

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 51-7, 519.6, 517

MSC 92B05

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-117-124

EDN LERFVY

Математическая модель низкотемпературного воздействия на биоткани

Кудаева Ф. Х. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,

Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

kfatimat@yandex.ru

Аннотация. Низкотемпературное воздействие на биологические ткани сопровождается фазовыми переходами, которые приводят к появлению движущихся границ раздела фаз. Математическое моделирование таких процессов является сложной задачей, требующей специальных методов решения. В предлагаемой работе рассматривается возможность применения асимптотического интегрирования для решения задачи со свободными границами, возникающими при низкотемпературных воздействиях на биоткани, с целью упрощения моделей и получения аналитических и квазианалитических приближений, позволяющих анализировать влияние различных параметров на динамику процесса. В работе рассмотрена новая постановка двумерной задачи со свободными границами, получена более простая двумерная стационарная задача Стефана.

Ключевые слова: свободная граница, асимптотическое интегрирование, фазовые переходы, низкотемпературное воздействие, асимптотическое разложение, нулевое приближение, уравнение первого приближения

Для цитирования: Кудаева Ф. Х. 2025. Математическая модель низкотемпературного воздействия на биоткани. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 117–124. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-117-124 EDN LERFVY

Original Research

A Mathematical Model of Low-temperature Effects on Biological Tissues

Fatimat Kh. Kudayeva 

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov,

173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia

kfatimat@yandex.ru

Abstract. Low-temperature effects on biological tissues are accompanied by phase transitions that lead to the appearance of moving phase boundaries. Mathematical modeling of such processes is a complex task requiring special solution methods. The proposed paper considers the possibility of using asymptotic integration to solve the problem with free boundaries arising from low-temperature effects on biological tissues in order to simplify models and obtain analytical and quasi-analytical approximations that allow analyzing the influence of various parameters on the dynamics of the process. In this paper, we consider a new formulation of a two-dimensional problem with free boundaries, and obtain a simpler two-dimensional stationary Stefan problem.

Keywords: Free Boundary, Asymptotic Integration, Phase Transitions, Low-temperature Exposure, Asymptotic Decomposition, Zero Approximation, Equation of the First Approximation

For citation: Kudayeva F. Kh. 2025. A Mathematical Model of Low-temperature Effects on Biological Tissues. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 117–124. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-117-124 EDN LERFVY

1. Введение. Асимптотическое интегрирование задач со свободными границами относится к аналитическим методам, которые позволяют получить приближенные решения, когда точное аналитическое решение невозможно найти или его поиск связан с большими сложностями. Данный метод основан на идее рассмотрения поведения системы в предельных случаях, когда один или несколько параметров становятся очень большими или очень малыми.

К ключевым идеям и этапам асимптотического интегрирования задач со свободными границами относятся: определение малого или большого параметра, перемасштабирование переменных, асимптотическое разложение, решение задач в порядке возрастания степеней параметра, согласование асимптотических разложений.

Асимптотическое интегрирование имеет преимущества и недостатки. К преимуществам асимптотического интегрирования относится то, что данный метод позволяет получать аналитическое или квазианалитическое приближение решения, которое может быть использовано для быстрого анализа и оценки параметров. Данный метод позволяет свести сложную задачу к более простой последовательности задач, которые можно решить с помощью аналитических или численных методов. Асимптотический анализ позволяет выявить основные физические факторы, определяющие поведение системы в предельных случаях.

К недостаткам данного метода относятся ограниченная область применимости, т. е. асимптотические решения справедливы только вблизи предельного значения малого параметра. Возникают сложности при вычислении, связанные с получением высокого порядка разложений. Не всегда имеется подходящий малый параметр, который можно использовать для различных задач со свободными границами.

Асимптотическое интегрирование можно использовать для анализа поведения движущейся границы при малых и больших значениях параметра Стефана, для анализа движения капель жидкости, тонких пленок, волн на поверхности, для анализа процесса фильтрации жидкости в пористой среде с подвижной границей, для анализа скорости и формы фронта кристаллизации при малых и больших значениях переохлаждения.

