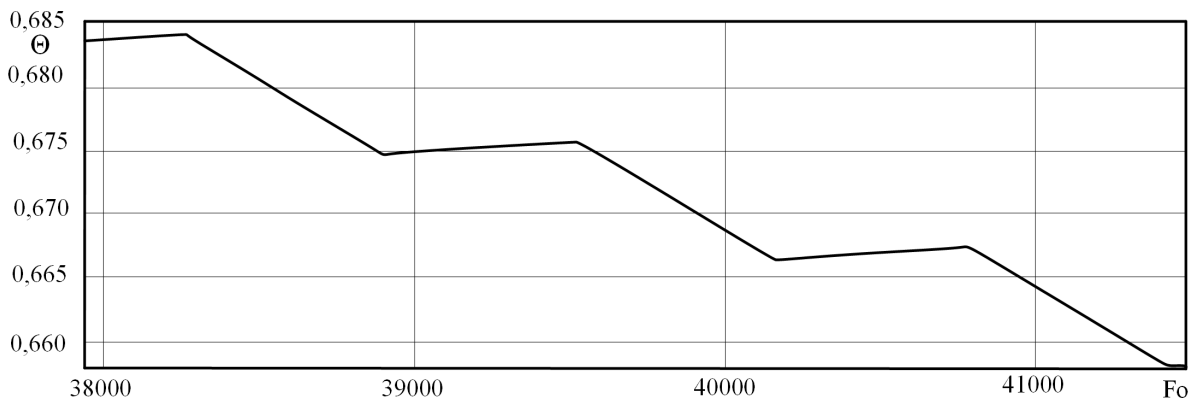


Рис. 9. Изменение температуры в центре пластины ($\xi = 0$) в диапазоне $38000 \leq Fo \leq 41500$.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $Fo_1 = 200000$; $Fo_2 = 100000$; $Fo_3 = 10^{10}$

Fig. 9. Temperature change at the center of the plate ($\xi = 0$) in the range $38000 \leq Fo \leq 41500$.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $Fo_1 = 200000$; $Fo_2 = 100000$; $Fo_3 = 10^{10}$

Из расчетов следует, что теплообмен протекает в виде периодически возникающих горизонтальных ступенек при незначительных градиентах температур по толщине пластины, что свидетельствует о диффузионно-баллистическом переносе теплоты. Обнаруженные в центре пластины изломы (рис. 9) ввиду интерференции прямых и обратных волн во всех внутренних ее точках ($0 < \xi < 1$) сглаживаются. Таким образом, при одной и той же толщине пластины δ в зависимости от величин коэффициентов релаксации τ_1 и τ_2 могут наблюдаться существенно различающиеся режимы теплообмена: от полностью волнового – при малых их значениях ($\tau_1 = 10^{-11}$, $\tau_2 = 10^{-13}$, см. рис. 5–7) до диффузионно-баллистического – при некоторых больших их значениях ($\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7}$, см. рис. 8, 9).

Полученные результаты позволяют заключить, что уравнение (11) в зависимости от соотношения величин δ , τ_1 , τ_2 , l позволяет рассчитать большое число реальных случаев локально-неравновесного теплообмена с учетом пространственно-временной нелокальности. При этом большое влияние на теплообмен (при прочих равных условиях) оказывает толщина пластины и настолько, что при переходе к наноразмерным толщинам происходит качественное изменение процесса теплообмена с появлением волнового изменения температуры и баллистического переноса теплоты.

