

## МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 512.532  
MSC 20M99  
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-159-171  
EDN CJVXUK

### Ранги планарности модулярных многообразий полугрупп

Соломатин Д. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Омский государственный педагогический университет,  
Россия, 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, 14

[solomatin\\_dv@omgpu.ru](mailto:solomatin_dv@omgpu.ru)

**Аннотация.** Рангом планарности многообразия полугрупп называем наибольшее число образующих свободной полугруппы многообразия, относительно которых полугруппа допускает планарный граф Кэли. За прошедшее время, с момента когда Л. М. Мартыновым была сформулирована задача описания рангов планарности полугрупповых многообразий, было получено много конкретных результатов в этом направлении. Модулярным многообразием полугрупп называется многообразие полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. В настоящей статье вычислены точные значения рангов планарности бесконечного счетного множества всех возможных модулярных многообразий полугрупп. Оказалось, что эти значения не превосходят 3. При доказательстве в большинстве своём используются машинные вычисления. Средствами Prover9 и Mace4 проверяются равенства элементов свободных полугрупп многообразий, задаваемых тождествами в большом количестве. Для доказательства непланарности графов используется критерий Понтрягина – Куратовского, а при обосновании планарности косвенно задействован инвариант Колен де Вердьера.

**Ключевые слова:** модулярные многообразия, графы Кэли полугрупп, свободные полугруппы многообразий, проблема равенства слов

**Для цитирования:** Соломатин Д.В. Ранги планарности модулярных многообразий полугрупп. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):159–171. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-159-171 EDN CJVXUK

Original Research

### Planarity Ranks of Modular Varieties of Semigroups

Denis V. Solomatin 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasilyev V. B.)

Omsk State Pedagogical University,  
14 Tukhachevsky Emb., Omsk 644099, Russia

[solomatin\\_dv@omgpu.ru](mailto:solomatin_dv@omgpu.ru)

**Abstract.** By the planarity rank of a semigroup variety we mean the largest number of generators of a free semigroup of a variety with respect to which the semigroup admits a planar Cayley graph. Since the time when L.M. Martynov formulated the problem of describing the planarity ranks of semigroup varieties, many specific results have been obtained in this direction. A modular variety of semigroups is a variety of semigroups with a modular lattice of subvarieties. In this paper, we calculate the exact values of the planarity ranks of an infinite countable set of all possible modular varieties of semigroups. It turns out that these values do not exceed 3. Machine calculations are mostly used in the proof. Prover9 and Mace4 are used to check the equalities of elements of free semigroups of varieties defined by a large number of identities. To prove the non-planarity of graphs, the Pontryagin–Kuratovsky criterion is used, and the Colin de Verdière invariant is indirectly used to justify planarity.

**Keywords:** Modular Varieties, Cayley Graphs of Semigroups, Free Semigroups of Varieties, Word Problem

**For citation:** Solomatin DV. Planarity Ranks of Modular Varieties of Semigroups. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):159–171 (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-159-171 EDN CJVXUK

**1. Введение.** Исследование возможности представления полугрупп при помощи графов активно занимает умы современников [1], мы же рассматриваем такое представление в контексте вычисления рангов планарности полугрупповых многообразий.

Напомним [4], что модулярным многообразием полугрупп называется многообразие полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий, другими словами, с такой решёткой, в которой каждая пара элементов  $a, b \in L$  модулярна, то есть справедлив закон модулярности — квазитожество:  $\forall x \in L : x \leq b \Rightarrow x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$ . Любая немодулярная решётка содержит пятиэлементный пентагон  $N_5$  в качестве подрешётки.

Модулярные многообразия полугрупп давно охарактеризованы разными способами. В следующей лемме приведем одну из известных характеристик на языке тождеств.

**Лемма.** [[4], Теорема 1 (эквациональный вариант) как результат из [3]] *Многообразие полугрупп модулярно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одной из следующих систем тождеств (где  $n$  — натуральное число):*

- ( $m1_n$ ):  $xy = (xy)^{n+1}$ ;
- ( $m2_n$ ):  $xy = x^{n+1}y$ ,  $(xy)^{n+1} = xy^{n+1}$ ,  $xyzt = xyx^nzt$ ;
- ( $m3_n$ ):  $xy = xy^{n+1}$ ,  $(xy)^{n+1} = x^{n+1}y$ ,  $xyzt = xyt^nzt$ ;
- ( $m4_{n,\pi}$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yx = yx^2 = x^{n+2}y$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m5_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yx = yx^2$ ,  $x^3yz = xy^3z$ ,  $x^6 = x^7$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m6_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yx = yx^2$ ,  $x^2y^2z = xy^2z^2$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m7_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yx = yx^2$ ,  $x^3yz = xy^2z^2$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m8_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yx$ ,  $xy^2 = yx^2$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m9_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = yxy$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m10_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yxy$ ,  $xy^2 = yx^2$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m11_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = yxy$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m12_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = xy^2$ ,  $xyx = yxy$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m13_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yxy = yx^2$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m14_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yxy = xy^2$ ,  $x^4y = yx^4$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m15_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yxy = xy^2$ ,  $x^4y = yx^4$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m16_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xyx = x^2yx$ ,  $x^3y = yx^3$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m17_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyx = xyx^2$ ,  $x^3y = yx^3$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m18_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xyx = yxy$ ,  $x^3y = yx^3$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m19_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $xyx = yxy$ ,  $x^3y = yx^3$  ( $\pi \in \Pi_1$ );
- ( $m20_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = yx^2$ ,  $xyx = yxy$  ( $\pi \in \Pi_2$ );
- ( $m21$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = yx^2$ ,  $xyx = yxy$ ,  $x^2yz = y^2zx$ ;
- ( $m22$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = yx^2$ ,  $xyx = yxy$ ,  $x^2yz = yzyx$ ;
- ( $m23$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = yx^2$ ,  $xyx = yxy$ ,  $xyxz = yzyx$ ;
- ( $m24_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $x^3y = yx^3$  ( $\pi \in \Pi_3$ );
- ( $m25_\pi$ ):  $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $x^3y = yx^3$  ( $\pi \in \Pi_3$ );
- ( $m26$ ):  $xyzt = ztxy$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyxz = yxzx$ ;
- ( $m27$ ):  $xyzt = ztxy$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyxz = yxyz$ ;
- ( $m28$ ):  $xyzt = ztxy$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyzy = xzyz$ ;
- ( $m29$ ):  $xyzt = ztxy$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $xyxz = yxzx$ ;
- ( $m30$ ):  $xyzt = ztxy$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $xyxz = yxyz$ ;
- ( $m31$ ):  $xyzt = ztxy$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $xyzy = xzyz$ ;
- ( $m32$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyxz = yzxz$ ;
- ( $m33$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyxz = yxzy$ ;
- ( $m34$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyxz = zxzy$ ;
- ( $m35$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyxz = yzyx$ ;
- ( $m36$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = x^3y$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyzx = yxzy$ ;
- ( $m37$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $xyxz = yzxz$ ;
- ( $m38$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $xyxz = yxzy$ ;
- ( $m39$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $xyxz = zxzy$ ;
- ( $m40$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $xyxz = yzyx$ ;
- ( $m41$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = xy^3$ ,  $xyzx = yxzy$ ;
- ( $m42$ ):  $xyzt = yxtz$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = (xy)^2$ ;
- ( $m43$ ):  $xyzt = yxtz$ ,  $x^2y = (xy)^2$ ,  $xy^2 = yx^2$ ;
- ( $m44$ ):  $xyzt = ztxy$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = (xy)^2$ ,  $xyxz = yxzx$ ;
- ( $m45$ ):  $xyzt = ztxy$ ,  $x^2y = (xy)^2$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyxz = yxzx$ ;
- ( $m46$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = y^2x$ ,  $xy^2 = (xy)^2$ ,  $xyzx = yxzy$ ;
- ( $m47$ ):  $xyzt = tzyx$ ,  $x^2y = (xy)^2$ ,  $xy^2 = yx^2$ ,  $xyzx = yxzy$ ,