Работа математика Вазова В. [1] посвящена методам асимптотического разложения для обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть использованы во многих задачах механики, электроники, астрофизики. Данная работа содержит много примеров. В своей работе [2] авторы изучают асимптотику решений слабонелинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка.

Изложению методики решения квазилинейных задач нестационарной теплопроводности методом малого параметра посвящена работа [3]. Подход, используемый в данной работе, расширяет возможности метода возмущений на класс с существенными нелинейностями.

В [4] авторы предлагают новый подход к исследованию уравнений типа Эмдена – Фаулера, применяется метод асимптотической эквивалентности.

В работе [5] строятся асимптотические формулы для решений линейного дифференциального уравнения второго порядка.

В книге [6] излагается теория пограничного слоя с позиции теорий дифференциальных уравнений. Предлагается новый подход к понятиям асимптотического ряда и псевдоаналитической функции.

Работы [7, 8] посвящены асимптотической теории решений с внутренними слоями, задаче для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения.

Актуальность представленной работы связана с тем, что с помощью асимптотического интегрирования можно во многом упростить процесс построения и исследования поставленной задачи.

Цель предлагаемой работы: применение асимптотического интегрирования к задачам со свободными границами для низкотемпературного воздействия на биологические ткани для получения более глубокого понимания физических процессов и разработке эффективных моделей для оптимизации криопроблем.

Задачи работы: 1) построение асимптотических разложений; 2) решение асимптотических задач; 3) анализ и интерпретация результатов; 4) численные расчеты.

Полученные результаты позволяют получить ценную информацию о поведении задач со свободными границами и помогут построить более эффективные модели, описывающие низкотемпературное воздействие на биологические ткани.

2. Постановка задачи. При низкотемпературных воздействиях на биологические ткани в различных областях используются криозонды с полусферическими формами аппликатора. Определение динамики порождаемого ими в биологической ткани температурного поля приводит к решению следующей нестационарной задачи со свободными границами типа Стефана [9]–[12]:

$$\begin{aligned} \Delta u - k(u)u_t &= f(u), \quad y_0 < y < y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(y, x, 0) &= 0, \quad y = y_0, \quad 0 < x < 1, \quad (y_1(x, 0) = y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= H(P)[v(u) - v_c], \quad x = 0, \quad y_0 < y < y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad x = 1, \quad y_0 < y < y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ [u] &= 0, \quad y = y^*, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{y=y^*}^{y=y_1(x,t)}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Delta u = y^{-2}(y^2 u_y)_y + y^{-2}[(1 - x^2)u_x]_x$ – осесимметричная часть оператора Лапласа в сферической системе координат $y, \varphi, \Theta = \arccos x$.

В задаче (1) искомыми являются функции, которые описывают температурное поле и температуру раздела фаз:

$$u = u(y, x, t), \quad y_0 \leq y \leq y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$y = y^*(x, t), \quad 0 < x < 1; \quad y_1 = y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Остальные числовые параметры k, γ, β, u^* и функции $H(P), v_c(y, x, t), k(u) = k + (1 - k)\eta(u - u^*), f(u) = u^\beta \eta(u - u^*), v(u) = u + [1 + \gamma(u - 1) - u]\eta(u - u^*), \eta(u)$ – функция Хевисайда известны.

3. Асимптотическое разложение. Суть асимптотического интегрирования состоит в том, что решение, включая положение свободной границы, ищется в виде ряда по степеням малого параметра. Подставляя асимптотическое разложение в исходные уравнения и граничные условия и приравнивая при одинаковых степенях ε , получается последовательность задач для определения членов разложения u_i и s_i . Далее решаются полученные задачи в порядке возрастания степеней малого параметра. Обычно задача нулевого порядка ε^0 оказывается значительно проще, чем исходная задача, и часто имеет аналитическое решение. Решения более высокого порядка добавляют поправки к нулевому приближению, делая его более точным.

В случае, когда в задаче присутствуют несколько масштабов, то для каждого из них строится свое асимптотическое разложение. Для получения единого решения, справедливого во всей области, необходимо «согласовать» эти разложения в переходной области.