Заключение. Выполнены исследования точного аналитического решения уравнения теплопроводности, полученного с учетом нелокальности реальных физических процессов для пластины с симметричными граничными условиями первого рода, из анализа которых следует, что для некоторых значений длин и времен свободного пробега микрочастиц (носителей энергии), определяемых соответствующими коэффициентами релаксации, в зависимости от толщины пластины наблюдаются качественно различающиеся результаты. И, в частности, в пластинах, толщина которых значительно превышает длину свободного пробега микрочастиц, преобладает диффузионный теплоперенос с задержкой принятия граничного условия первого рода, приводящей к некоторому отличию распределения температуры на начальном временном участке по сравнению с точным аналитическим решением классического параболического уравнения теплопроводности. С уменьшением толщины пластины диффузионный процесс теплообмена сменяется на волновой. При этом в зависимости от толщины пластины наблюдаются два вида волнового изменения температуры. Первый из них не сопровождается корреляцией температуры в область отрицательных ее значений – изменение температуры в каждой точке пространства происходит в форме малоамплитудных колебаний, затухающих во времени. В этом случае происходит образование стоячих волн (частный случай интерференции), связанное с наложением прямых (бегущих к центру симметрии) и обратных (бегущих от центра симметрии) волн. Изменение температуры здесь можно представить как сумму двух функций: стоячей температурной волны малой амплитуды и функции температуры, экспоненциально уменьшающейся во времени. Причем волна негармоническая – с течением времени она затухает. Для волны $\lambda = 4\delta$ пучность находится на адиабатной стенке (в центре пластины), а узлы – на торцах симметричной пластины, то есть там, где заданы граничные условия первого рода. С течением времени амплитуда волны в пучности, как и вся волна, затухает.

Второй вид волнового изменения температуры наблюдается для толщин пластины, соизмеримых с длиной свободного пробега микрочастиц. Изменение температуры в данном случае происходит с корреляцией в область отрицательных ее значений. Понятие температуры, как характеристики внутренней энергии некоторой совокупности частиц, в данном случае теряет смысл. В связи с чем, за действительное изменение температуры принимается изменение квадрата амплитуды волновой функции. Данный вариант изменения температуры наблюдается при малых значениях τ_2 и l , приводящих к малой величине Fo_2 и, следовательно, к незначительному влиянию смешанной производной в уравнении (11), оказывающей сглаживающее влияние на скачкообразное изменение температуры. Увеличение Fo_2 (за счет увеличения

τ_2) приводит к большему влиянию смешанной производной. Волновой перенос теплоты сменяется в данном случае на баллистический теплоперенос, протекающий практически при отсутствии градиентов температур по толщине пластины.

Список литературы

1. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
2. Дъярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 303 с.
3. Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1968;31:113–126. DOI: 10.1007/BF00281373.
4. Nunziato J.W. On heat conduction in materials with memory. *Quart. Appl. Math.* 1971;29:187–204.
5. Weymann H.D. Finite speed of propagation in heat conduction, diffusion and viscous shear motion. *American Journal of Physics.* 1967;35:488.
6. Faltel G. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 1972;15:369.
7. Леванов Е.И., Сотский Е.Н. Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Наука, 1987. 155 с.
8. Алексеев Б.В. Физические основы обобщённой Больцмановской теории газов. *Успехи физических наук.* 2000;170(6):649–679.
9. Алексеев Б.В. Физические принципы обобщённой Больцмановской теории ионизированных газов. *Успехи физических наук.* 2003;173(2):146–174.
10. Петров Н., Бранков И. Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986. 288 с.
11. Черешнев С.Л., Генич А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б. Эффекты поступательной неравновесности в ударных волнах в газах. Препринт ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1988. 71 с.
12. Mac Donald R.A., Tsai D.H. On the theory of disordered systems. *Phys. Rep.* 1978;46:1–100.
13. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» Институт компьютерных исследований, 2006. 528 с.
14. Sobolev S.L. Effective temperature in nonequilibrium state with heat flux using discrete variable models. *Physics Letters A.* 2017;381:2893–2897.
15. Sobolev S.L. Discrete space-time model for heat conduction: application to size dependent thermal conductivity in nano-films. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2017;108:933–939.
16. Vernott P. Les paradoxe de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comptes Rendus.* 1958;246(22):3154–3155.
17. Cattaneo G. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee. *Comptes Rendus.* 1958;247(4):431–433.
18. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена. *Инженерно-физический журнал.* 1965;9(3):287–304.
19. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 601 с.
20. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
21. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физических наук.* 1997;167(10):1096–1106.
22. Баумейстер К.У., Хамилл Т.Д. Гиперболическое уравнение теплопроводности: Решение задачи о полубесконечном теле. *Теплопередача.* 1969;(4):112–119.
23. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепло-массопереноса. М.: ИНФРА – М, 2013. 391 с.
24. Кудинов В.А., Кудинов В.И. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2020. 280 с.
25. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Исследование теплопроводности с учётом конечной скорости распространения теплоты. *Теплофизика высоких температур.* 2013;51(2):301–310.
26. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки. *Теплофизика высоких температур.* 2013;50(1):118–125.