где

$$\Pi_1 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\};$$

$$\Pi_2 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24)\};$$

$$\Pi_3 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34)\}.$$

Планарные автоматы, тесным образом связанные с графами Кэли полугрупп, в частности клеточные автоматы, тоже имеют множество практических применений и активно изучаются по нескольким

причинам. Например, они используются для моделирования различных природных и искусственных систем, таких как распространение огня, рост популяций, распространение болезней и даже поведение толпы. Планарные автоматы помогают исследовать фундаментальные вопросы в теории вычислений, такие как универсальность и сложность алгоритмов. Некоторые клеточные автоматы используются в криптографических приложениях для создания сложных и устойчивых к взлому шифров, а также могут использоваться для генерации псевдослучайных чисел, что важно для различных приложений, включая статистику и моделирование.

## 2. Основной результат.

**Определение 2.1.** Пусть  $S$  – полугруппа, а  $X$  – множество образующих её элементов. Тогда *графом Кэли*  $\text{Cay}(S, X)$  полугруппы  $S$  относительно множества образующих её элементов  $X$  называем ориентированный мультиграф с помеченными ребрами. Множество вершин которого совпадает с  $S$ , а вершина  $a$  соединена с вершиной  $b$  дугой, начинающейся в вершине  $a \in S$ , заканчивающейся в вершине  $b \in S$  и помеченной элементом  $x \in X$ , если и только если в полугруппе  $S$  имеет место равенство  $ax = b$ .

**Определение 2.2.** Основой  $\text{SCay}(S, X)$  графа Кэли  $\text{Cay}(S, X)$  называем обыкновенный граф, полученный из исходного удалением петель, меток, и заменой всех дуг соединяющих одни и те же пары вершин одним ребром, соединяющим те же вершины.

**Определение 2.3.** Согласно известной теореме Понтрягина – Куратовского обыкновенный граф является *планарным* тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных полному графу  $K_5$  пятого порядка или полному двудольному графу  $K_{3,3}$ , содержащему по три вершины в каждой из долей.

**Определение 2.4.** Полугруппа  $S$  допускает планарный граф Кэли  $\text{Cay}(S, X)$ , если относительно некоторого минимального множества неразложимых образующих  $X$  основа  $\text{SCay}(S, X)$  является планарным графом.

**Определение 2.5.** Пусть  $V = \text{var}\{\sigma\}$  – многообразие полугрупп, заданное системой тождеств  $\sigma$ , а  $F_n(V)$  – свободная полугруппа в многообразии  $V$ , порожденная  $n$  образующими элементами. Тогда *рангом планарности многообразия*  $V$  называется такое натуральное число  $r_\pi(V)$ , что при  $n \leq r_\pi(V)$  полугруппа  $F_n(V)$  допускает планарный граф Кэли, а при  $n > r_\pi(V)$  полугруппа  $F_n(V)$  не допускает планарный граф Кэли.

Следующая теорема решает проблему Л. М. Мартынова [4] описания рангов планарности в классе модулярных многообразий полугрупп и содержит полный перечень рангов планарности этих многообразий.

**Теорема 2.1.**  $r_\pi(\text{var}\{m_{11}\}) = 2$ ,  $r_\pi(\text{var}\{m_{1n}\}) = 1$ , при  $n \geq 2$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{21}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{22}\}) = 2$ ,  $r_\pi(\text{var}\{m_{2n}\}) = 1$ , при  $n \geq 3$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{31}\}) = 2$ ,  $r_\pi(\text{var}\{m_{3n}\}) = 1$ , при  $n \geq 2$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{41\pi}\}) = 2$ ,  $r_\pi(\text{var}\{m_{4n\pi}\}) = 1$ , при  $n \geq 2$ ,  $\pi \in \Pi_1$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{5\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{6\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{7\pi}\}) = 1$ , при  $\pi \in \Pi_1$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{8\pi}\}) = 2$ , при  $\pi \in \Pi_1$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{9\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{10\pi}\}) = 1$ , при  $\pi \in \Pi_1$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{11\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{12\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{13\pi}\}) = 2$ , при  $\pi \in \Pi_1$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{14\pi}\}) = 3$ , при  $\pi \in \Pi_1$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{N\pi}\}) = 2$ , при  $\pi \in \Pi_1$ , где  $N = 15 \div 19$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{20\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{21}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{22}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{23}\}) = 1$ , при  $\pi \in \Pi_2$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{24\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{25\pi}\}) = 2$ , при  $\pi \in \Pi_3$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_N\}) = 2$ , где  $N = 26 \div 42$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{43}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{45}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{47}\}) = 1$ .

$r_\pi(\text{var}\{m_{44}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{46}\}) = 2$ .

**Доказательство.** Основная проблема, которую приходится решать при составлении графов Кэли в общем случае – это алгоритмически неразрешимая проблема равенства слов в полугруппе. Так, например, запрос подробного доказательства равенства  $abbaba = ababba$  элементов свободной полугруппы многообразия, заданного тождеством  $(m_{12})$  в Prover9 имеет вид:

`formulas(assumptions).(x*y)*z=x*(y*z).x1*x2=(((x1*x2)*x1)*x2)*x1*x2.end_of_list.`

`formulas(goals).(((c1*c2)*c2)*c1)*c2=(((c1*c2)*c1)*c2)*c2*c1.end_of_list.`

Полученное подробное доказательство занимает 128 преобразований. Кратко доказательство данного равенства звучит так:

1.  $xuyxux = xuyxux$ ; доказываемое равенство

2.  $(xy)z = x(yz)$ ; исходное

3.  $xy = xuyxux$ ; исходное

4.  $xuyxux = xy$ ; применили 3

5.  $xyz = xuyxuxz$ ; применили 2 к 4

6.  $xuyxuxz = xuz$ ; применили 5



при  $m \geq 2$ . В частности, граф  $\text{Cay}(F_3(\text{var}\{m1_2\}), \{x_1, x_2\})$  содержит представленный на рисунке [5, рис. 2] подграф, основа которого гомеоморфна графу  $K_{3,3}$ .

$m2$ :

Плоская укладка графа  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_1\}), \{a, b\})$  и схема плоской укладки одной из двух изоморфных связных компонент графа  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_2\}), \{a, b\})$  представлены на рис. 2.