В реальных ситуациях, когда коэффициент теплообмена с окружающей средой $H(P) = \varepsilon(y) \ll 1$, решение задачи (1) можно искать в виде:

$$u = \sum_{n=0}^N u_n \varepsilon^n, \quad y^* = \sum_{n=0}^N y_n^* \varepsilon^n, \quad N \geq 1. \quad (2)$$

Если подставить (2) в (1) и еще приравнять коэффициенты при ε^0 , приходим к сферически-симметричной одномерной задаче Стефана относительно пары функций $u_0 = u_0(y, t)$ и $y_0^* = y_0^*(t)$:

$$y^{-2}(y^2 u_{0y})_y + f(u_0) - k(u_0)u_{0t} = 0, \quad y_0 < y < \infty, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u_0(y, 0) = 0, \quad y_0 < y < \infty,$$

$$u_{0y} = H_A[v(u_0) - v_A(t)], \quad y = y_0, \quad t > 0,$$

$$[u_0] = 0, \quad [u_{0y}] = 0, \quad y = \infty, \quad t > 0,$$

$$[u_0] = 0, \quad y = y_0^*, \quad [u_{0y}] = P y_{0t}^*, \quad y_0^* = y_0^*(t), \quad t > 0.$$

Для $u_1 = u_1(y, x, t)$ получается двумерная линейная задача на сопряжение на уже известной полуокружности $y = y_0^*(t)$:

$$\Delta u_1 - k u_{1t} = 0, \quad y_0 < y < y^*, \quad t > 0,$$

$$\Delta u_1 - k u_{1t} = f'(u_0) \varepsilon u_1 = 0, \quad y^* < y < \infty, \quad t > 0,$$

$$u_1(y, x, 0) = 0, \quad y^* < y < \infty, \quad 0 < x < 1,$$

$$[u_1]_{y_0^*} = -\frac{P y_{0t}^*}{u_{0y}^\pm(y_0^*, t)} u_1(y_0^*, x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$[u_1]_{y_0^*} = -\frac{P y_{0t}^{*-1} y_{0t}^*}{u_{0y}^\pm(y_0^*, t)} u_1(y_0^*, x, t) + P \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{u_1(y_0^*, x, t)}{u_{0y}^\pm(y_0^*, t)} \right\},$$

$$y^{-1} u_{1x} = v(u_0) - v_c(t), \quad x = 0, \quad y_0 < y < \infty, \quad t > 0,$$

$$u_1 < \infty, \quad (u_{1x} = 0), \quad x = 1, \quad y_0 < y < \infty, \quad t > 0,$$

$$u_1 = 1, \quad u_{1y} = 0, \quad y = \infty, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_0(y_0^* + \varepsilon y_1^*, t) + \varepsilon u_1(y_0^* + \varepsilon y_1^*, x, t) = 0. \quad (5)$$

Из (5) следует,

$$y_1^*(x, t) = \frac{u_1(y_0^*, x, t)}{u_{0y}^\pm(y_0 \pm 0, t)}. \quad (6)$$

Проведенный анализ показывает, что формально полученные в задаче (4) условия сопряжения корректны, второе из этих условий содержит дельта-функцию Дирака, несмотря на то, что

$$u_{0yy} = [u_{0y}]_{y_0^*} + \delta(y - y_0^*) + u_{0yy} = -P y_{0t} \delta(y - y_0^*) + u_{0yy}, \quad (7)$$

так как в силу четности $[\delta(y - y_0^*)]_{y_0^*} = 0$ и $[u_{0yy}]_{y_A^*} = [\tilde{u}_{0yy}]_{y_A^*}$. Волнистая черта в условии означает обычную не обобщенную функцию, для которой справедливо равенство:

$$[u_{0yy}]_{y_A^*} = \tilde{u}_{0yy}(y_0^* + 0, t) - \tilde{u}_{0yy}(y_0^* - 0, t). \quad (8)$$

