Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 2. С. 93–110.
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 2. P. 93–110.

УДК 517.27
MSC 26A33, 26A27
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-93-110
EDN ZLKYYB

Локализованная и локальная дробная производные функции Такаги

Гринько А. П.,
(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)
Барановичский государственный университет,
Беларусь, 225404, г. Барановичи, ул. Войкова, 21
agrinko_1999@yahoo.com

Аннотация. В статье доказывается действие локализованных дробных производных типа Римана – Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ из гёльдеровского пространства с показателем $\lambda, 0 < \lambda \leq 1$ и логарифмическим множителем в гёльдеровское пространство с показателем $\lambda - \alpha, 0 < \lambda - \alpha$ и логарифмическим множителем. Вычисляются локализованные и локальные дробные производные, точки минимума и максимума функции Такаги. Показывается, что функция Такаги принадлежит пространству Гёльдера с показателем один и логарифмическим множителем.

Ключевые слова: локализованная дробная производная, локальная дробная производная, функция Такаги

Для цитирования: Гринько А. П. 2025. Локализованная и локальная дробная производные функции Такаги. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 93–110. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-93-110 EDN ZLKYYB

Original Research

Localized and Local Fractional Derivative of the Takagi Function

Alexander P. Grinko,
(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)*
Baranovichi State University,
21 Voikova St., Baranovichi 225404, Belarus
agrinko_1999@yahoo.com

Abstract. In this paper it is proved that localized fractional derivatives of Riemann – Liouville type of order $0 < \alpha < 1$ are bounded from the Hölder space with exponent $\lambda, 0 < \lambda \leq 1$ and logarithmic factor into the Hölder space with exponent $\lambda - \alpha, 0 < \lambda - \alpha$ and logarithmic factor. Localized and local fractional derivatives, minimum and maximum points of the Takagi function are calculated. It is shown that the Takagi function belongs to the Hölder space with exponent one and logarithmic factor.

Keywords: Localized Fractional Derivative, Local Fractional Derivative, Takagi Function

For citation: Grinko A.P. 2025. Localized and Local Fractional Derivative of the Takagi Function. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 93–110. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-93-110 EDN ZLKYYB

---

1. Введение. В настоящей статье рассматриваются левосторонние усечённые локализованные дробные производные ([1]) типа Маршо

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) = \lim_{\delta\to 0}\left(D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x-\delta}\frac{\phi(x)-\phi(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha}}d\tau\right), \tag{1}$$

и типа Римана – Лиувилля

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\phi(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}}dt, 0 < \alpha, \tag{2}$$

левосторонний локализованный дробный интеграл ([2]) типа Римана – Лиувилля

$$\left(I^{\alpha,-\varepsilon}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{\alpha-1}\phi(t)\,dt, -\infty < a \leq x \leq b < +\infty \tag{3}$$

левый обратный оператор, для локализованного интеграла (3),

$$D_{[a,b]}^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]}\left(D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x-\varepsilon k)\right)(x) = 0 \tag{4}$$

и левосторонняя локальная дробная производная ([3])

$$\left(\overline{D^{\alpha,-}}f\right)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Gamma\left(1+\log_{\varepsilon}\omega(\varepsilon)-\alpha\right)}{\omega(\varepsilon)}\varepsilon^{\alpha}\left(\overline{D^{\alpha,-\varepsilon}}f\right)(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma\left(1+\log_{\varepsilon}\omega(\varepsilon)-\alpha\right)\frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\omega(\varepsilon)}, \tag{5}$$

где $\omega(\varepsilon)$ – непрерывная монотонная функция, для которой $\omega(0) = 0$, $\sup\limits_{\varepsilon<\varepsilon_0}|f(x)-f(x-\varepsilon)| \le C\omega(\varepsilon)$, $C > 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\log_{\varepsilon}\omega(\varepsilon) = \lambda, 0 \le \lambda \le 1, 0 < \varepsilon$.

Доказывается, что при $\alpha+\lambda = 1$ локализованная производная (1) порядка α действует из гёльдеровского пространства с показателем λ и логарифмическим множителем в гёльдеровское пространство с показателем $\alpha+\lambda$ и логарифмическим множителем.

В качестве примера, для нигде не дифференцируемой, но непрерывной функции типа Такаги ([4],[5])

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\phi(4^n x) = \sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(4^n x-k) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x),$$

где

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(x-k),$$

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x < -0,5, \\ |x|,\ -0,5 \le x \le 0,5, \\ 0,\ x > 0,5, \end{cases} \quad \text{продолженная 1-периодически на всю числовую ось функция,} \tag{6}$$

вычисляются локализованная производная (1) и модуль непрерывности локализованной производной, локальная производная (5), точки минимума и максимума. Доказывается, что функция Такаги принадлежит пространству Гёльдера с показателем один и логарифмическим множителем.

Целью данной работы является применение локализованных и локальных дробных производных для изучения свойств нигде не дифференцируемых непрерывных функций.

Среди результатов, аналогичных результатам статьи, следует назвать результаты о действии дробных интегралов Римана – Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ из гёльдеровских пространств с показателем $\lambda, 0 < \lambda < 1$ в гёльдеровское пространство с показателем $\alpha+\lambda = 1$ и логарифмическим множителем, а также действии дробных производных Римана – Лиувилля из гёльдеровского пространства с показателем $\lambda, 0 < \lambda \le 1$ в гёльдеровское пространство с показателем $\lambda-\alpha, 0 < \lambda-\alpha$, полученных в [6], теорема 13.13, теорема 3.1 и лемма 13.1 соответственно. Изоморфизм локализованных дробных интегралов порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ типа Римана – Лиувилля гёльдеровского пространства с показателем $\lambda, 0 < \lambda < 1$ с логарифмическим множителем на фактор-пространство гёльдеровского пространства с показателем $\lambda+\alpha < 1$, был доказан в работе ([2]). В работах [7] и [8] было доказано, что функция Такаги (параметры 2, 2) и функция типа Такаги (параметры 4, 4) соответственно принадлежат пространству Гёльдера с показателем $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Различные примеры вычисления локализированных дробных производных типа Римана – Лиувиля, в частности функции $|x-x_0|^p$, $p \in R$ приводятся в работе [9].

2. Основные результаты. Пусть $0 < \lambda \le 1$. Будем говорить, что $f(x) \in H^{\lambda}([a;b])$ ($f(x) \in H^{\lambda,k}([a;b])$) если

$$|f(x+h)-f(x)| \le A|h|^{\lambda}\ln\frac{1}{|h|}, |h| < \frac{1}{2}, (|f(x+h)-f(x)| \le A|h|^{\lambda}\left(\ln\frac{1}{|h|}\right)^k, |h| < \frac{1}{2}).$$

В работе [3] были получены следующие результаты.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda \le 1$, $0 < \varepsilon$, *тогда оператор локализованного дробного интегрирования* $I^{\alpha,-\varepsilon}$, *для* $\alpha+\lambda < 1$ *ограничен из* $H^{\lambda}[a;b]$, *в* $H^{\alpha+\lambda}[a;b]$ *и из* $H^{\lambda,1}[a;b]$ *в* $H^{\alpha+\lambda,1}[a;b]$, *а для* $\alpha+\lambda = 1$ *ограничен из* $H^{\lambda,1}[a;b]$ *в* $H^{\alpha+\lambda,2}[a;b]$.

Лемма 2.2. *Для любого* $x \in [a,b]$, $-\infty \le a < b \le \infty$, *равенство*

$$\left(D_{[a;b]}^{\alpha,-\varepsilon}I^{\alpha,-\varepsilon}f\right)(x) = \lim_{\delta\to 0}\left(D_{[a;b],\delta}^{\alpha,-\varepsilon}I^{\alpha,-\varepsilon}f\right)(x) = f(x), 0 < \varepsilon, 0 < \alpha < 1$$

имеет место поточечно для $f(x) \in H^{\lambda}(a;b)$, $-\infty < a, 0 < \alpha < \lambda \le 1$.

В работе [3] была доказана следующая лемма.

Лемма 2.3. *Пусть* $0 < \varepsilon$, $0 < \alpha < \lambda < 1$, *функция* $f(x) \in H^{\lambda}([a;b])$ *продлена нулём вне отрезка* $[a,b]$, *тогда оператор локализованного дифференцирования* $D^{\alpha,-\varepsilon}$ *ограниченно действует из пространства* $H^{\lambda}([a;b])$ *в пространство* $H^{\lambda-\alpha}([a;b])$ *и*

$$D^{\alpha,-\varepsilon} f(a) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\,\varepsilon^{\alpha}}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая формула, полученная в [9], для $0 < \alpha < 1, p = 1, n = 1, x_0 = \frac{k}{4^n}$:

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left|t - \frac{k}{4^n}\right|\right)(x) = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \begin{cases} -1, x \le \frac{k}{4^n}; \\ \left(\left(\frac{x-\frac{k}{4^n}}{\varepsilon}\right)^{1-\alpha} 2 - 1\right), \frac{k}{4^n} \le x \le \frac{k}{4^n} + \varepsilon. \\ 1, \frac{k}{4^n} + \varepsilon \le x. \end{cases} \tag{7}$$

В работах [10], [11] были получены следующие результаты.