В графе  $\text{SCay}(F_3(\text{var}\{m2_1\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_5$  на следующих попарно непересекающихся маршрутах между вершинами, являющимися элементами множества  $\{abc, abac, abca, abcb, abc^2\}$ :  $abc - ab - aba - abac$ ;  $abc - abca$ ;  $abc - abcb$ ;  $abc - abc^2$ ;  $abac - abca$ ;  $abac - abcb$ ;  $abac - abc^2$ ;  $abca - abcb$ ;  $abca - abc^2$ ;  $abcb - abc^2$ . Следовательно, граф Кэли свободной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m2_1\}$  относительно трех и более образующих не является планарным. В  $\text{SCay}(F_3(\text{var}\{m2_2\}), \{a, b, c\})$  аналогичным образом обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на маршрутах между вершинами из множества  $\{ab, aba^2, ab^3\}$  в одной доле и  $\{aba, ab^2, abc\}$  в другой:  $ab - aba$ ;  $ab - ab^2$ ;  $ab - abc$ ;  $aba^2 - aba$ ;  $aba^2 - ab^2$ ;  $aba^2 - aba^2c - abca - abc$ ;  $ab^3 - aba$ ;  $ab^3 - ab^2$ ;  $ab^3 - abc$ . А далее в  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_n\}), \{a, b\})$ , при  $n \geq 3$ , обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$ , в частности для  $n = 3$  на маршрутах между вершинами из множества  $\{ab^2, aba^2, aba\}$  в одной доле и  $\{aba^3, ab^3, (ab)^2b\}$  в другой:  $ab^2 - aba^3$ ;  $ab^2 - ab^3$ ;  $ab^2 - ab^2a - ab^2a^2 - ab^2a^2b - ab^2a^2ba - aba^2(ba)^2 - (ab)^2ba^2 - (ab)^2ba - (ab)^2b$ ;  $aba^2 - aba^3$ ;  $aba^2 - aba^2b - aba^2ba - a(ba^2)^2 - a(ba^2)^2a - ab^3ab^2 - ab^3ab - ab^3a - ab^3$ ;  $aba^2 - (ab)^2b^2 - (ab)^2b$ ;  $aba - aba^3$ ;  $aba - ab^4 - ab^3$ ;  $aba - (ab)^2 - (ab)^2b$ . Интуитивно значение  $r_\pi(\text{var}\{m2_n\}) = 1$ , при  $n \geq 3$ , обусловлено тем, что в каждом многообразии  $\text{var}\{m2_n\}$ , при  $n \geq 3$ , выполнено тождество  $x^2 = x^{n+2}$ , при  $n \geq 3$  приводящее к появлению простого цикла из трех и более элементов, как при выполнении тождества  $x = x^n$ , при  $n \geq 4$ , для многообразия, порожденного которым ранг планарности равен 1 [3, Теорема].

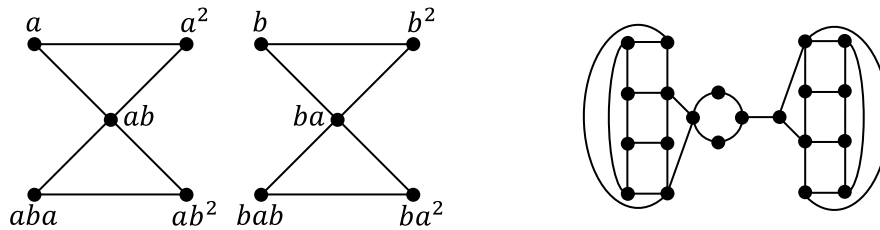


Рис. 2. Плоская укладка пары изоморфных компонент, формирующих граф  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_1\}), \{a, b\})$  [слева] и схема плоской укладки одной из двух изоморфных компонент, формирующих граф  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_2\}), \{a, b\})$  [справа]

Fig. 2. Planar embedding of a pair of isomorphic components forming the graph  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_1\}), \{a, b\})$  [left] and a diagram of the planar embedding of one of the two isomorphic components forming the graph  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_2\}), \{a, b\})$  [right]

$m3$ :

Плоская укладка графа  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_1\}), \{a, b\})$  представлена на рис. 3.

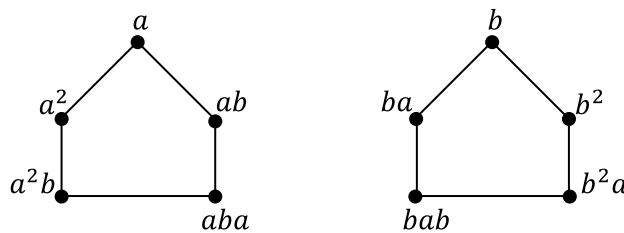


Рис. 3. Плоская укладка графа  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_1\}), \{a, b\})$   
Fig. 3. Planar embedding of the graph  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_1\}), \{a, b\})$

В графе  $\text{SCay}(F_3(\text{var}\{m3_1\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$ , так как присутствуют следующие попарно непересекающиеся маршруты между вершинами из множеств  $\{a^2, a^2bc, aba\}$  и  $\{ab, a^2b, a^2cb\}$ :  $a^2 - a - ab$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^2c - a^2cb$ ;  $a^2bc - abca - abc - ab$ ;  $a^2bc - a^2b$ ;  $a^2bc - a^2cb$ ;  $aba - ab$ ;  $aba - a^2b$ ;  $aba - abac - a^2cb$ .

В графе  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_2\}), \{a, b\})$  есть пути между вершинами из множеств  $\{a^2, aba, ab^2a\}$  и  $\{a^3b, a^2b, ab\}$ :  $a^2 - a^3 - a^3b$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a - ab$ ;  $aba - a^3b$ ;  $aba - (ab)^2 - a^2ba^2 - a^2ba - a^2b$ ;  $aba - ab$ ;  $ab^2a - a^3b^2 - a^3b$ ;  $ab^2a - a^2b$ ;  $ab^2a - ab^2 - ab$ . В графе  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_3\}), \{a, b\})$  соответственно есть пути между вершинами из множеств  $\{a^2, aba, ab^2\}$  и  $\{a^4b, a^2b, ab\}$ :  $a^2 - a^4 - a^4b$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a - ab$ ;  $aba - a^4b$ ;  $aba - (ab)^2 - (ab)^2a - (ab)^2a^2 - a^3b^2ab - a^3b^2a - a^3b^2 - a^3b - a^2b^3a - a^2b^3 - a^2b$ ;  $aba - ab$ ;  $ab^2 - ab^2a - a^4b^2 - a^4b$ ;  $ab^2 - ab^3 - ab^3a - a^2b$ ;  $ab^2 - ab$ , с выделенными изменениями. А в общем случае в графе  $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_n\}), \{a, b\})$ , где  $n > 3$ , находим пути между вершинами из множеств  $\{a^2, aba, ab^2\}$  и  $\{a^{n+1}b, a^2b, ab\}$ :  $a^2 - a^{n+1} - a^{n+1}b$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a - ab$ ;

$aba - a^{n+1}b; aba - (ab)^2 - (ab)^2a - (ab)^2a^2 - \dots - a^2b; aba - ab; ab^2 - \dots - a^{n+1}b^2 - a^{n+1}b; ab^2 - ab^3 - \dots - a^2b; ab^2 - ab.$

$m4:$

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m4_{1,(123)}\}), \{a, b\})$  представлена на рис. 4.

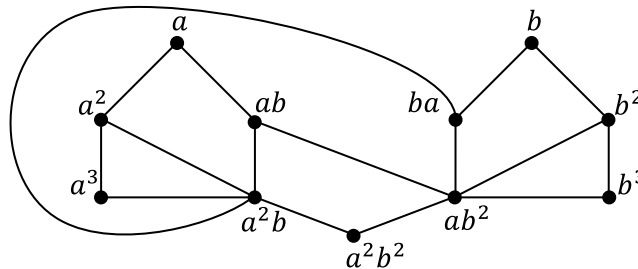


Рис. 4. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m4_{1,(123)}\}), \{a, b\})$

Fig. 4. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m4_{1,(123)}\}), \{a, b\})$

Наличие подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  в основе графа Кэли 3-порожденной полугруппы  $F_3(\text{var}\{m4_{1,(123)}\})$  обусловлено существованием следующих попарно непересекающихся маршрутов между вершинами множества  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab - ab^2 - b^2$ ;  $a - ac - ac^2 - c^2$ ;  $b - ba - a^2b - a^2$ ;  $b - b^2$ ;  $b - bc - bc^2 - c^2$ ;  $c - ca - a^2c - a^2$ ;  $c - cb - b^2c - b^2$ ;  $c - c^2$ .

В основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m4_{2,(123)}\})$  подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  формируют маршруты между вершинами из множеств  $\{a^2, a^2b^2, ba\}$  и  $\{a^3b^2, a^2b, ab^2\}$ :  $a^2 - a^3 - a^3b - a^3b^2$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a - ab - ab^2$ ;  $a^2b^2 - a^3b^2$ ;  $a^2b^2 - a^2b$ ;  $a^2b^2 - ab^2$ ;  $ba - b - b^2 - b^3 - ab^3 - a^2b^3 - a^3b^3 - a^3b^2$ ;  $ba - a^2b$ ;  $ba - ab^2$ .

В основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m4_{3,(123)}\})$  подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  формируют маршруты между вершинами из множеств  $\{a^2, a^4, a^3b\}$  и  $\{a^3, a^2b, a^4b\}$ :  $a^2 - a^3$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a - ab - ab^2 - a^2b^2 - a^4b^2 - a^4b$ ;  $a^4 - a^3$ ;  $a^4 - a^5 - a^2b$ ;  $a^4 - a^4b$ ;  $a^3b - a^3$ ;  $a^3b - a^2b$ ;  $a^3b - a^4b$ . Аналогично в основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m4_{4,(123)}\})$  подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  формируют маршруты между вершинами из множеств  $\{a^2, a^4, a^3b\}$  и  $\{a^3, a^2b, a^4b\}$ :  $a^2 - a^3$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a - ab - ab^2 - a^2b^2 - a^3b^2 - a^4b^2 - a^4b$ ;  $a^4 - a^3$ ;  $a^4 - a^5 - a^6 - a^2b$ ;  $a^4 - a^4b$ ;  $a^3b - a^3$ ;  $a^3b - a^2b$ ;  $a^3b - a^4b$ , с выделенными отличающимися элементами. Для каждого  $n > 4$  в основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m4_{n,(123)}\})$  подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  формируют маршруты между вершинами из множеств  $\{a^2, a^4, a^3b\}$  и  $\{a^3, a^2b, a^4b\}$ :  $a^2 - a^3$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a - ab - ab^2 - a^2b^2 - a^3b^2 - \dots - a^4b^2 - a^4b$ ;  $a^4 - a^3$ ;  $a^4 - a^5 - a^6 - \dots - a^2b$ ;  $a^4 - a^4b$ ;  $a^3b - a^3$ ;  $a^3b - a^2b$ ;  $a^3b - a^4b$ .

Для любой перестановки  $\pi \in \Pi_1$  основа графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m4_{1,\pi}\})$  изоморфна  $SCay(F_2(\text{var}\{m4_{1,(123)}\}), \{a, b\})$ , плоская укладка которого представлена на Рис.4. А при  $n > 1$  в  $F_2(\text{var}\{m4_{n,\pi}\})$  обнаруживаются те же запрещенные конфигурации, что и в  $F_2(\text{var}\{m4_{n,(123)}\})$ .

$m5:$

Более того, для любой перестановки  $\pi \in \Pi_1$  в основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m5_\pi\})$  присутствует гомеоморфный  $K_{3,3}$  подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a^2, ba, a^2b^2\}$  и  $\{ab^2, a^2b, a^4b\}$ :  $a^2 - a - ab - ab^2$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3 - a^4 - a^4b$ ;  $ba - ab^2$ ;  $ba - a^2b$ ;  $ba - b - b^2 - b^3 - ab^3 - a^4b$ ;  $a^2b^2 - ab^2$ ;  $a^2b^2 - a^2b$ ;  $a^2b^2 - a^4b$ .

$m6:$

Аналогично для любой перестановки  $\pi \in \Pi_1$  в основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m6_\pi\})$  присутствует гомеоморфный  $K_{3,3}$  подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a^2, ba, a^2b^2\}$  и  $\{ab^2, a^2b, a^2b^3\}$ :  $a^2 - a - ab - ab^2$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3 - a^4 - a^5 - a^5b$ ;  $ba - ab^2$ ;  $ba - a^2b$ ;  $ba - b - b^2 - b^3 - ab^3 - a^2b^3$ ;  $a^2b^2 - ab^2$ ;  $a^2b^2 - a^2b$ ;  $a^2b^2 - a^2b^3$ .

$m7:$

Для любой перестановки  $\pi \in \Pi_1$  в основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m7_\pi\})$  присутствует гомеоморфный  $K_{3,3}$  подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a^2, ba, a^2b^2\}$  и  $\{ab^2, a^2b, a^4b\}$ :  $a^2 - a - ab - ab^2$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3 - a^4 - a^4b$ ;  $ba - ab^2$ ;  $ba - a^2b$ ;  $ba - b - b^2 - b^3 - ab^3 - a^4b$ ;  $a^2b^2 - ab^2$ ;  $a^2b^2 - a^2b$ ;  $a^2b^2 - a^4b$ .

$m8:$

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m8_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представлена на рис. 5.



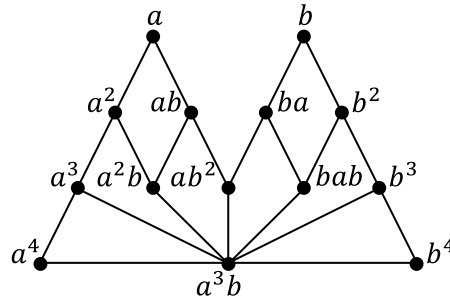


Рис. 5. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m8_\pi\}), \{a, b\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$   
 Fig. 5. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m8_\pi\}), \{a, b\})$ , for any  $\pi \in \Pi_1$

При дальнейшем увеличении числа образующих в графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m8_\pi\}), \{a, b, c\})$ , при  $\pi \in \Pi_1 \setminus \{(234)\}$ , обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, a^2b, ab^2\}$  и  $\{a^3b, a^2bc, ab\}$ :  $a^2 - a^3 - a^3b$ ;  $a^2 - a^2c - a^2bc$ ;  $a^2 - a - ab$ ;  $a^2b - a^3b$ ;  $a^2b - a^2bc$ ;  $a^2b - ab$ ;  $ab^2 - a^3b$ ;  $ab^2 - a^2bc$ ;  $ab^2 - ab$ . Для исключенного случая, в графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m8_{(234)}\}), \{a, b, c\})$ , легко обнаружить гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, ab, ac\}$  и  $\{a, a^2b, ab^2\}$ :  $a^2 - a$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3 - a^3b - ab^2$ ;  $ab - a$ ;  $ab - a^2b$ ;  $ab - ab^2$ ;  $ac - a$ ;  $ac - a^2c - a^2bc - a^2b$ ;  $ac - ac^2 - ca - c - cb - bc^2 - bc - b - ba - ab^2$ .

m9:

Для любой перестановки  $\pi \in \Pi_1$  в основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m9_\pi\})$  присутствует гомеоморфный  $K_{3,3}$  подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{ab, ba, a^3b\}$  и  $\{aba, ab^2, a^2b\}$ :  $ab - aba$ ;  $ab - ab^2$ ;  $ab - a - a^2 - a^2b$ ;  $ba - aba$ ;  $ba - ab^2$ ;  $ba - b - b^2 - a^2b$ ;  $a^3b - aba$ ;  $a^3b - ab^2$ ;  $a^3b - a^2b$ .

m10:

Для любой перестановки  $\pi \in \Pi_1$  в основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m10_\pi\})$  присутствует гомеоморфный  $K_{3,3}$  подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{ab, ba, a^3b\}$  и  $\{aba, ab^2, a^2b\}$ :  $ab - aba$ ;  $ab - ab^2$ ;  $ab - a - a^2 - a^2b$ ;  $ba - b - b^2 - aba$ ;  $ba - ab^2$ ;  $ba - a^2b$ ;  $a^3b - aba$ ;  $a^3b - ab^2$ ;  $a^3b - a^2b$ .

m11:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m11_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представлена на рис. 6.