Из уравнения нулевого приближения (3) получается:

$$\begin{aligned} [u_0]_{y_0^*} &= 0, \\ [u_{0y}]_{y_0^*} &= -Py_{0t}^*, \quad y_0^* = y_0^*(t), \quad t > 0, \\ u_{0yy} &= \begin{cases} -2y^{-1}u_{0y} + ku_{0t}, & y < y_A^*, \\ -2y^{-1}u_{0y} + u_{0t}, & y > y_0^*. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следует, что $[\tilde{u}_{0yy}]_{y_A^*} = 2Py_0^{*-1}y_{0t}$, которое следует из условия непрерывности, а также из уравнения (4), если учесть, что:

$$\eta(u_0) - \eta(y - y_0^*), \quad \delta(u_0)u_{0t} = -\delta(y - y_0^*)y_{0t}^* \quad (10)$$

и выполнить интегрирование последнего в пределах от $y_0^* - 0$ до $y_0^* + 0$

$$[u_{0y}]_{y_0^*} = -Py_{0t}^*. \quad (11)$$

В силу равенств (8) условия сопряжения задачи (4) упрощаются к виду:

$$\begin{aligned} [u_1]_{y_0^*} &= -\frac{y_{0t}^*}{\tilde{u}_{0y}^\pm(y_0^*, t)} Pu_1(y_0^*, x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ [u_1]_{y_0^*} &= \frac{2Py_{0t}^* u_1(y_0^*, x, t)}{u_{0y}^\pm(y_0^*, t)} + P \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u_1(y_0^*, x, t)}{\tilde{u}_{Ay}(y_0^*, t)} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\tilde{u}_{0y}^+ = \tilde{u}_{0y}(y_0^* + 0, t), \quad \tilde{u}_{0y}^- = \tilde{u}_{0y}(y_0^* - 0, t), \quad (13)$$

а знак «+» или «-» выбирается в соответствии со знаком u_1 : $u_1(y_0^*, x, t) < 0$ или $u_1(y_0^*, x, t) > 0$.

В случае, когда $t \rightarrow \infty$, $u(x, y, t) \rightarrow u(x, y)$, а $y^*(x, t) \rightarrow y^*(x)$ получаются более простые двумерные стационарные задачи Стефана, вытекающие из задачи (1):

$$\begin{aligned} Lu &= y^{-2}(y^2 u_y)_y + y^{-2}[(1-x^2)u_x]_x + f(u) = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \\ y^{-1}u_x &= \varepsilon(y)[\gamma(u_c) - \gamma(u)], \quad x = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \\ u(x, \bar{y}) &= 0, \quad u_n(x, \bar{y}) = 0, \quad y = \underline{y}, \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (14)$$

4. Нулевое приближение. Согласно (3), после асимптотического разложения при $\varepsilon(y) \leq 1$:

$$u = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k, \quad \varepsilon = \varepsilon(y) \leq 1, \quad u_k = u_k(x, y), \quad N \geq 1, \quad (15)$$

уравнение нулевого приближения u_0 имеет вид:

$$\begin{aligned} Lu_0 &= y^{-2}(y^2 u_{0y})_y + y^{-2}[(1-x^2)u_{0x}]_x + f(u_0) = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \\ u_{0y} &= h(u_0 - u_A), \quad y = \underline{y}, \\ y^{-1}u_{0x} &= 0, \quad x = 0, \quad u_0 < \infty, \quad x = 1, \quad \underline{y} < y < \bar{y}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как решение задачи (16) не зависит от x , т. е.

$$u_0(x, y) = u_0(y), \quad (17)$$

то для определения $u_0(y)$ получаем следующую одномерную стационарную задачу Стефана:

$$\begin{aligned} y^{-2}(y^2 u_0') + f(u_0) &= 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y} \leq \infty, \\ u_0'(\underline{y}) &= h(u_0 - u_A), \quad u(\bar{y}) = 1, \quad (u_0(y) = u_0). \end{aligned} \quad (18)$$

С введением координаты изотермы замораживания $y = y^*$ ($u_0(y^*) = 0$) задача (18) записывается в виде:

$$y^{-2}(y^2 u_0')' = 0, \quad \underline{y} < y < y^*,$$

$$\begin{aligned}
y^{-2}(y^2 u_0')' + u_0^\beta &= 0, \quad y^* < y < \bar{y} \\
u_0'(y) &= h(u_0 - u_A), \quad u(\bar{y}) = 1, \\
[u]_{y^*} &= 0, \quad [u']_{y^*} = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

где знак $[]_{y^*}$ означает скачок стоящей под ним функции в точке y^* .