Теорема 2.1. *Пусть* $x \in [a+2\varepsilon, b]$, $-\infty \le a < b \le \infty$, *равенство*

$$\left(I^{\alpha,-\varepsilon} D^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) = \lim_{\delta \to 0}\left(I^{\alpha,-\varepsilon} D^{\alpha,-\varepsilon}_{\delta} f\right)(x) = \phi(x) - \int\limits_0^1 K(s,\alpha)\, f(x - \varepsilon - \varepsilon s)\, ds,$$

где $\int\limits_0^1 K(s,\alpha)\, ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^1 s^{\alpha-1} ds + \int\limits_0^1 \frac{s^{-\alpha} - s^{\alpha}}{s+1} ds\right) = 1$ *имеет место поточечно для* $\phi(x) \in H^{\lambda}[(a;b)]$, $0 < \alpha < \lambda < 1$ *и почти всюду для* $\phi(x) \in L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 2.2. *Пусть функция* $f(x)$ *может быть представлена в виде* $f(x) = I^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x)$, *тогда для любого* $x \in [a+2\varepsilon, b]$, $-\infty \le a < b \le \infty$, *равенство*

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) = \lim_{\delta \to 0}\left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{\delta} f\right)(x) = \phi(x) - \phi(x - \varepsilon), 0 < \delta < \varepsilon,$$

имеет место поточечно для $\phi(x) \in H^{\lambda}(a;b)$, $0 < \alpha < \lambda < 1$ *и почти всюду для* $\phi(x) \in L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 2.3. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. *Интегральное уравнение*

$$I^{\alpha,-\varepsilon}\left(D^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x)\right)(x) = \phi(x) - \int\limits_0^1 K(s,\alpha)\, f(x - \varepsilon - \varepsilon s)\, ds = 0$$

где

$$\int\limits_0^1 K(s,\alpha)\, ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^1 s^{\alpha-1} ds + \int\limits_0^1 \frac{s^{\alpha} - s^{-\alpha}}{s+1} ds\right) = 1,$$

в пространстве $H^{\lambda}(a;b)$, *для* $a > -infty$, *имеет единственное решение* $\phi(x) \in H^{\lambda}(a;b)$, *заданное следующими рекурентными соотношениями:*

1. $a < x < a + 2\varepsilon, \phi(x) = \phi_0(x)$ *– задана произвольно;*

2. $a + 2\varepsilon < x < a + 3\varepsilon$,

$$\phi(x) = \phi_1 = \int\limits_0^1 \frac{\tau^{\alpha-1}\phi_0(x - \varepsilon - \varepsilon\tau)\, d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} + \int\limits_0^1 \frac{\left(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}\right)\phi_0(x - \varepsilon - \varepsilon\tau)\, d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(\tau+1)};$$

...

n. $n > 2, a + n\varepsilon < x < b$,

$$\phi(x) = \phi_{n-1}(x) = \int\limits_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{\tau^{\alpha-1}\phi_{n-3}(x - \varepsilon - \varepsilon\tau)\, d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} + \int\limits_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{\left(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}\right)\phi_{n-3}(x - \varepsilon - \varepsilon\tau)\, d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(\tau+1)} +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{\tau^{\alpha-1}\phi_{n-2}(x - \varepsilon - \varepsilon\tau)\, d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} + \int\limits_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{\left(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}\right)\phi_{n-2}(x - \varepsilon - \varepsilon\tau)\, d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(\tau+1)}.$$

Покажем, что при $\alpha+\lambda=1$ локализованная производная (1) порядка α действует из гёльдеровского пространства с показателем λ и логарифмическим множителем в гёльдеровское пространство с показателем $\alpha+\lambda$ и логарифмическим множителем.

Лемма 2.4. *Пусть* $0<\varepsilon,\ 0<\alpha<\lambda\leq 1,$ *функция* $f(x)\in H^{\lambda,1}([a;b])$ $(f(x)\in H^{\lambda}([a;b]))$ *продлена нулём вне отрезка* $[a,b]$, *тогда оператор локализованного дифференцирования* $D^{\alpha,-\varepsilon}$ *ограниченно действует из пространства* $H^{\lambda,1}([a;b])$ *в пространство* $H^{\lambda-\alpha,1}([a;b])$. *Существуют такое* ε_0, *константа* $c>0$, *функция* $\psi(x), |\psi(x)|<\delta, \psi(x)\in H^{\lambda,1}([a;b])$ $\left(\psi(x)\in H^{\lambda}([a;b])\right)$, *что для любых* $\varepsilon<\varepsilon_0$

$$f(x)-f(x-\varepsilon)=\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}D^{\alpha,-\varepsilon}f(x)-\frac{\alpha c}{(1-\alpha)}\varepsilon-\alpha\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\psi(x)-\psi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt,$$

$$\left|\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\psi(x)-\psi(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}dt\right|\leq c\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{\varepsilon}, c\in R, \text{для} f(x)\in H^{\lambda,1}([a;b]),$$

$$\left|\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\psi(x)-\psi(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}dt\right|\leq c\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda-\alpha}, \text{для} f(x)\in H^{\lambda}([a;b])). \tag{8}$$

Доказательство. Из замечания к лемме 2.4 в работе [3] следует, что для любого $\delta>0$ функция $f(x)\in H^{\lambda,1}([a;b])$ $(f(x)\in H^{\lambda}([a;b]))$ может быть представлена в виде:

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)+\psi(x),$$

где $f_1(x), f_2(x)$ – неубывающие ломанные, $\psi(x)\in H^{\lambda,1}[a;b]$ $\left(\psi(x)\in H^{\lambda}[a;b]\right), |\psi(x)|<\delta$. В случае, если ε выберем настолько малым, что $x, x-\varepsilon$ принадлежат одному частичному отрезку, разбиение отрезка $[a;b]$, при построении ломаных $f_1(x), f_2(x)$, то $|\psi(t)-\psi(t-\varepsilon)|<c\varepsilon^{\lambda}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ $\left(|\psi(t)-\psi(t-\varepsilon)|<c\varepsilon^{\lambda}\right), t, t-\varepsilon\in[x-\varepsilon;x]$. Обозначим $f_1(x)-f_2(x)=cx+b=\phi(x), c, b\in R$. Тогда можем записать:

$$D^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x)=\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\phi(x)-\phi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt=$$

$$=\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{c(x-t)\,dt}{(x-t)^{1+\alpha}}=\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha c\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}=$$

$$=\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha(\phi(x)-\phi(x-\varepsilon))}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}=\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}. \tag{9}$$

Для функции $\psi(x), \psi(x)\in H^{\lambda,1}([a;b])$ $\left(\psi(x)\in H^{\lambda}([a;b])\right)$ можем записать:

$$|D^{\alpha,-\varepsilon}\psi(x)|\leq\frac{|\psi(x)-\psi(x-\varepsilon)|}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{|\psi(x)-\psi(t)|}{(x-t)^{\alpha+1}}dt\leq\frac{\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda,1}}\varepsilon^{\lambda}}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}\ln\frac{1}{\varepsilon}+$$

$$+\frac{\alpha\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda,1}}}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{(x-t)^{\lambda}\ln\frac{1}{x-t}dt}{(x-t)^{\alpha+1}}=\frac{\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda,1}}\varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\ln\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\alpha\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda,1}}\varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(\lambda-\alpha)}\ln\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\alpha\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda,1}}\varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(\lambda-\alpha)^{2}}.$$

$$|D^{\alpha,-\varepsilon}\psi(x)|\leq\frac{|\psi(x)-\psi(x-\varepsilon)|}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{|\psi(x)-\psi(t)|}{(x-t)^{\alpha+1}}dt\leq\frac{\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda}}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+$$

$$+\frac{\alpha\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{(x-t)^{\lambda}\,dt}{(x-t)^{\alpha+1}}=\frac{\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\frac{\alpha\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(\lambda-\alpha)}=\frac{\lambda\left\|\psi\right\|_{H^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(\lambda-\alpha)}. \tag{10}$$

Пусть $f(x)\in H^{\lambda,1}([a;b]), 0<\lambda\leq 1$. Докажем, что

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{\alpha}}\in H^{\lambda-\alpha,1}([a;b]), 0<\lambda-\alpha. \tag{11}$$

Заметим, что случай $f(x)\in H^{\lambda}([a;b])$ доказан в [12]. Имеем:

$$\frac{f(x+h)-f(a)}{(x+h-a)^{\alpha}}-\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{\alpha}}=\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h-a)^{\alpha}}+(f(x)-f(a))\frac{(x-a)^{\alpha}-(x+h-a)^{\alpha}}{(x+h-a)^{\alpha}(x-a)^{\alpha}}=A_1+A_2.$$

$$|A_1| \le \frac{ch^\lambda}{(x+h-a)^\alpha} \ln\left(\frac{1}{|h|}\right) \le ch^{\lambda-\alpha} \ln\left(\frac{1}{|h|}\right).$$