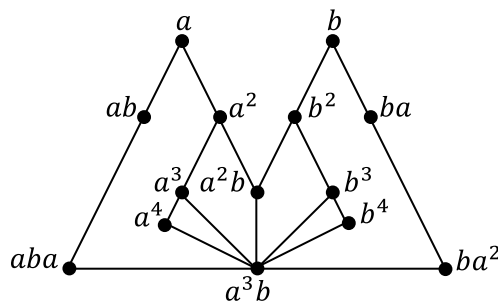


Рис. 6. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m11_\pi\}), \{a, b\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$   
 Fig. 6. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m11_\pi\}), \{a, b\})$ , for any  $\pi \in \Pi_1$

А в графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m11_\pi\}), \{a, b, c\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами, являющимися элементами из множества  $\{a, a^3, a^2b\}$  и  $\{a^2, a^3b, a^3c\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab - aba - a^3b$ ;  $a - ac - aca - a^3c$ ;  $a^3 - a^2$ ;  $a^3 - a^3b$ ;  $a^3 - a^3c$ ;  $a^2b - a^2$ ;  $a^2b - a^3b$ ;  $a^2b - b^2 - b^2c - c^2 - a^2c - a^3c$ .

m12:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m12_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представлена на рис. 7.

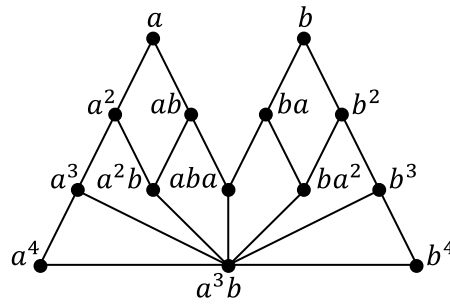


Рис. 7. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m_{12_\pi}\}), \{a, b\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$   
 Fig. 7. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m_{12_\pi}\}), \{a, b\})$ , for any  $\pi \in \Pi_1$

В графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m_{12_\pi}\}), \{a, b, c\})$ , при каждом значении  $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\} = \Pi_1 \setminus \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ , обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, aba, a^2b\}$  и  $\{ab, a^3b, a^2bc\}$ :  $a^2 - a - ab$ ;  $a^2 - a^3 - a^3b$ ;  $a^2 - a^2c - a^2bc$ ;  $aba - ab$ ;  $aba - a^3b$ ;  $aba - a^2bc$ ;  $a^2b - ab$ ;  $a^2b - a^3b$ ;  $a^2b - a^2bc$ . А при оставшихся  $\pi \in \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  легко обнаружить маршруты между вершинами из  $\{a^2, ab, ac\}$  и  $\{a, a^2b, aba\}$ :  $a^2 - a$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3 - a^3b - aba$ ;  $ab - a$ ;  $ab - a^2b$ ;  $ab - aba$ ;  $ac - a$ ;  $ac - a^2c - a^2bc - a^2b$ ;  $ac - aca - ca - c - cb - bcb - bc - b - ba - aba$ .

*m13:*

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m_{13_\pi}\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представлена на рис. 8. А уже в графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m_{13_\pi}\}), \{a, b, c\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab - aba - b^2$ ;  $a - ac - aca - c^2$ ;  $b - ba - a^2b - a^2$ ;  $b - b^2$ ;  $b - bc - bcb - c^2$ ;  $c - ca - a^2c - a^2$ ;  $c - cb - b^2c - b^2$ ;  $c - c^2$ .

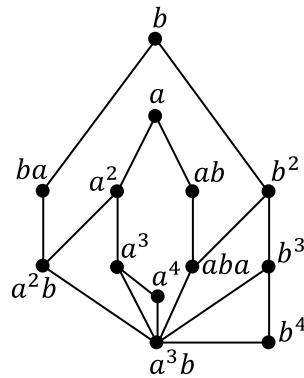


Рис. 8. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m_{13_\pi}\}), \{a, b\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$   
 Fig. 8. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m_{13_\pi}\}), \{a, b\})$ , for any  $\pi \in \Pi_1$

*m14:*

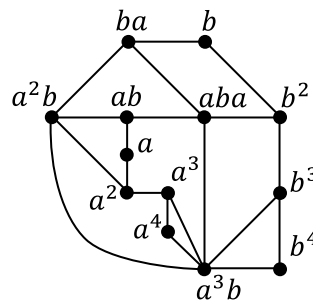
Полугруппа  $F_3(\text{var}\{m_{14_\pi}\})$  имеет 34 элемента. Дабы не загромождать доказательство, не будем приводить плоскую укладку основы графа Кэли этой полугруппы, а воспользуемся инвариантом Колен де Вердьера [6]. Матрица смежности графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m_{14_\pi}\}), \{a, b, c\})$  графически изображена на рис. 9, где в массиве из  $34 \times 34$  точек черная точка означает наличие ребра, а белая – его отсутствие между вершинами из соответствующей строки и столбца. Инвариант Колен де Вердьера определяется похожим на матрицу смежности образом. А именно, для простого графа  $G$  без петель и кратных ребер на  $n$  вершинах, инвариантом Колен де Вердьера  $\mu(G)$  является наибольший коранг такой квадратной матрицы  $M$  порядка  $n$  с действительными коэффициентами, что её недиагональные элементы в строке  $i$  столбца  $j$  являются отрицательными числами, когда вершина  $i$  смежна с вершиной  $j$  в графе  $G$ , в противном случае эти элементы равны нулю. Кроме того, матрица  $M$  должна иметь ровно одно отрицательное собственное значение кратности 1 (то есть быть диагонализированной) и не существует такой ненулевой матрицы  $X$  с действительными коэффициентами, что  $MX = O$  и  $X_{i,j} = 0$  всякий раз, когда  $i = j$  или  $M_{i,j} \neq 0$  (то есть  $i$  и  $j$  являются смежными). Максимизация коранга достигается изменением диагональных элементов матрицы  $M$  в целях минимизации её ранга. Чтобы достичь указанных в определении инварианта Колен де Вердьера ограничений, можно взять матрицу смежности графа  $G$  в качестве отправной точки, изменить знаки всех её элементов на противоположные и на пересечении  $i$  строки  $i$  столбца диагональными элементами поставить  $i$ , при  $i > 1$ , и  $-1$  для  $i = 1$ , это обеспечит дальнейшую диагонализацию получившейся матрицы  $M$ , то есть приведет к единственному отрицательному собственному числу кратности 1. После этого минимизировать ранг сформировавшейся матрицы. Граф  $G$  оказывается планарным тогда и только тогда, когда  $\mu(G) \leq 3$ . В рассматриваемом случае имеем  $\mu(SCay(F_3(\text{var}\{m_{14_\pi}\}), \{a, b, c\})) \leq 3$ .