Используя общее решение дифференциального уравнения задачи (19) в замороженной биологической ткани $c_1 + c_2/y$ и в незамороженной биологической ткани $1 + c_2 e^{-y}/y$, после удовлетворения краевым условиям и условиям сопряжения задачи (19) получается система нелинейных уравнений относительно c_1, c_2, c_3 и y^* . Разрешив последнюю, находим точное решение задачи (19):

$$u_0(y) = \begin{cases} (1 - \frac{y^*}{y} \frac{y-y}{y^*-y}), & y \leq y \leq y^*, \\ \Delta^{-1}(y^*)(1 - \frac{y^*}{y} e^{(y^*-y)/y}), & y^* \leq y \leq \bar{y}, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$\Delta(y^*) = 1 - y^* e^{(y^*-y)/y}, \tag{21}$$

$$\frac{y^*}{y(y-y^*)} u_0 = h(u_0 - u_A). \tag{22}$$

Из (22) следует:

$$u_0 = \frac{y(y^* - y)}{y^* + y(y^* - y)h} u_A, \tag{23}$$

$$\frac{y}{y^*(y-y^*)} u_0 = \Delta^{-1}(y^*)(1 + \frac{1}{y^*}). \tag{24}$$

Из (24) следует:

$$u_0 = \frac{(1 + y^*)(y - y^*)}{y \Delta(y^*)}, \tag{25}$$

а y^* определяется как положительный корень уравнения:

$$y^{-2}(1 + h y) + y^*[1 + y(1 - y)h] - \frac{y}{y^*} h \left[1 - \frac{u_A \Delta}{y^*} \right] = 0. \tag{26}$$

В частности, в случае, когда $y = \infty$, $\Delta(y^*) = 1$ уравнение (26) вырождается в квадратное уравнение с единственным положительным корнем:

$$y^* = [2(1 + h y)]^{-1} \left\{ \sqrt{[1 + y(1 - y)h]^2 + 4(1 + h y)h y^2(1 - u_A)} - [1 + y(1 - y)h] \right\}. \tag{27}$$

В этом случае из уравнения общего баланса тепловой энергии следует:

$$\int_y^\infty Lu_0 y^2 dy = \int_y^{y^*} Lu_0 y^2 dy + \int_{y^*}^\infty Lu_0 y^2 dy = y^2 u_0 y|_y^{y^*} + y^2 u_0 y|_{y^*}^\infty + \int_{y^*}^\infty f(u_0) y^2 dy = 0 \tag{28}$$

с учетом краевого условия и точного решения (20), находим:

$$y^2 h(u_0 - u_A) = y^{*2} + y^* \rightarrow u_0 = u_A + y^*(1 + y^*)/y^2 h. \tag{29}$$

По физическому смыслу $y^* \geq y$, что достигается при следующем ограничении на h :

$$h \geq (1 + y)/(y |u_A|). \tag{30}$$

В общем случае уравнение теплового баланса записывается в виде:

$$y^2 h(u_0 - u_A) = (y^{*2} + y^*) \Delta^{-1}(y^*) + \frac{1}{3} (y^{-3} - y^{*3}) [1 - \Delta^{-1}(y^*)]. \tag{31}$$

Из (31) следует:

$$u_0 = u_A + \frac{(y^{*2} + y^*)\Delta^{-1}(y^*) + \frac{1}{3}(\bar{y}^2 - y^*)[1 - \Delta^{-1}(y^*)]}{y^2 h}.$$

5. Уравнения первого приближения. Предварительно разложив функцию $f(u_0 + \varepsilon u_1)$ в ряд Тейлора и собирая коэффициенты при ε , для определения $u_1(x, y)$ получается следующая краевая задача:

$$L_1 u_1 = y^{-2}(y^2 u_{1y})_y + y^{-2}[(1 - x^2)u_{1x}]_x - u_1 \eta(u_0) + f(u_0)u_1 = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \quad (32)$$

$$u_{1y} = h u_1, \quad y = \underline{y}, \quad u_1 = 0, \quad y = \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \quad y^{-1} u_{1x} = [\gamma(u_c) - \gamma(u_0)], \quad x = 0,$$

$$u_0(y^*) = 0, \quad \delta(u_0(y)) = \frac{\delta(y - y^*)}{u'_0(y^*)} = \frac{y^* \delta(y - y^*)}{1 + y^*}.$$