Рассмотрим случай $x-a \le |h|$. Поскольку

$$\left((x-a)^{\lambda-\alpha} \ln\left(\frac{1}{x-a}\right)\right)' = (\lambda-\alpha)(x-a)^{\lambda-\alpha-1} \ln\left(\frac{1}{x-a}\right) - \frac{1}{x-a}(x-a)^{\lambda-\alpha} =$$

$$= (x-a)^{\lambda-\alpha-1}\left((\lambda-\alpha)\ln\left(\frac{1}{x-a}\right)-1\right) > 0,$$

то можем записать следующие оценки:

$$|A_2| \le c_1 (x-a)^\lambda \ln\left(\frac{1}{x-a}\right) \frac{h(x+h-a)^{\alpha-1}}{(x+h-a)^\alpha (x-a)^\alpha} \le c_1 \frac{(x-a)^{\lambda-\alpha} h}{x+h-a} \ln\left(\frac{1}{x-a}\right) \le c_1 h^{\lambda-\alpha} \ln\left(\frac{1}{|h|}\right).$$

Пусть $x-a > |h|$. Поскольку

$$\left((x-a)^{\lambda-1} \ln\left(\frac{1}{x-a}\right)\right)' = (x-a)^{\lambda-2}\left((\lambda-1)\ln\left(\frac{1}{x-a}\right)-1\right) < 0,$$

то имеем:

$$|A_2| \le c_1 (x-a)^\lambda \ln\left(\frac{1}{x-a}\right) \frac{h(x-a)^{\alpha-1}}{(x+h-a)^\alpha (x-a)^\alpha} \le c_1 (x-a)^{\lambda-1} \ln\left(\frac{1}{x-a}\right) \frac{h}{(x+h-a)^\alpha} \le$$

$$\le c_1 h^{\lambda-1} \ln\left(\frac{1}{|h|}\right) \frac{h}{(x+h-a)^\alpha} \le c_1 h^{\lambda-\alpha} \ln\left(\frac{1}{|h|}\right).$$

Докажем (8).

$$D^{\alpha,-\varepsilon} f(x) = \frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{x-\varepsilon}^{x} \frac{\phi(x)-\phi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{x-\varepsilon}^{x} \frac{\psi(x)-\psi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt;$$

$$f(x)-f(x-\varepsilon) = \Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha D^{\alpha,-\varepsilon} f(x) - \alpha\varepsilon^\alpha \int\limits_{x-\varepsilon}^{x} \frac{\phi(x)-\phi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt - \alpha\varepsilon^\alpha \int\limits_{x-\varepsilon}^{x} \frac{\psi(x)-\psi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt =$$

$$= \Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha D^{\alpha,-\varepsilon} f(x) - \alpha \frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{(1-\alpha)} - \alpha\varepsilon^\alpha \int\limits_{x-\varepsilon}^{x} \frac{\psi(x)-\psi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt.$$

Из оценок (9), (10), (11) следует (8). Случай $\phi(x) \in H^\lambda([a;b])$, $0 < \lambda \le 1$, доказывается аналогично.

Докажем результат о действии $D^{\alpha,-\varepsilon}$ в гёльдеровских пространствах. Поскольку

$$\frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha}([a;b]), \left(\frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha,1}([a;b])\right),$$

то докажем, что

$$\psi_1(x) = \int\limits_{x-\varepsilon}^{x} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt = \int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{f(x)-f(x-s)}{s^{\alpha+1}} ds \in H^{\lambda-\alpha}([a;b]) \left(\psi_1(x) \in H^{\lambda-\alpha,1}([a;b])\right).$$

Используя подстановку $t|_0^\varepsilon = h + s|_{-h}^{\varepsilon-h}$ в $\psi_1(x+h)$, можем записать:

$$\psi_1(x+h) - \psi_1(x) = \int\limits_{-h}^{\varepsilon-h} \frac{f(x+h)-f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}} dt + \int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\varepsilon} (f(x)-f(x-t))\left((t+h)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}\right) dt + \int\limits_{-h}^{0} (f(x+h)-f(x-t))(t+h)^{-\alpha-1} dt +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\varepsilon} (f(x+h)-f(x))(t+h)^{-\alpha-1} dt - \int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} \frac{f(x+h)-f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}} dt = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

В случае, если $x-a<\varepsilon, \alpha+\lambda<1, f(x)\in H^{\lambda}([a;b])$, $D^{\alpha,-\varepsilon}f(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\int\limits_{a}^{x}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}dt$ и $|\psi_1(x)|\leq c\int\limits_{0}^{x-a}t^{\lambda-\alpha-1}dt<\infty$. Поэтому $|\psi_1(a)|=0$ и $D^{\alpha,-\varepsilon}f(a)=\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}$. Результат о действии оператора $D^{\alpha,-\varepsilon}f(x)$ следует из леммы 13.1 и теоремы 13.5 из [6].

Пусть $x-a\geq\varepsilon, h, \alpha+\lambda<1, f(x)\in H^{\lambda}([a;b])$, тогда, используя лемму 13.1 ([6]), можем записать:

$$|J_1|\leq\int\limits_{0}^{x-a}|f(x)-f(x-t)|\left(t^{-\alpha-1}-(t+h)^{-\alpha-1}\right)dt\leq c_1h^{\lambda-\alpha}.$$

$$|J_2|\leq c_2h^{\lambda-\alpha}.$$

$$|J_3|\leq\int\limits_{0}^{x-a}|f(x+h)-f(x)|\,(t+h)^{-\alpha-1}dt\leq c_3h^{\lambda-\alpha},$$

где $c_1,c_2,c_3\in R$.

Оценим J_4. Используя (3.8) из [6], имеем:

$$|J_4|=\left|\int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}\frac{f(x+h)-f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}}dt\right|\leq c_4\int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}(t+h)^{\lambda-\alpha-1}dt\leq c_5h(\varepsilon+h)^{\lambda-\alpha-1}\leq c_5h^{\lambda-\alpha}.$$

Если $0<\alpha<\lambda\leq1, f(x)\in H^{\lambda,1}([a;b])$, имеем:

$$|J_1|\leq\int\limits_{0}^{x-a}|f(x)-f(x-t)|\left(t^{-\alpha-1}-(t+h)^{-\alpha-1}\right)dt\leq c_1\int\limits_{0}^{x-a}t^{\lambda}\ln\frac{1}{t}\left(t^{-\alpha-1}-(t+h)^{-\alpha-1}\right)dt.$$

Если $x-a\geq h$, верны следующие оценки:

$$|J_1|\leq c_1\int\limits_{0}^{h}t^{\lambda-\alpha-1}\ln\frac{1}{t}dt+c_1h(\alpha+1)\int\limits_{h}^{x-a}t^{\lambda-\alpha-2}\ln\frac{1}{t}dt=c_1\left.\frac{t^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{t}\right|_{0}^{h}+\frac{c_1}{\lambda-\alpha}\int\limits_{0}^{h}t^{\lambda-\alpha-1}dt+$$

$$+c_1\left.\frac{(\alpha+1)ht^{\lambda-\alpha-1}}{\lambda-\alpha-1}\ln\frac{1}{t}\right|_{h}^{x-a}+c_1h\frac{(\alpha+1)}{\lambda-\alpha-1}\int\limits_{h}^{x-a}t^{\lambda-\alpha-1}dt\leq c_2h^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h}.$$

Для $x-a<h$, имеем:

$$|J_1|\leq c_1\int\limits_{0}^{x-a}t^{\lambda}\ln\frac{1}{t}\left(t^{-\alpha-1}-(t+h)^{-\alpha-1}\right)dt\leq c_1\int\limits_{0}^{h}t^{\lambda-\alpha-1}\ln\frac{1}{t}dt\leq c_2h^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h}.$$

$$|J_2|\leq\int\limits_{-h}^{0}|f(x+h)-f(x-t)|\,(t+h)^{-\alpha-1}dt\leq c_3\int\limits_{-h}^{0}(t+h)^{\lambda-\alpha-1}\ln\frac{1}{t}dt=c_3\left.\frac{(t+h)^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{t}\right|_{-h}^{0}+$$

$$+c_3\int\limits_{-h}^{0}\frac{(t+h)^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha}dt=c_3\frac{h^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h}+c_3\frac{h^{\lambda-\alpha+1}}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha+1)}\leq c_4\frac{h^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h}.$$

$$|J_3|\leq\int\limits_{0}^{\varepsilon}|f(x+h)-f(x)|\,(t+h)^{-\alpha-1}dt\leq c_4h^{\lambda}\ln\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{\varepsilon}\frac{dt}{(t+h)^{\alpha+1}}\leq\frac{c_4h^{\lambda-\alpha}}{\alpha}\ln\frac{1}{h}.$$

$$|J_4|\leq\int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}\frac{|f(x+h)-f(x-t)|}{(t+h)^{\alpha+1}}dt\leq c_5\int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}(h+t)^{\lambda-\alpha-1}\ln\frac{1}{h+t}dt=c_5\left.\frac{(h+t)^{\lambda-\alpha-1}}{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h+t}\right|_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}+$$

$$+c_5\int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}\frac{(h+t)^{\lambda-\alpha-1}}{\lambda-\alpha}dt=\frac{c_5}{\lambda-\alpha}\left((h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h+\varepsilon}-\varepsilon^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)+c_5\frac{(h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha}-\varepsilon^{\lambda-\alpha}}{(\lambda-\alpha)^2}.$$