References

1. De Groot S., Mazur P. Nonequilibrium thermodynamics. Moscow: Mir, 1964. 456 p.
2. Gyarmati I. Non-equilibrium thermodynamics. Moscow: Mir, 1974. 303 p.
3. Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1968;31:113–126. DOI: 10.1007/BF00281373.

4. Nunziato JW. On heat conduction in materials with memory. *Quart. Appl. Math.* 1971;29:187–204.
5. Weymann HD. Finite speed of propagation in heat conduction, diffusion and viscous shear motion. *American Journal of Physics.* 1967;35:488.
6. Faitel G. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 1972;15:369.
7. Levanov EI., Sotsky EN. Mathematical modeling. Nonlinear differential equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1987. 155 p.
8. Alekseev B.V. Physical foundations of the generalized Boltzmann gas theory. *Advances in Physical Sciences.* 2000;170(6):649–679.
9. Alekseev B.V. Physical principles of the generalized Boltzmann theory of ionized gases. *Advances in Physical Sciences.* 2003;173(2):146–174.
10. Petrov N., Brankov I. Modern problems of thermodynamics. Moscow: Mir, 1986. 288 p.
11. Chereshev SL., Genich AP., Kulikov SV., Manelis GB. Effects of progressive nonequilibrium in shock waves in gases. Preprint of OIHF, Academy of Sciences of the USSR. Chernogolovka, 1988. 71 p.
12. Mac Donald RA., Tsai DH. On the theory of disordered systems. *Phys. Rep.* 1978;46:1–100.
13. Zhou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics. Moscow – Izhevsk: Center for Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2006. 528 p.
14. Sobolev SL. Effective temperature in nonequilibrium state with heat flux using discrete variable models. *Physics Letters A.* 2017;381:2893–2897.
15. Sobolev SL. Discrete space-time model for heat conduction: Application to size dependent thermal conductivity in nano-films. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2017;108:933–939.
16. Vernott P. Les paradoxe de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comptes Rendus.* 1958;246(22):3154–3155.
17. Cattaneo G. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee. *Comptes Rendus.* 1958;247(4):431–433.
18. Lykov AV. Application of methods of nonequilibrium thermodynamics to the study of heat and mass transfer. *Journal of Engineering Physics.* 1965;9(3):287–304.
19. Lykov AV. Theory of heat conduction. Moscow: Higher School, 1967. 601 p.
20. Shashkov AG., Bubnov VA., Yanovsky SYu. Wave phenomena in heat conduction: A system-structural approach. Moscow: Editorial URSS, 2004. 296 p.
21. Sobolev SL. Locally nonequilibrium models of transport processes. *Physics-Uspexhi.* 1997;167(10):1096–1106.
22. Baumeister KU., Hamill TD. Hyperbolic heat conduction equation: Solution of the semi-infinite body problem. *Heat Transfer.* 1969;(4):112–119.
23. Kudinov IV., Kudinov VA. Analytical solutions of parabolic and hyperbolic heat and mass transfer equations. Moscow: INFRA-M, 2013. 391 p.
24. Kudinov VA., Kudinov VI. Methods for solving parabolic and hyperbolic heat conduction equations. Moscow: Librocom Publishing House, 2020. 280 p.
25. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Investigation of heat conduction considering the finite speed of heat propagation. *High Temperature Physics.* 2013;51(2):301–310.
26. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Derivation and analysis of the exact analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for a flat wall. *High Temperature Thermophysics.* 2013;50(1):118–125.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.01.2025

Поступила после рецензирования 28.05.2025

Принята к публикации 29.05.2025

Received January 13, 2025

Revised May 28, 2025

Accepted May 29, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Пашин Алексей Владимирович – старший преподаватель кафедры физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexey V. Pashin – Senior Lecturer of the Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

[К содержанию](#)