Рис. 9. Матрица смежности графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m14_\pi\}), \{a, b, c\})$ Fig. 9. Adjacency matrix of the graph  $SCay(F_3(\text{var}\{m14_\pi\}), \{a, b, c\})$ 

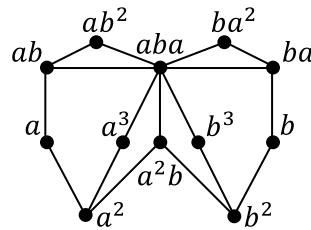
$m10$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m15_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представлена на рис. 10. А в графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m15_\pi\}), \{a, b, c\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , обнаруживается такой же, как в графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m13_\pi\}), \{a, b, c\})$ , гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на маршрутах между вершинами из  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$ .

Рис. 10. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m15_\pi\}), \{a, b\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ Fig. 10. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m15_\pi\}), \{a, b\})$ , for any  $\pi \in \Pi_1$ 

$m16$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m16_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представлена на рис. 11. А в графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m16_\pi\}), \{a, b, c\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a, a^3, a^2b\}$  и  $\{a^2, aba, aca\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab - aba$ ;  $a - ac - aca$ ;  $a^3 - a^2$ ;  $a^3 - aba$ ;  $a^3 - aca$ ;  $a^2b - a^2$ ;  $a^2b - aba$ ;  $a^2b - b^2 - b^2c - c^2 - c - ca - aca$ .

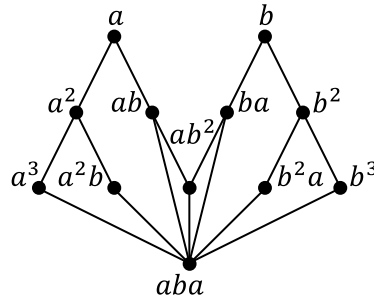
Рис. 11. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m16_\pi\}), \{a, b\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ Fig. 11. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m16_\pi\}), \{a, b\})$ , for any  $\pi \in \Pi_1$ 

$m17$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m17_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представлена на рис. 12.

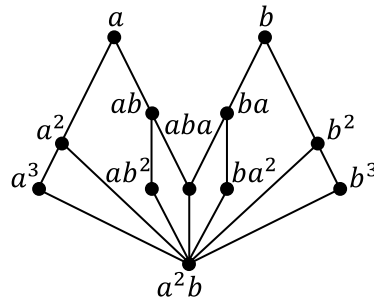
В графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m17_\pi\}), \{a, b, c\})$ , при любом  $\pi \in \{(123), (124), (134), (234), (13)(24)\} = \Pi_1 \setminus \{(12)(34), (14)(23)\}$ , обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, aba, aca\}$  и  $\{a, a^2b, a^3\}$ :  $a^2 - a$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3$ ;  $aba - ab - a$ ;  $aba - a^2b$ ;  $aba - a^3$ ;  $aca - ac - a$ ;  $aca - a^2bc - a^2b$ ;  $aca - a^3$ .

В графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m17_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$  наличие гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  подграфа обусловлено существованием маршрутов между вершинами из  $\{a^2, aba, aca\}$  и  $\{a, a^2b, a^3\}$ :  $a^2 - a$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3$ ;  $aba - ab - a$ ;  $aba - a^2b$ ;  $aba - a^3$ ;  $aca - ac - a$ ;  $aca - a^2c - a^2bc - a^2b$ ;  $aca - a^3$ . А в оставшемся графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m17_{(14)(23)}\}), \{a, b, c\})$  наличие гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  подграфа обусловлено существованием маршрутов между вершинами из  $\{a^2, aba, aca\}$  и  $\{a, a^2c, a^3\}$ :  $a^2 - a$ ;  $a^2 - a^2c$ ;  $a^2 - a^3$ ;  $aba - ab - a$ ;  $aba - a^2bc - a^2c$ ;  $aba - a^3$ ;  $aca - ac - a$ ;  $aca - a^2c$ ;  $aca - a^3$ .

Рис. 12. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m17_\pi\}), \{a, b\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ Fig. 12. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m17_\pi\}), \{a, b\})$ , for any  $\pi \in \Pi_1$ 

m18:

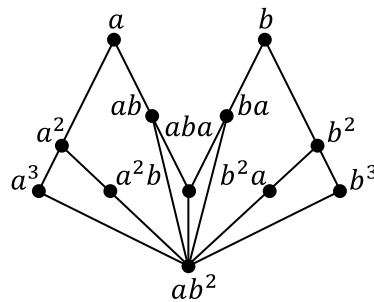
Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m18_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представлена на рис. 13.

Рис. 13. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m18_\pi\}), \{a, b\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ Fig. 13. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m18_\pi\}), \{a, b\})$ , for any  $\pi \in \Pi_1$ 

В графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m18_\pi\}), \{a, b, c\})$ , при каждом значении  $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\} = \Pi_1 \setminus \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ , обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, aba, ab^2\}$  и  $\{ab, a^2b, a^2bc\}$ :  $a^2 - a - ab$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^2c - a^2bc$ ;  $aba - ab$ ;  $aba - a^2b$ ;  $aba - a^2bc$ ;  $ab^2 - ab$ ;  $ab^2 - a^2b$ ;  $ab^2 - a^2bc$ . А при оставшихся  $\pi \in \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  можно обнаружить маршруты между вершинами из  $\{a^2, b^2, a^2bc\}$  и  $\{ab, a^2b, a^2c\}$ :  $a^2 - a - ab$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^2c$ ;  $b^2 - b - ba - aba - ab$ ;  $b^2 - a^2b$ ;  $b^2 - b^2c - c^2 - a^2c$ ;  $a^2bc - ab^2 - ab$ ;  $a^2bc - a^2b$ ;  $a^2bc - a^2c$ .

m19:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m19_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представлена на рис. 14.

Рис. 14. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m19_\pi\}), \{a, b\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ Fig. 14. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m19_\pi\}), \{a, b\})$ , for any  $\pi \in \Pi_1$ 

В графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m19_\pi\}), \{a, b, c\})$ , при каждом значении

$$\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\} = \Pi_1 \setminus \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, ab^2, ac^2\}$  и  $\{a, a^3, a^2b\}$ :  $a^2 - a$ ;  $a^2 - a^3$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $ab^2 - ab - a$ ;  $ab^2 - a^3$ ;  $ab^2 - a^2b$ ;  $ac^2 - ac - a$ ;  $ac^2 - a^3$ ;  $ac^2 - a^2bc - a^2b$ . При  $\pi \in \{(12)(34), (13)(24)\}$ , на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, ab^2, ac^2\}$  и  $\{a, a^3, a^2b\}$ :  $a^2 - a$ ;  $a^2 - a^3$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $ab^2 - ab - a$ ;  $ab^2 - a^3$ ;  $ab^2 - a^2b$ ;  $ac^2 - ac - a$ ;  $ac^2 - a^3$ ;  $ac^2 - a^2c - a^2bc - a^2b$ . А при оставшемся  $\pi = (14)(23)$ , на маршрутах между вершинами из  $\{a^2, ab^2, ac^2\}$  и  $\{a, a^3, a^2c\}$ :  $a^2 - a$ ;  $a^2 - a^3$ ;  $a^2 - a^2c$ ;  $ab^2 - ab - a$ ;  $ab^2 - a^3$ ;  $ab^2 - a^2bc - a^2c$ ;  $ac^2 - ac - a$ ;  $ac^2 - a^3$ ;  $ac^2 - a^2c$ .