В случае $h \le \varepsilon$ существует такое $\theta, 0 \le \theta \le 1$, что можем записать:

$$|J_4| \le \frac{c_5 h}{\lambda-\alpha}\left((\lambda-\alpha)(\theta h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha-1}\ln\frac{1}{\theta h+\varepsilon} - (\theta h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha-1}\right) + c_5 h\frac{(\lambda-\alpha)(\theta h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha-1}}{(\lambda-\alpha)^2} \le$$

$$\le \frac{c_5 h}{\lambda-\alpha}(\theta h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha-1}(\lambda-\alpha)\ln\frac{1}{\theta h+\varepsilon} + c_5 h\frac{h^{\lambda-\alpha}}{(\lambda-\alpha+1)} \le c_5 h h^{\lambda-\alpha-1}\ln\frac{1}{h} + \frac{c_5 h h^{\lambda-\alpha}}{(\lambda-\alpha+1)} \le c_6 h^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h}.$$

Для $h > \varepsilon$ имеем:

$$|J_4| \le \frac{c_5}{\lambda-\alpha}\left((h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h+\varepsilon} - \varepsilon^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) + c_5\frac{(h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha} - \varepsilon^{\lambda-\alpha}}{(\lambda-\alpha)^2} \le$$

$$\le \frac{c_5}{\lambda-\alpha}(h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h+\varepsilon} + c_5\frac{(h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha}}{(\lambda-\alpha)^2} \le \frac{c_5}{\lambda-\alpha}(2h)^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{2h} \le \frac{c_6}{\lambda-\alpha}h^{\lambda-\alpha}\ln\frac{1}{h}.$$

Если $x - a < \varepsilon, h, 0 < \alpha < \lambda \le 1, f(x) \in H^{\lambda,1}([a;b])$, доказательство следует после интегрирования по частям и леммы 13.1 из [6]. Лемма доказана.

Вычислим локализованную дробную производную типа Маршо (1) функции $|t - x_0|$. В случае $x_0 \le x \le x_0 + \varepsilon$, используя подстановку

$$\left[\begin{array}{cc} u = t, & du = dt, \\ dv = (x-t)^{-1-\alpha}, & v = \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\alpha}, \end{array}\right]$$

имеем:

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}|t-x_0|\right)(x) = \frac{x-x_0+x-\varepsilon-x_0}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{|x-x_0|-|t-x_0|}{(x-t)^{1+\alpha}}dt = \frac{2x-2x_0-\varepsilon}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}} +$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{x-x_0-t+x_0}{(x-t)^{1+\alpha}}dt + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x_0}\frac{x-x_0-x_0+t}{(x-t)^{1+\alpha}}dt = \frac{2x-2x_0-\varepsilon}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\alpha(x-x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} +$$

$$+\frac{(x-2x_0)(x-x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{(x-2x_0)\varepsilon^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + t\frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\bigg|_{x-\varepsilon}^{x_0} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x_0}\frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\alpha(x-x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} + \frac{(x-2x_0)(x-x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + x_0\frac{(x-x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{(x-x_0)^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} =$$

$$= \frac{\alpha(x-x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} + \frac{(1-\alpha)(x-x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} + \frac{(x-x_0)^{-\alpha}-\varepsilon^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = \frac{(x-x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(x-x_0)^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} =$$

$$= \frac{(x-x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(x-x_0)^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{(x-x_0)^{1-\alpha}}{\varepsilon^{1-\alpha}}2-1\right).$$

Для $x \le x_0$ можем записать:

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}|t-x_0|\right)(x) = -\frac{x-x_0-x+\varepsilon+x_0}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}} - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{x-x_0-t+x_0}{(x-t)^{1+\alpha}}dt = -\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}} -$$

$$-\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{-\alpha}dt = -\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{\alpha(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)}\bigg|_{x-x_0}^{x} = -\frac{\varepsilon^{1-\alpha}(1-\alpha+\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} = -\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Случай $x \ge x_0 + \varepsilon$ доказывается аналогично. Окончательно имеем:

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}|t-x_0|\right)(x) = \begin{cases} -\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, x \le x_0; \\ \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)^{1-\alpha}2-1\right), x_0 \le x \le x_0+\varepsilon; \\ \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, x_0+\varepsilon \le x. \end{cases} \tag{12}$$

Вычислим локализованную дробную производную функции Такаги (6) рис. 1.

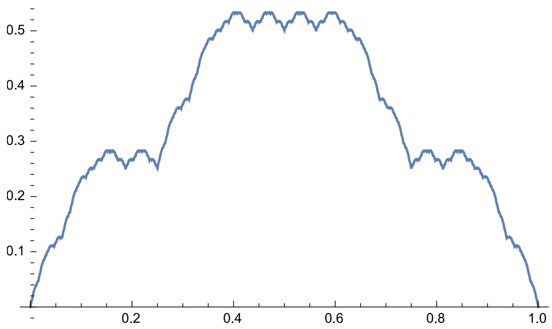

Рис. 1. Plot $\left[\left\{\sum_{n=0}^{10}\frac{\sum_{l=0}^{2\ 4^n}F(4^n x-l)}{4^n}\right\},\{x,0,1\}\right]$

Fig. 1. Plot $\left[\left\{\sum_{n=0}^{10}\frac{\sum_{l=0}^{2\ 4^n}F(4^n x-l)}{4^n}\right\},\{x,0,1\}\right]$

Заметим, что для функции $\psi_n(x)=4^{-n}\phi(4^n x)$ числа $M4^{-n}, M\in Z$ являются периодами:

$$\psi_n\left(x+M4^{-n}\right)=4^{-n}\phi\left(4^n x+M\right)=4^{-n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F\left(4^n x+M-k\right)=4^{-n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F\left(4^n x-k\right)=\psi_n(x)$$

и $M4^{-m}=1$, – минимальный период всех функций $\psi_n(x)$, а значит функции Такаги. Поэтому достаточно вычислить локализованную дробную производную на отрезке $[0,1]$. В этом случае функцию Такаги можно записать в виде:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\phi\left(4^n x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x).$$

Промежутки строгой монотонности функции $\psi_n(x)=4^{-n}\phi(4^n x)$ имеют длину $\frac{4^{-n}}{2}$. Если (x_1,x_2) промежуток монотонности функции $\psi_n(x)$, то он будет промежутком монотонности каждой $\psi_m(x)$, $m<n$.

Приведём примеры промежутков возрастания функций $\psi_n(x)$ (см. рис. 2), угловые точки будем относить только к одному промежутку:

$$\left(0;\frac{1}{2}\right];$$

$$\left(0;\frac{1}{8}\right],\left(\frac{2}{8};\frac{3}{8}\right],\left(\frac{4}{8};\frac{5}{8}\right],\left(\frac{6}{8};\frac{7}{8}\right];$$

$$\left[0;\frac{1}{32}\right],\left[\frac{2}{32};\frac{3}{32}\right],\left[\frac{4}{32};\frac{5}{32}\right],\left[\frac{6}{32};\frac{7}{32}\right],\left[\frac{8}{32};\frac{9}{32}\right],\ldots$$

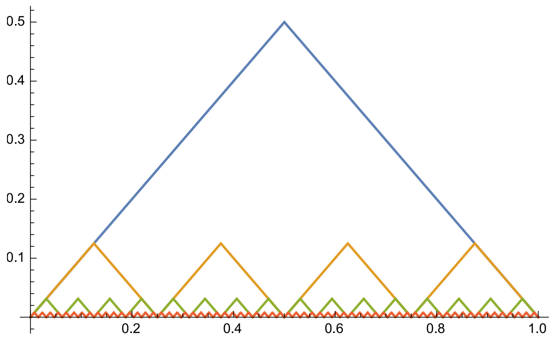

Рис. 2. Plot$[\frac{1}{4^0}\sum\limits_{k=0}^{1}F\left[x4^0-k\right],\frac{1}{4^1}\sum\limits_{k=0}^{4}F\left[x4^1-k\right],\frac{1}{4^2}\sum\limits_{k=0}^{16}F\left[x4^2-k\right],\frac{1}{4^3}\sum\limits_{k=0}^{64}F\left[x4^3-k\right]\},\{\mathrm{x},0,1\}]$

Fig. 2. Plot$[\frac{1}{4^0}\sum\limits_{k=0}^{1}F\left[x4^0-k\right],\frac{1}{4^1}\sum\limits_{k=0}^{4}F\left[x4^1-k\right],\frac{1}{4^2}\sum\limits_{k=0}^{16}F\left[x4^2-k\right],\frac{1}{4^3}\sum\limits_{k=0}^{64}F\left[x4^3-k\right]\},\{\mathrm{x},0,1\}]$