В каждой из подобластей биологической ткани $y < y^*$ и $y > y^*$ получаются уравнения:

$$y^{-1}(y^2 u_{1y})_y + y^{-2}[(1 - x^2)u_{1x}]_x = 0, \quad \underline{y} < y < y^*,$$

$$y^{-1}(y^2 u_{1y})_y + y^{-2}[(1 - x^2)u_{1x}]_x - f(u_0)\varepsilon u_1, \quad y^* < y < \bar{y}, \quad (33)$$

с краевыми условиями

$$y^{-1} u_{1x} = \gamma(u_c) - u_0, \quad x = 0, \quad \underline{y} < y < y^* \quad (34)$$

и условиями сопряжения при $y = y^*$

$$[u_1]_{y^*} = 0, \quad [u_{1y}]_{y^*} = \frac{y^* u_1(x, y^*)}{1 + y^*}, \quad 0 < x < 1, \quad (35)$$

где $\gamma(u_c) = u_c + (\gamma u_c - u_c)\eta(u_c)$. В частном случае $\beta = 0$, когда $f(u) = u^\beta = 1$, правая часть уравнения (1) линейна. Для такого оператора задачи (1) имеет место вторая формула Грина:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} (\varphi L_1 u - u L_1 \varphi) y^2 dy dx = \\ & = \int_0^1 (\bar{y}^{-2} (\varphi u_y - u \varphi_y))|_{y=\underline{y}-y^2[\varphi(u_y-hu)-u(\varphi_y-h\varphi)_1]}|_{y=\underline{y}} dx - \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} (\varphi u_x - u \varphi_x)|_{x=0} dy. \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим функцию Грина $G(x, y; \xi, \eta)$, определяемую как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} L_1 G &= y^{-2}(y^2 G_y) + y^{-2}[(1 - x^2)G_x]_x - G \left[\eta(y - y^*) - \frac{y \delta(y - y^*)}{1 + y^*} \right] = \\ &= -\delta(y - \eta) \delta(x - \xi), \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \quad 0 < x, \xi < 1, \\ G_y &= h G, \quad y = \underline{y}, \quad G = 0, \quad y = \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \\ y^{-1} G_x &= 0, \quad x = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}. \end{aligned} \quad (37)$$

При $u = u_1(x, y)$, $\varphi = G$ из (36), (37) и (32)–(35) получается интегральное представление:

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \eta) &= - \int_{y(\xi)}^{y^*(\xi)} G(y; \xi, \eta) [\gamma(u_c(y)) - u_0(y)] y dy - \\ &- \int_{y^*(\xi)}^{\bar{y}(\xi)} G(y; \xi, \eta) [\gamma[u_c(y)] - \gamma u_0(y)] y dy. \end{aligned} \quad (38)$$

Используя оставшиеся краевые условия:

$$u_1(\xi, y^*(\xi)) = 1, \quad u_1(\xi, \bar{y}(\xi)) = 0. \quad (39)$$

определяем неизвестные функции $y^* = y^*(\xi)$ и $\bar{y} = \bar{y}(\xi)$, которые содержатся в полученном интегральном представлении (38).

6. Заключение. Асимптотическое интегрирование – это один из мощных методов для анализа задач со свободными границами, который позволяет получить аналитические или квазианалитические приближенные решения. Несмотря на определенные ограничения, данный метод является ценным инструментом для понимания основных физических принципов и создания эффективных моделей для различных приложений. Умение использовать этот инструмент требует знания асимптотических методов, дифференциальных уравнений и понимания физических процессов, лежащих в основе рассматриваемой задачи.