$m20 \div 23$ :

В графах  $SCay(F_2(\text{var}\{m20_\pi\}), \{a, b\})$ , при любом значении  $\pi \in \Pi_2$ ,  $SCay(F_2(\text{var}\{m21\}), \{a, b\})$ ,  $SCay(F_2(\text{var}\{m22\}), \{a, b\})$  и  $SCay(F_2(\text{var}\{m23\}), \{a, b\})$ , обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из множества  $\{a^2b, aba, ab^2\}$  и  $\{ba, ab, a^3b\}$ :  $a^2b - ba$ ;  $a^2b - a^2 - a - ab$ ;  $a^2b - a^3b$ ;  $aba - ba$ ;  $aba - ab$ ;  $aba - a^3b$ ;  $ab^2 - b^2 - b - ba$ ;  $ab^2 - ab$ ;  $ab^2 - a^3b$ .

$m24$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m24_\pi\})$ , при любой перестановке  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$ , представлена на рис. 15 слева. Заметим, что она изоморфна основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m18_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представленной на рис. 13. А плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m24_{(12)(34)}\})$  представлена на рис. 15 справа.

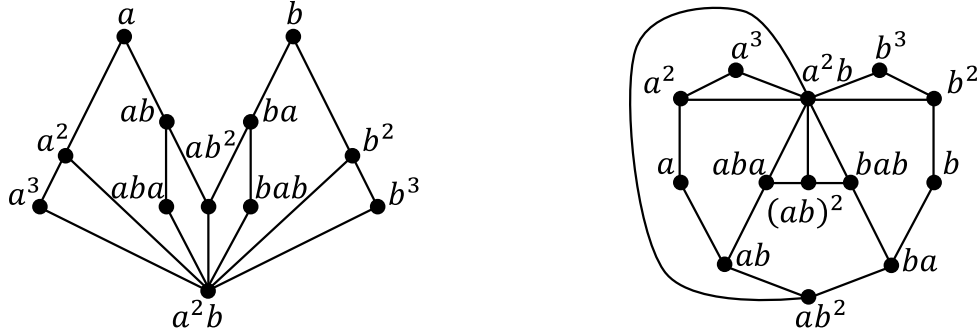


Рис. 15. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_1\}), \{a, b\})$ , где  $\sigma_1 \in \{m24_\pi, m27, m28, m32\}$ , при любом  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$  [слева] и  $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_2\}), \{a, b\})$ , где  $\sigma_2 \in \{m24_{(12)(34)}, m26, m36\}$  [справа]

Fig. 15. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_1\}), \{a, b\})$ , where  $\sigma_1 \in \{m24_\pi, m27, m28, m32\}$ , for any  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$  [on the left]  $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_2\}), \{a, b\})$ , where  $\sigma_2 \in \{m24_{(12)(34)}, m26, m36\}$  [right]

Увеличив число образующих, в  $SCay(F_3(\text{var}\{m24_\pi\}), \{a, b, c\})$ , при  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$ , обнаруживаем гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, aba, ab^2\}$  и  $\{ab, a^2b, a^2bc\}$ :  $a^2 - a - ab$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^2c - a^2bc$ ;  $aba - ab$ ;  $aba - a^2b$ ;  $aba - a^2bc$ ;  $ab^2 - ab$ ;  $ab^2 - a^2b$ ;  $ab^2 - a^2bc$ . А в оставшемся графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф есть на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, b^2, a^2bc\}$  и  $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$ :  $a^2 - a - ab - ab^2$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^2c$ ;  $b^2 - b - ba - ab^2$ ;  $b^2 - a^2b$ ;  $b^2 - b^2c - c^2 - a^2c$ ;  $a^2bc - ab^2$ ;  $a^2bc - a^2b$ ;  $a^2bc - a^2c$ .

$m25$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m25_\pi\})$ , при  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$ , представлена на рис. 16 слева. Заметим, что она как и в случае  $F_2(\text{var}\{m24_\pi\})$  изоморфна основе графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m18_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_1$ , представленной на рис. 13. А плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m25_{(12)(34)}\})$  представлена на рис. 16 справа.

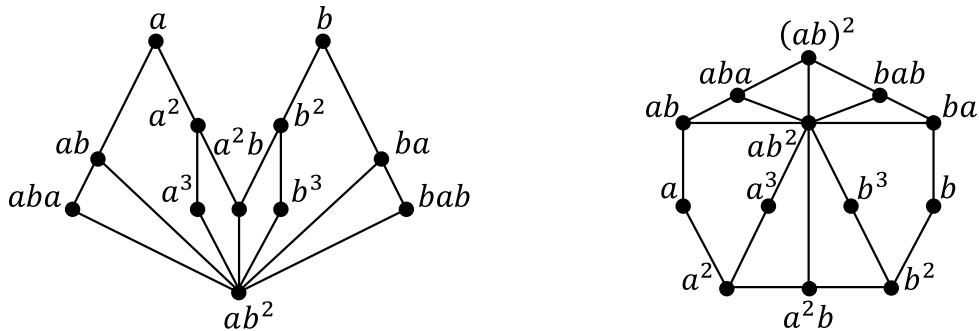


Рис. 16. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_1\}), \{a, b\})$ , для  $\sigma_1 \in \{m25_\pi, m30, m31, m37, m38, m39, m40\}$ , при любом  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$  [слева] и  $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_2\}), \{a, b\})$ , для  $\sigma_2 \in \{m25_{(12)(34)}, m29, m41\}$  [справа]

Fig. 16. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_1\}), \{a, b\})$ , for  $\sigma_1 \in \{m25_\pi, m30, m31, m37, m38, m39, m40\}$ , for any  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$  [left] and  $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_2\}), \{a, b\})$ , for  $\sigma_2 \in \{m25_{(12)(34)}, m29, m41\}$  [right]

Увеличив число образующих, в графах  $SCay(F_3(\text{var}\{m25_\pi\}), \{a, b, c\})$ , при любой перестановке  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$ , и в не изоморфном им графе  $SCay(F_3(\text{var}\{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , обнаруживаем гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  один и тот же подграф на следующих маршрутах между вершинами из  $\{a^2, ab^2, ac^2\}$  и  $\{a, a^2b, a^3\}$ :  $a^2 - a$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3$ ;  $ab^2 - ab - a$ ;  $ab^2 - a^2b$ ;  $ab^2 - a^3$ ;  $ac^2 - ac - a$ ;  $ac^2 - ca - c - c^2 - b^2c - b^2 - a^2b$ ;  $ac^2 - a^3$ .

$m26$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m26\})$ , совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\})$ , представлена на рис. 15 справа. А в  $SCay(F_3(\text{var } \{m26\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф такой же, как в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , на маршрутах между вершинами из  $\{a^2, b^2, a^2bc\}$  и  $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$ .

$m27 \div 28$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугрупп  $F_2(\text{var } \{m27\})$  и  $F_2(\text{var } \{m28\})$ , совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m24_\pi\})$ , при любой перестановке  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12)(34)\}$ , представлена на рис. 15 слева. И в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m27\}), \{a, b, c\})$  с графом  $SCay(F_3(\text{var } \{m28\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф такой же, как в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , на маршрутах между вершинами из  $\{a^2, b^2, a^2bc\}$  и  $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$ .

$m29$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m29\})$ , совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\})$  представлена на рис. 16 справа. И в  $SCay(F_3(\text{var } \{m29\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф такой же, как в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , на маршрутах между вершинами из  $\{a^2, ab^2, ac^2\}$  и  $\{a, a^2b, a^3\}$ .