Эти же промежутки можно записать в виде чисел с основанием четыре:

$$\left(0;\frac{2}{4}\right];$$

$$\left(0;\frac{2}{4^2}\right],\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}\right],\left(\frac{2}{4};\frac{2}{4}+\frac{2}{4^2}\right],\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}\right];$$

$$\left[0;\frac{2}{4^3}\right],\left[\frac{1}{4^2};\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}\right],\left[\frac{2}{4^2};\frac{2}{4^2}+\frac{2}{4^3}\right],\left[\frac{3}{4^2};\frac{3}{4^2}+\frac{2}{4^3}\right],\left[\frac{4}{4^2};\frac{4}{4^2}+\frac{2}{4^3}\right],\ldots$$

$$\left(0;0,2_4\right]\equiv\left(0;0,1\,(9)_4\right];$$

$$\left(0;0,02_4\right],\left(0,1_4;0,12_4\right],\left(0,2_4;0,22_4\right],\left(0,3_4;0,32_4\right];$$

$$\left(0;0,002_4\right],\left(0,01_4;0,012_4\right],\left(0,02_4;0,022_4\right],\left(0,03_4;0,032_4\right],\left(0,1_4;0,102_4\right],$$

$$\left(0,11_4;0,112_4\right],\left(0,12_4;0,122_4\right],\left(0,13_4;0,132_4\right],\left(0,2_4;0,202_4\right],\left(0,21_4;0,212_4\right],\left(0,22_4;0,222_4\right],$$

$$\left(0,23_4;0,232_4\right],\left(0,3_4;0,302_4\right],\left(0,31_4;0,312_4\right],\left(0,32_4;0,322_4\right],\left(0,33_4;0,332_4\right].$$

Будем считать, что $0,2\equiv 0,1\,(9)$, т. е. нет чисел, у которых справа от последней ненулевой цифры стоят только нули. Пусть $n=0,1,\ldots$. Все числа, у которых на $n+1$-ом месте стоит 1 (слева и справа от 1 произвольные цифры), и числа, у которых стоит 0 (слева и справа от 0 произвольные цифры), принадлежат промежуткам возрастания функции.

Приведём примеры промежутков убывания функций $\psi_n(x)$:

$$\left(0,2_4;1_4\right]\equiv\left(0,1\,(9)_4;1_4\right];$$

$$\left(0,02_4;0,1_4\right],\left(0,12_4;0,2_4\right],\left(0,22_4;0,3_4\right],\left(0,32_4;1_4\right];$$

$$\left(0,002;0,01\right]_4,\left(0,012;0,02\right]_4,\left(0,022;0,03\right]_4,\left(0,032;0,1\right]_4,\left(0,102;0,11\right]_4,\ldots$$

Все числа, у которых на на $n+1$-ом месте стоит 2 (слева и справа от 2 произвольные цифры), и числа, у которых стоит 3 (слева и справа от 3 произвольные цифры), принадлежат промежуткам убывания функции $\psi_n(x)$.

Запишем промежутки монотонности функций $\psi_n(x),x\in\left[\frac{1}{2}\frac{1}{4^{n_0}},1\right],n=0,1,\ldots,n_0$. Промежутки возрастания:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n_0};\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right],\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n}k;\left(\frac{1}{4}\right)^{n}k+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right],k=1,\ldots,4^n-1,n\leq n_0.$$

Используя запись чисел с основанием четыре, отрезки возрастания можно записать в виде:

$$\left[0,a_1a_2\ldots a_i\ldots a_n;0,a_1a_2\ldots a_i\ldots a_n2\right],a_i=0,1,2,3,i=\overline{1,n}.$$

Поскольку длина отрезка равна $0,\underbrace{00\ldots0}_{n}2$ и

$$\sum_{l=n+2}^{\infty}3\frac{1}{4^l}=\frac{3}{4^{n+2}}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4^{n+1}},$$

то для того, чтобы точка x попала в промежуток возрастания, т. е.

$$0,a_1a_2\ldots a_i\ldots a_n\leq x\leq 0,a_1a_2\ldots a_i\ldots a_n2,$$

на $n+1$ месте должна быть цифра ноль или один, независимо от того, какие цифры идут далее. Следовательно, количество нулей и единиц в записи x как числа с основанием четыре равно числу функций $\psi_n(x)$, для которых x попадает в промежуток возрастания.

Промежутки убывания:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}k;\left(\frac{1}{4}\right)^{n}(k+1)\right],k=0,\ldots,4^n-1,n\leq n_0.$$

Используя запись чисел с основанием четыре, отрезки убывания можно записать в виде:

$$\left[0,a_1a_2\ldots a_n2;0,a_1a_2\ldots a_n2+0,\underbrace{00\ldots02}_{n+1}\right],a_i=0,1,2,3,i=\overline{1,n}.$$

Поскольку $0,a_1a_2\ldots a_n2\,(3)=0,a_1a_2\ldots a_n3\leq 0,a_1a_2\ldots a_n2+0,\underbrace{00\ldots0}_{n}2$. Значит, если точка $x=0,a_1a_2\ldots a_n2$ имеет в записи в виде числа с основанием четыре двойку, то независимо от последующих цифр справа от двойки x попадает в промежуток убывания функции $\psi_n(x)$. Аналогично, если точка $x=0,a_1a_2\ldots a_n3$

имеет в записи в виде числа с основанием четыре тройку, то не зависимо от последующих цифр справа от тройки x попадает в промежуток убывания функции $\psi_n(x)$. Следовательно, количество двоек и троек в записи x как числа с основанием четыре равно числу функций $\psi_n(x)$, для которых x попадает в промежуток убывания.

Рассмотрим произвольную функцию $\psi_n(x), x \in \left[\frac{1}{2}\frac{1}{4^{n_0}}, 1\right]$ и выберем $\varepsilon \leq \frac{1}{2}\frac{1}{4^{n_0}}, n \leq n_0$. Поскольку функция $\psi_n(x)$ в точках $\frac{k}{4^n}, \frac{1}{2}\frac{k}{4^n}, k \in [1, 4^n]$ меняет монотонность, то такой выбор ε гарантирует, что на промежутке $(x-\varepsilon, x)$ будет находиться не более одной точки смены монотонности и значит будет существовать k, такое, что $\Psi_n(x) = 4^{-n}|4^n t - k| = \left|t - \frac{k}{4^n}\right|$ и мы можем применить формулу (7). Т. к. при $\frac{k}{4^n} \leq x \leq \frac{k}{4^n} + \varepsilon$ выполняется $0 \leq \frac{x - \frac{k}{4^n}}{\varepsilon} \leq 1$, то непрерывная функция $\varepsilon^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\psi_n)(x)$ принимает все значения из промежутка $[-1, 1]$ в зависимости от $x \in [4^{-n}k, 4^{-n}k + \varepsilon]$. В точке $x = \frac{k}{4^n}$ локальная дробная производная терпит разрыв первого рода, оставаясь непрерывной слева, поскольку

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\psi_n)(x) = -1, \text{если } x = \frac{k}{4^n},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\psi_n)(x) = 1, \text{если } x == \frac{k}{4^n} + \varepsilon.$$

Обозначим:

$$i_n = [4^n x] + \begin{cases} 1, [4^n x] \neq 4^n x; \\ 0, [4^n x] = 4^n x; \end{cases} \quad f_n = [4^n(x-\varepsilon)] + \begin{cases} 1, [4^n(x-\varepsilon)] \neq 4^n x; \\ 0, [4^n(x-\varepsilon)] = 4^n x; \end{cases} \quad i_n, f_n \in [0; 1; \ldots; 4^n];$$

ближайшую точку минимума справа, для точек $4^n x$ и $4^n(x-\varepsilon)$ соответственно, для которой функция $4^{-n}\phi(i_n) = 4^{-n}\phi(f_n) = 0$. Обозначим через $k(x,n)$ индикатор, который равен нулю, если на на $n+1$-ом месте в записи x как числа с основанием четыре стоит двойка или тройка и, равен нулю, если на $n+1$-ом месте ноль или один. Иначе говоря, $k(x,n) = 0$ для x, принадлежащим промежутку убывания функции $k(x,n) = 1$, и для x, принадлежащим промежутку возрастания функции:

$$k(x,n) = \begin{cases} 0, x = 0, \underbrace{\ldots 2}_{n+1}\ldots, \vee x = 0, \underbrace{\ldots 3}_{n+1}\ldots; \\ 1, x = 0, \underbrace{\ldots 1}_{n+1}\ldots, \vee x = 0, \underbrace{\ldots 0}_{n+1}\ldots. \end{cases}$$

Для однозначности примем, что $k(x,n) = 0$, если существует представление числа x такое, что на $n+1$-ом месте стоит три или два и индикатор $k(x,n) = 1$, если существует представление числа x такое, что на $n+1$-ом месте стоит один или ноль. Например, для функции $\psi_1(x)$ индикатор точки максимума $k(0,11(3);1) = k(0,12;1) = 1$, индикатор точки минимума $k(0,12(3);2) = k(0,130;2) = 0$. Такой выбор даёт возможность отнести точки минимума $\frac{k}{4^n}, k = \overline{1, 4^n}$ функций $\psi_n(x)$ к промежуткам убывания, а точки максимума $\frac{k}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n}, k = \overline{1, 4^n}$ функций $\psi_n(x)$ – к промежуткам возрастания. Индикатор $k(x,n)$ можно также записать в виде:

$$k(x,n) = \begin{cases} 0, \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n} < x, \\ 1, x \leq \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n}. \end{cases} \tag{13}$$