Список литературы

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир; 1968. 464 с.
2. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А., Олейник О.А. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях. *Математический сборник*. 1998;189(3): 45–68.
3. Коздоба Л. А., Чумаков В.Л. Методика применения метода малого параметра при решении квазилинейных задач нестационарной теплопроводности с существенными нелинейностями. *ТВТ*. 1971;9(3):557–562.
4. Мамедова Т.Ф., Егорова Д.К., Десяев Е.В., Хесс Р. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений типа Эмдена – Фаулера. *Вестник Мордовского университета*. 2016; 26(4):440–447.
5. Нестеров П.Н. Асимптотическое интегрирование одного класса систем функционально-дифференциальных уравнений. *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. 2013;(1):137–145.
6. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского университета; 2011. 456с.
7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н. Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями. *Дифференциальные уравнения и топология. I, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН*, 268, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 268–283; *Proc. Steklov Inst. Math.*, 268 (2010), 258–273.
8. Васильева А.Б., Нефёдов Н.Н., Радченко И.В. О внутреннем переходном слое в сингулярно возмущенной начальной задаче. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1996;36(9):105–111. *Comput. Math. Math. Phys.* 1996;36(9):1251–1256.
9. Березовский А.А. Двумерные модели криодеструкции биоткани. *Мат. моделирование физических процессов. Сборник научных трудов. Киев. Институт математики АН УССР*. 1989:14–38.
10. Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А. Кармоков М.М. Есанкулова М.Х. Двумерные задачи со свободными границами в проблемах медицины. *Южно-Сибирский научный вестник*. 2022;2:36–40.
11. Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х. Двумерные задачи со свободными границами в медицине. *Южно-Сибирский научный вестник*. 2014;3:16–18.
12. Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А. Нагоров А.Л. Двумерные задачи со свободными границами в проблемах медицины. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. 2022;2:80–92.

References

1. Vazov V. Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations. Moscow: Mir, 1968; 464 p.
2. Egorov YuV., Kondratiev VA., Oleinik OA. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems in cylindrical domains, *Mathematical Notes*. 1998;189(3):45–68.
3. Kozdoba LA., Chumakov VL. Methodology for applying the small parameter method in solving quasi-linear problems of unsteady thermal conductivity with significant nonlinearities, *TVT*. 1971; 9(3):557–562.
4. Mammadova TF., Egorova DK., Desyaev EV., Hess R. Asymptotic integration of Emden-Fowler type differential equations, *Bulletin of the Mordovian University*. 2016;26(4):440–447.
5. Nesterov PN. Asymptotic integration of one class of systems of functional differential equations, *Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky*. 2013;1(3):137–145.
6. Lomov SA., Lomov IS. Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer. Moscow: Moscow University Press., 2011; 456 p.
7. Vasilyeva AB., Butuzov VF., Nefedov NN. Singularly perturbed problems with boundary and inner layers, *Differential equations and topology. I, Collection of articles. On the 100th anniversary of the birth of Academician Lev Semenovitch Pontryagin, Proceedings of the MIAN*. 268, MAIK "Science/Interperiodics Moscow. 2010:268–283, *Proc. Steklov Inst. Math*. 2010; 268, 258–273.
8. Vasilyeva AB., Nefedov NN., Radchenko IV. On the inner transition layer in a singularly perturbed initial problem, *J. computing. matem. and mathematical physics.*, 36:9 (1996), 105–111; *Comput. Math. Math. Phys.*, 36:9 (1996), 1251–1256.

9. Berezhovsky AA. Two-dimensional models of cryodestruction of biological tissue// Mat. modeling of physical processes, *Collection of scientific papers*. - Kiev, *Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*. 1989:14–38
10. Kudayeva FKh., Kaygermazov AA. Karmokov MM. Yesankulova MKh. Two-dimensional problems with free boundaries in problems of medicine, *South Siberian Scientific Bulletin*. 2022;2:36–40.
11. Kaygermazov AA., Kudayeva FKh. Two-dimensional problems with free boundaries in medicine, *South Siberian Scientific Bulletin*. 2014;3:16–18.
12. Kudayeva FKh., Kaygermazov AA. Nagorov AL. Two-dimensional problems with free boundaries in medical problems, *Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2022;2:80–92.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.03.2025

Received March 21, 2025

Поступила после рецензирования 19.05.2025

Revised May 19, 2025

Принята к публикации 24.05.2025

Accepted May 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кудаева Фатимат Хусейновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Fatimat Kh. Kudayeva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nalchik, Russia

[К содержанию](#)