$m30 \div 31$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугрупп  $F_2(\text{var } \{m30\})$  и  $F_2(\text{var } \{m31\})$ , совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m25_\pi\})$ , при каждой перестановке  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12)(34)\}$ , представлена на рис. 16 слева. А в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m30\}), \{a, b, c\})$  и в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m31\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф такой же, как в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , на маршрутах между вершинами из  $\{a^2, ab^2, ac^2\}$  и  $\{a, a^2b, a^3\}$ .

$m32 \div 35$ :

Для всех  $\sigma \in \{m32, m33, m34, m35\}$  плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{\sigma\})$  как и  $F_2(\text{var } \{m27\})$ ,  $F_2(\text{var } \{m28\})$ , совпадает с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m24_\pi\})$ , при любом  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12)(34)\}$ , и представлена на рис. 15 слева. А в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{\sigma\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф такой же, как в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , на маршрутах между вершинами из  $\{a^2, b^2, a^2bc\}$  и  $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$ .

$m36$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m36\})$ , совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\})$ , представлена на рис. 15 справа. А в  $SCay(F_3(\text{var } \{m36\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф такой же, как в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , на маршрутах между вершинами из  $\{a^2, b^2, a^2bc\}$  и  $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$ .

$m37 \div 40$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугрупп  $F_2(\text{var } \{m37\})$ ,  $F_2(\text{var } \{m38\})$ ,  $F_2(\text{var } \{m39\})$  и  $F_2(\text{var } \{m40\})$ , совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m25_\pi\})$ , при  $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12)(34)\}$ , представлена на рис. 16 слева. А в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m37\}), \{a, b, c\})$ ,  $SCay(F_3(\text{var } \{m38\}), \{a, b, c\})$ ,  $SCay(F_3(\text{var } \{m39\}), \{a, b, c\})$  и  $SCay(F_3(\text{var } \{m40\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф как в  $SCay(F_3(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , на маршрутах между вершинами из  $\{a^2, ab^2, ac^2\}$  и  $\{a, a^2b, a^3\}$ .

$m41$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m41\})$ , совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\})$ , представлена на рис. 16 справа. А в  $SCay(F_3(\text{var } \{m41\}), \{a, b, c\})$  обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф такой же, как в графе  $SCay(F_3(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ , на маршрутах между вершинами из  $\{a^2, ab^2, ac^2\}$  и  $\{a, a^2b, a^3\}$ .

$m42, m44, m46$ :

Плоская укладка основы графа Кэли полугрупп  $F_2(\text{var } \{m42\})$ ,  $F_2(\text{var } \{m44\})$  и  $F_2(\text{var } \{m46\})$  представлена на рис. 17.

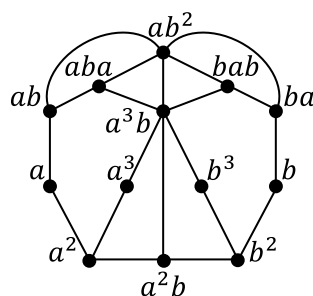


Рис. 17. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var } \{\sigma\}), \{a, b\})$ , при любом  $\sigma \in \{m42, m44, m46\}$   
Fig. 17. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var } \{\sigma\}), \{a, b\})$ , for any  $\sigma \in \{m42, m44, m46\}$

А при дальнейшем увеличении числа образующих, начиная с трех, в графах  $SCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$ ,  $SCay(F_3(\text{var}\{m44\}), \{a, b, c\})$  и  $SCay(F_3(\text{var}\{m46\}), \{a, b, c\})$  уже обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a^2, b^2, a^3b\}$  и  $\{ab^2, a^2b, a^3\}$ :  $a^2 - a - ab - ab^2$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3$ ;  $b^2 - b - ba - ab^2$ ;  $b^2 - a^2b$ ;  $b^2 - b^2c - c^2 - a^2c - a^3c - a^3$ ;  $a^3b - ab^2$ ;  $a^3b - a^2b$ ;  $a^3b - a^3$ .

$m43, m45, m47$ :

В основе графа Кэли полугрупп  $F_2(\text{var}\{m43\})$ ,  $F_2(\text{var}\{m45\})$  и  $F_2(\text{var}\{m47\})$  обнаруживается гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  подграф на следующих попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a^2, aba, ab^2\}$  и  $\{ab, a^2b, a^3b\}$ :  $a^2 - a - ab$ ;  $a^2 - a^2b$ ;  $a^2 - a^3 - a^3b$ ;  $aba - ab$ ;  $aba - a^2b$ ;  $aba - a^3b$ ;  $ab^2 - ab$ ;  $ab^2 - ba - b - b^2 - a^2b$ ;  $ab^2 - a^3b$ .

Таким образом, было осуществлено обоснование найденных значений рангов планарности представленных в доказываемой теореме модулярных многообразий полугрупп. Теорема 1 доказана.

**3. Заключение.** В работе рассмотрены все возможные модулярные многообразия полугрупп, вычислены ранги планарности каждого из них. Как оказалось, значения рангов планарности бесконечного счетного числа всех возможных модулярных многообразий полугрупп не превосходят 3.

### Список литературы

1. Knauer K. and Surroca G.P.i. On monoid graphs. *Mediterr. J. Math.* 20, No. 1, Paper No. 26, 2023, 24 p.
2. Верников Б.М. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия. *Известия УрГУ*, №22, 2002, С.16–42.
3. Волков М.В. Тождества в решетках многообразий полугрупп: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 1994.
4. Новые проблемы алгебры и логики. Юбилейное 900-е заседание семинара. *Омский алгебраический семинар* 12 ноября 2015 г. – URL: <https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900> (дата обращения: 25.01.2025). – Режим доступа: для зарегистр. пользователей.
5. Соломатин Д.В. Ранги планарности многообразий полугрупп, заданных тождеством  $x^n \approx x$ . *Вестник Омского университета*, 2020. Т. 25, № 3. С. 13–17.
6. Yves Colin de Verdière. Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité. *Journal of combinatorial theory, Series B* 50, 11–21 (1990).

### References

1. Knauer K. and Surroca GP.i. On monoid graphs. *Mediterr. J. Math.* 20, No. 1, Paper No. 26, 2023, 24 p.
2. Vernikov BM. Semimodular and Desarguesian varieties of semigroups: forbidden subvarieties. *Izvestia of Ural State University*, No. 22, 2002, P.16–42. (In Russ.)
3. Volkov MV. Identities in lattices of varieties of semigroups: Diss. ... *Doctor of Physical and Mathematical Sciences*. St. Petersburg, 1994. (In Russ.)
4. New problems of algebra and logic. Anniversary 900th meeting of the seminar. *Omsk algebraic seminar* November 12, 2015. – URL: <https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900> (date of access: 01/25/2025). – Access mode: for registered users.
5. Solomatin DV. Planarity ranks of varieties of semigroups defined by the identity  $x^n \approx x$ . *Bulletin of Omsk University*, 2020. Vol. 25, No. 3. P. 13–17. (In Russ.)
6. Yves Colin de Verdière. Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité. *Journal of combinatorial theory, Series B* 50, 11–21 (1990).

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 25.01.2025

Поступила после рецензирования 04.08.2025

Принята к публикации 06.08.2025

Received January 25, 2025

Revised August 4, 2025

Accepted August 6, 2025

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Соломатин Денис Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Denis V. Solomatin** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia

[К содержанию](#)