Для каждого $n \in N \cup \{0\}$ возможны случаи:

$$\text{a) } \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n} \leq x \leq \frac{i_n}{4^n} \text{ – промежуток, в котором } \psi_n(x) \text{ убывает,}$$

$$\text{b) } \frac{i_n - 1}{4^n} \leq x \leq \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n} \text{ – промежуток, в котором } \psi_n(x) \text{ возрастает,}$$

$$\text{c) } \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n} \leq x - \varepsilon \leq \frac{f_n}{4^n} \text{ – промежуток, в котором } \psi_n(x-\varepsilon) \text{ убывает,}$$

$$\text{d) } \frac{f_n - 1}{4^n} \leq x - \varepsilon \leq \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n} \text{ – промежуток, в котором } \psi_n(x-\varepsilon) \text{ возрастает,}$$

$$n \in N \cup \{0\},\ f_n, i_n \in Z, f_n \leq i_n.$$

Неравенства a)-d), используя обозначения (13), можно переписать в виде:

$$\text{a)}\frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n} - k(x,n)\frac{1}{2\times 4^n} \leq x \leq \frac{i_n}{4^n} - k(x,n)\frac{1}{2\times 4^n},$$

$$\text{b)}\frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n} - k(x-\varepsilon,n)\frac{1}{2\times 4^n} \leq x - \varepsilon \leq \frac{f_n}{4^n} - k(x-\varepsilon,n)\frac{1}{2\times 4^n}.$$

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{4^{n_0}}$. Обозначим ближайшую для $x4^n$ точку минимума функции $\psi_n(x)$ через

$$k'_{n,x} = \begin{cases} i_n, \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n} \leq x; \\ i_n - 1, \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n} > x; \end{cases} = i_n - k(x, n).$$

Используя формулу (7), вычислим локализованную дробную производную функции $\sum\limits_{n=0}^{n_0} \psi_n(x)$ в точке $x \in \left[\frac{1}{2}\frac{1}{4^{n_0}}, 1\right]$.

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} \sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k)\right)(x) = \sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} F\left(4^n x - k'_{n,x}\right)\right)(x) =$$

$$= \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=0}^{n_0} \begin{cases} -1, 4^n x \leq i_n - k(x,n); \\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x,n)}{4^n \varepsilon}\right)^{1-\alpha} 2 - 1\right), i_n - k(x,n) \leq 4^n x \leq i_n - k(x,n) + 4^n \varepsilon; \\ 1, i_n - k(x,n) + 4^n \varepsilon \leq 4^n x. \end{cases} \tag{14}$$

Вычислим локализованную дробную производную функции Такаги в точке $x \in \left[\frac{1}{2}\frac{1}{4^{n_0}}, 1\right]$. Поскольку $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{4^{n_0}}$, то промежутку $[x-\varepsilon, x)$ принадлежит одна точка $\frac{i_{n_0}-1}{4^{n_0}}$ или $\frac{i_{n_0}-1}{4^{n_0}} + \frac{2}{4^{n_0+1}}$, четыре экстремальные точки функции ψ_{n_0+1}, восемь экстремальных точкек функции ψ_{n_0+2}, и т. д. Поскольку для x ближайшая слева точка экстремума $\frac{i_n}{4^n} - \frac{1+k(x,n)}{2\times 4^n}$, то для локализованной производной функции Такаги на отрезке $[0;1]$ можем записать:

$$\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} f(x) = \mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k)\right)(x) =$$

$$= \mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k)\right)(x) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{4^n} \mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(F\left(x - \frac{k}{4^n}\right)\right)(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n}\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} F\left(4^n x - k'_{n,x}\right)\right)(x) +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\frac{i_n}{4^n} - \frac{1+k(x,n)}{2\times 4^n}}^{x} \frac{\left|\frac{i_n - k(x,n)}{4^n} - t\right| dt}{(x-t)^\alpha} + (1 - k(x,n)) \int\limits_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n} + \frac{1}{2\times 4^n}} \frac{\left(t - \frac{i_n-1}{4^n}\right) dt}{(x-t)^\alpha} + \right.$$

$$+ \int\limits_{\frac{i_n-1}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n}} \frac{\left(\frac{i_n-1}{4^n} - t\right) dt}{(x-t)^\alpha} + \int\limits_{\frac{i_n-2}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n}} \frac{\left(t - \frac{i_n-2}{4^n}\right) dt}{(x-t)^\alpha} + \ldots +$$

$$+ \int\limits_{\frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2\times 4^n}}^{\frac{f_n+1}{4^n}} \frac{\left(\frac{f_n+1}{4^n} - t\right) dt}{(x-t)^\alpha} + \int\limits_{\frac{f_n}{4^n}}^{\frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2\times 4^n}} \frac{\left(t - \frac{f_n}{4^n}\right) dt}{(x-t)^\alpha} +$$

$$\left. + k(x-\varepsilon, n) \int\limits_{\frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2\times 4^n}}^{\frac{f_n}{4^n}} \frac{\left(\frac{f_n}{4^n} - t\right) dt}{(x-t)^\alpha} + \int\limits_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n} - \frac{k(x-\varepsilon,n)}{2\times 4^n}} \frac{\left|\frac{f_n - k(x-\varepsilon,n)}{4^n} - t\right| dt}{(x-t)^\alpha}\right). \tag{15}$$

Применим для вычисления локализованной производной формулу (14) и то, что

$$\varepsilon = \frac{1}{2\times 4^{n_0}}, 4^{n_0} = \frac{1}{2\varepsilon}, n_0 = \log_4 \frac{1}{2\varepsilon} = \log_4 \frac{1}{2} + \log_4 \frac{1}{\varepsilon} = \log_4 \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}, \frac{1}{\log_4 \frac{1}{\varepsilon}} =$$

$$= \frac{n_0+1}{(n_0+1)\log_4 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\log_4 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}}{(n_0+1)\log_4 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\log_4 \frac{1}{\varepsilon}}{(n_0+1)\log_4 \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\frac{1}{2}}{(n_0+1)\log_4 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{(n_0+1)} + \frac{(n_0+1)^{-1}}{2\log_4 \frac{1}{\varepsilon}},$$

тогда имеем:

$$\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k)\right)(x) = A = \frac{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{(n_0+1)}\sum_{n=0}^{n_0}\begin{cases}-1, 4^nx \le i_n - k(x,n);\\ \left(\left(\frac{4^nx-i_n+k(x,n)}{4^n\varepsilon}\right)^{1-\alpha}2-1\right), i_n-k(x,n)\le 4^nx\le i_n-k(x,n)+4^n\varepsilon;\\ 1, i_n-k(x,n)+4^n\varepsilon\le 4^nx;\end{cases}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{(n_0+1)}\sum_{n=0}^{n_0}\begin{cases}-1, 4^nx \le i_n - k(x,n);\\ \left(\left(\frac{4^nx-i_n+k(x,n)}{4^n\varepsilon}\right)^{1-\alpha}2-1\right), i_n-k(x,n)\le 4^nx\le i_n-k(x,n)+4^n\varepsilon;\\ 1, i_n-k(x,n)+4^n\varepsilon\le 4^nx.\end{cases}\right). \tag{16}$$

В оставшейся части (15) воспользуемся, учитывая, что $0<\alpha<1$, интегрированием по частям:

$$\begin{bmatrix}\frac{i_n-1}{4^n}-t=u, & -dt=du,\\ (x-t)^{-\alpha}=dv & -\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}=v.\end{bmatrix}$$

Тогда имеем:

$$\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}f(x)=A+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{d}{dx}\times$$

$$\times\left((1-\alpha)k(x,n)\int\limits_{\frac{i_n}{4^n}-\frac{1}{4^n}}^{x}\frac{\left|\frac{i_n-1}{4^n}-t\right|dt}{(x-t)^{\alpha}}+\frac{1-k(x,n)}{(1-\alpha)^{-1}}\left(\int\limits_{\frac{i_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n}}^{x}\frac{\left|\frac{i_n}{4^n}-t\right|dt}{(x-t)^{\alpha}}+\int\limits_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}\frac{\left(t-\frac{i_n-1}{4^n}\right)dt}{(x-t)^{\alpha}}\right)-\right.$$

$$-\left(\frac{i_n-1}{4^n}-t\right)(x-t)^{1-\alpha}\Big|_{\frac{i_n-2}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n}}-\int\limits_{\frac{i_n-2}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n}}(x-t)^{1-\alpha}dt-$$

$$-\left(t-\frac{i_n-2}{4^n}\right)(x-t)^{1-\alpha}\Big|_{\frac{i_n-2}{4^n}}^{\frac{i_n-2}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}+\int\limits_{\frac{i_n-2}{4^n}}^{\frac{i_n-2}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}(x-t)^{1-\alpha}dt-\ldots-$$

$$-\left(\frac{f_n+1}{4^n}-t\right)(x-t)^{1-\alpha}\Big|_{\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}^{\frac{f_n+1}{4^n}}-\int\limits_{\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}^{\frac{f_n+1}{4^n}}(x-t)^{1-\alpha}dt-$$

$$-\left(t-\frac{f_n}{4^n}\right)(x-t)^{1-\alpha}\Big|_{\frac{f_n}{4^n}}^{\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}+\int\limits_{\frac{f_n}{4^n}}^{\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}(x-t)^{1-\alpha}dt+$$

$$+k(x-\varepsilon,n)\left(-\left(\frac{f_n}{4^n}-t\right)(x-t)^{1-\alpha}\Big|_{\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n}}^{\frac{f_n}{4^n}}-\int\limits_{\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n}}^{\frac{f_n}{4^n}}(x-t)^{1-\alpha}dt-\right.$$

$$\left.-\left(t-\frac{f_n-1}{4^n}\right)(x-t)^{1-\alpha}\Big|_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n}}+\int\limits_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n}}(x-t)^{1-\alpha}dt\right)+$$

$$\left.+(1-k(x-\varepsilon,n))\left(-\left(\frac{f_n}{4^n}-t\right)(x-t)^{1-\alpha}\Big|_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n}}-\int\limits_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n}}(x-t)^{1-\alpha}dt\right)\right)=$$

$$=A+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{d}{dx}\times$$

$$\left(k(x,n)(1-\alpha)\left(-\left(t-\frac{i_n-1}{4^n}\right)\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{x}-\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\Big|_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{x}\right)+(1-k(x,n))(1-\alpha)\times\right.$$

$$\left(-\left(\frac{i_n}{4^n}-t\right)\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{\frac{i_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n}}^{x}+\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\Bigg|_{\frac{i_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n}}^{x}-\left(t-\frac{i_n-1}{4^n}\right)\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}-\right.$$

$$\left.-\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\Bigg|_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\times4^n}(x-\frac{i_n-2}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}+\frac{(x-\frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(x-\frac{i_n-2}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-$$

$$-\frac{1}{2\times4^n}(x-\frac{i_n-2}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}-\frac{(x-\frac{i_n-2}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(x-\frac{i_n-2}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-$$

$$-\ldots+\frac{1}{2\times4^n}(x-\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}+\frac{(x-\frac{f_n+1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(x-\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+$$

$$-\left(\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}-\frac{f_n}{4^n}\right)(x-\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}-\frac{(x-\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(x-\frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+$$

$$+k(x-\varepsilon,n)\left(\left(\frac{f_n}{4^n}-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}\right)(x-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}+\frac{(x-\frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{(x-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n}-\frac{f_n-1}{4^n}\right)\left(x-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n}\right)^{1-\alpha}+\frac{x-\varepsilon-\frac{f_n-1}{4^n}}{\varepsilon^{\alpha-1}}-\frac{(x-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha}+\frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)+$$

$$\left.+(1-k(x-\varepsilon,n))\left(\left(\frac{f_n}{4^n}-x+\varepsilon\right)\varepsilon^{1-\alpha}+\frac{(x-\frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)\right)=$$

$$=A+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{k(x,n)}{(2-\alpha)}(x-\frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}+(1-k(x,n))\left(\frac{1}{2\times4^n}(x-\frac{i_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(x-\frac{i_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{1}{2\times4^n}(x-\frac{i_n-1}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}-\frac{(x-\frac{i_n-1}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(x-\frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}\right)+$$

$$+\frac{(x-\frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(x-\frac{i_n-2}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(x-\frac{i_n-2}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(x-\frac{i_n-2}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-$$

$$-\ldots+\frac{(x-\frac{f_n+1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(x-\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(x-\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(x-\frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+$$

$$+k(x-\varepsilon,n)\left(\frac{(x-\frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha}-2\frac{(x-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha}+\left(x-\varepsilon-\frac{f_n-1}{4^n}\right)\varepsilon^{1-\alpha}+\frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)+$$

$$\left.+(1-k(x-\varepsilon,n))\left(\left(\frac{f_n}{4^n}-x+\varepsilon\right)\varepsilon^{1-\alpha}+\frac{(x-\frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)\right).$$

Поскольку числа $i_n, f_n, k(x-\varepsilon,n), k(x,n)$ используются для общности записи, то для конкретного x они фиксированные и $\frac{d}{dx}\frac{i_n}{4^n}=\frac{d}{dx}\frac{f_n}{4^n}=\frac{d}{dx}k(x-\varepsilon,n)=\frac{d}{dx}k(x-\varepsilon,n)=0$. Тогда имеем:

$$\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}f(x)=A+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\times$$

$$\times\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}\left(k(x,n)\frac{(x-\frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+(1-k(x,n))\left(\frac{(x-\frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-2\frac{(x-\frac{i_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}\right)\right)+\right.$$

$$+(x-\frac{i_n}{4^n}+\frac{2}{2\times4^n})^{1-\alpha}-(x-\frac{i_n}{4^n}+\frac{3}{2\times4^n})^{1-\alpha}-(x-\frac{i_n}{4^n}+\frac{3}{2\times4^n})^{1-\alpha}+(x-\frac{i_n}{4^n}+\frac{4}{2\times4^n})^{1-\alpha}-$$

$$-\ldots+(x-\frac{f_n}{4^n}-\frac{2}{2\times4^n})^{1-\alpha}-(x-\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}-(x-\frac{f_n}{4^n}-\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}+(x-\frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha}+$$

$$+k(x-\varepsilon,n)\left((x-\frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha}-2(x-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times4^n})^{1-\alpha}+\varepsilon^{1-\alpha}\right)$$

$$+ (1 - k(x-\varepsilon,n))\left(-\varepsilon^{1-\alpha} + (x - \frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha}\right)\Bigg).$$

Окончательно, локализованная дробная производная функции Такаги при выполнении условий (13) и с учётом (16) может быть записана в виде:

$$\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} f(x) = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(n_0+1)}\sum_{n=0}^{n_0}\begin{cases}-1, 4^n x \le i_n - k(x,n);\\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x,n)}{4^n\varepsilon}\right)^{1-\alpha} 2 - 1\right), i_n - k(x,n) \le 4^n x \le i_n - k(x,n) + 4^n\varepsilon;\\ 1, i_n - k(x,n) + 4^n\varepsilon \le 4^n x;\end{cases} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{(n_0+1)}\sum_{n=0}^{n_0}\begin{cases}-1, 4^n x \le i_n - k(x,n);\\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x,n)}{4^n\varepsilon}\right)^{1-\alpha} 2 - 1\right), i_n - k(x,n) \le 4^n x \le i_n - k(x,n) + 4^n\varepsilon;\\ 1, i_n - k(x,n) + 4^n\varepsilon \le 4^n x.\end{cases}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\left(x - \frac{i_n - 1}{4^n}\right)^{1-\alpha} - (1 - k(x,n))\, 2\left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{1}{2\times 4^n}\right)^{1-\alpha} -\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{(i_n - f_n)2-2}\left((-1)^k\left((x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+1}{2\times 4^n})^{1-\alpha} - (x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+2}{2\times 4^n})^{1-\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+ (x - \frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha} - 2k(x-\varepsilon,n)\,(x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2\times 4^n})^{1-\alpha} + (2k(x-\varepsilon,n) - 1)\,\varepsilon^{1-\alpha}\right). \tag{17}$$

Лемма 2.5 *Для локализованной дробной производной функции Такаги имеет место оценка:*

$$|\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} f(x)| \le const\,\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}.$$

Функция Такаги принадлежит пространству $H^{1,1}([0;1])$.

Доказательство. Будем рассматривать последовательно члены (17). Для A, определённого в (16), с учётом (14), имеем:

$$|A| \le \frac{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)(n_0+1)}\left(1 + \frac{1}{2\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\right)\sum_{n=0}^{n_0} 1 = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}(n_0+1)}{\Gamma(2-\alpha)(n_0+1)}\left(1 + \frac{1}{2\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(1 + \frac{1}{2\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\right). \tag{18}$$

В случае $k(x,n) = 1$, для следующей части в (17) имеем:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\left(x - \frac{i_n - 1}{4^n}\right)^{1-\alpha} + (1 - k(x,n))\, 2\left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{1}{2\times 4^n}\right)^{1-\alpha}\right) =$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{1-\alpha}}\right)^n = \left(\frac{1}{2\times 4^{n_0}}\right)^{1-\alpha}\frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{4^{\alpha-1}}{1 - 4^{\alpha-1}} = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{2^{\alpha-1}}{1 - 4^{\alpha-1}}. \tag{19}$$

В случае $k(x,n) = 0$, можем записать:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\left(x - \frac{i_n - 1}{4^n}\right)^{1-\alpha} + 2\left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{1}{2\times 4^n}\right)^{1-\alpha}\right) \le \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{4^n}\right)^{1-\alpha} +\right.$$

$$\left.+ 2\left(\frac{1}{2\times 4^n}\right)^{1-\alpha}\right) = \frac{1 + 2^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}\right)^{1-\alpha} \le \frac{1 + 2^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}2^{1-\alpha}}{1 - 4^{\alpha-1}}. \tag{20}$$

Перейдём к оценке третьего слагаемого. Поскольку

$$(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+2}{2\times 4^n})^{1-\alpha} - (x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+1}{2\times 4^n})^{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{2\times 4^n}(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+1+\theta(n,k)}{2\times 4^n})^{-\alpha} = a_{n,k},$$

$0 \leq \theta(n,k) \leq 1, n \geq n_0$, то $a_{n,k}$ монотонно убывает по k и имеет место следующая оценка:

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{2(i_n-f_n)-2}(-1)^k\frac{a_{n,k}}{\Gamma(2-\alpha)}\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{(x-\frac{i_n}{4^n}+\frac{2+1}{2\times 4^n})^{1-\alpha}-(x-\frac{i_n}{4^n}+\frac{2}{2\times 4^n})^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \leq$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{3}{2}\right)^{1-\alpha}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(\frac{1}{4^{1-\alpha}})^n=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{3}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{2^{1-\alpha}}{4^{1-\alpha}}(\frac{1}{2\times 4^{n_0}})^{1-\alpha}=\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{3}{4}\right)^{1-\alpha}. \tag{21}$$

Рассмотрим последнее слагаемое равенства (17), при условии, что $0 < \varepsilon < 1, k(x-\varepsilon, n) = 1$, т. е. $0 \leq \{(x-\varepsilon)4^n\} \leq \frac{1}{2}$. Используя оценки (3.8), (3.9) из [6], можем записать:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|(x-\frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}-2\left((x-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times 4^n})^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|\varepsilon^{1-\alpha}-(x-\frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha}\right|+\frac{2}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|(x-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times 4^n})^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{[4^n(x-\varepsilon)]+1-4^n(x-\varepsilon)}{4^n}c\varepsilon^{-\alpha}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|\frac{[4^n(x-\varepsilon)]+1-(x-\varepsilon)4^n}{4^n}+\frac{1}{2\times 4^n}\right|c\varepsilon^{-\alpha} \leq$$

$$\leq c\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1-\{4^n(x-\varepsilon)\}}{4^n}\varepsilon^{-\alpha}+2c\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|\frac{1-\{4^n(x-\varepsilon)\}}{4^n}+\frac{1}{2\times 4^n}\right|\varepsilon^{-\alpha} \leq \varepsilon^{-\alpha}c\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{4^n}+$$

$$+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{6c\varepsilon^{-\alpha}}{2\times 4^n} \leq c\varepsilon^{-\alpha}(1+3)\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{4^n} \leq \varepsilon^{-\alpha}c4\frac{1}{4^{n_0+1}}\frac{4}{3}=c_1\varepsilon^{1-\alpha}. \tag{22}$$

В случае $k(x-\varepsilon, n) = 0$, из оценки (22) следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|(x-\frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}-2k(x-\varepsilon,n)\left((x-\frac{f_n}{4^n}+\frac{1}{2\times 4^n})^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}\right)\right| \leq c_1\varepsilon^{1-\alpha}. \tag{23}$$

Используя полученные оценки в (18)–(23), окончательно, для (17) можем записать:

$$|\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}f(x)| \leq \frac{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(1+\frac{1}{2\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\right)+c\varepsilon^{1-\alpha}. \tag{24}$$

Мы доказали, что локализованная производная функции Такаги при $0 < \alpha < 1$ имеет порядок малости $\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon \to 0$. Этот порядок ((18)) имеет член, определённый в (14). Следовательно, локализованная дробная производная функции Такаги принадлежит пространству $H^{1-\alpha,1}$. Из лемм 2.1, 2.2 и теорем 2.1–2.3 следует, что $I^{\alpha,-\varepsilon}\left(H^{1-\alpha,1}\right) \in H^{1,2}$, а значит функция Такаги принадлежит пространству $H^{1,2}$. Непосредственные оценки показывают, что функция Такаги принадлежит даже пространству $H^{1,2}$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что точки $x, x-\varepsilon$ принадлежат одному промежутку монотонности и $k_n(x)$ ближайшая точка минимума для точек $x, x-\varepsilon$. Тогда, учитывая, что $\max_x\left(4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F(4^n x-k)\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{4^n}, \varepsilon = \frac{1}{2\times 4^{n_0}}$, $n_0 = \log_4\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}$, для функции Такаги имеем:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F(4^n x-k)-\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F(4^n(x-\varepsilon)-k)\right|=\left|\sum_{n=0}^{n_0}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F(4^n x-k)-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{n_0}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F(4^n(x-\varepsilon)-k)\right|+\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F(4^n x-k)-\sum_{n=n_0+1}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F(4^n(x-\varepsilon)-k)\right| \leq$$

$$\leq\left|\sum_{n=0}^{n_0}\left(\left|x-\frac{k_n(x)}{4^n}\right|-\left|x-\varepsilon-\frac{k_n(x)}{4^n}\right|\right)\right|+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2}4^{-n}=\sum_{n=0}^{n_0}\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{4^{-n_0-1}}{1-\frac{1}{4}}=\varepsilon(n_0+1)+\frac{2}{3}4^{-n_0-1}=$$

$$=\varepsilon\left(\log_4\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}4^{-n_0-1}=\varepsilon\left(\log_4\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\varepsilon \leq c\varepsilon\log_4\frac{1}{\varepsilon}.$$

Лемма доказана.

Результат леммы 2.5 уточняет результат, полученный в [8] о том, что функция Такаги принадлежит пространству $H^{\alpha}, 0<\alpha<1$.

Вычислим локальную дробную производную функции Такаги. Учитывая оценки (19)–(23), имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)\right)(x)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}c\varepsilon^{1-\alpha}=0.$$

Следовательно локализованная дробная производная функции Такаги равна:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Gamma\left(1+\log_{\varepsilon}\left(\varepsilon\log_4\frac{1}{\varepsilon}\right)-\alpha\right)}{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)\right)(x)\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Gamma\left(2-\alpha\right)}{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{n_0}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)\right)(x)\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\sum_{n=0}^{n_0}\begin{cases}-1, 4^n x\le i_n-k\left(x,n\right);\\ \left(\left(\frac{4^n x-i_n+k(x,n)}{4^n\varepsilon}\right)^{1-\alpha}2-1\right), i_n-k\left(x,n\right)\le 4^n x\le i_n-k\left(x,n\right)+4^n\varepsilon;\\ 1, i_n-k\left(x,n\right)+4^n\varepsilon\le 4^n x;\end{cases}=$$

$$=\lim_{n_0\to\infty}\frac{1}{n_0+\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{n_0}\begin{cases}-1, \frac{4^n x-i_n+k(x,n)}{\frac{4^n}{2\times 4^{n_0}}}\le 0;\\ \left(\left(\frac{4^n x-i_n+k(x,n)}{\frac{4^n}{2\times 4^{n_0}}}\right)^{1-\alpha}2-1\right), 0\le\frac{4^n x-i_n+k(x,n)}{\frac{4^n}{2\times 4^{n_0}}}\le 1;\\ 1, 1\le\frac{4^n x-i_n+k(x,n)}{\frac{4^n}{2\times 4^{n_0}}}.\end{cases}$$

Заметим, что для локальной дробной производной функции Такаги имеют место следующие оценки:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Gamma\left(2-\alpha\right)}{\varepsilon\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\varepsilon^{\alpha}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)\right)(x)\right)\ge\left(n_0+1\right)^{-1}\sum_{n=0}^{n_0}(-1)=-1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Gamma\left(2-\alpha\right)}{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)\right)(x)\right)\le\left(n_0+1\right)^{-1}\sum_{n=0}^{n_0}1=1.$$

Поскольку $-\frac{1}{4^n}\le 4^n x-i_n\le 0$, то знак $\frac{4^n x-i_n+k(x,n)}{4^n\frac{x}{2\times 4^{n_0}}}$ определяется значением $k\left(x,n\right)$, если $k\left(x,n\right)=0$, то $\frac{4^n x-i_n+k(x,n)}{4^n\frac{x}{2\times 4^{n_0}}}\le 0$, если $k\left(x,n\right)=1$, то

$$\frac{4^n x-i_n+k\left(x,n\right)}{4^n\frac{x}{2\times 4^{n_0}}}\ge\frac{-\frac{1}{4^n}+1}{\frac{1}{2\times 4^{n_0}}}=2\times 4^{n_0}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\ge 2\times 4^{n_0}\left(1-\frac{1}{4^{n_0}}\right)=2\times\left(4^{n_0}-1\right)\ge 1,$$

имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Gamma\left(2-\alpha\right)}{\varepsilon\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\varepsilon^{\alpha}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)\right)(x)\right)=$$

$$=\lim_{n_0\to\infty}\left(n_0+\frac{1}{2}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{n_0+1}\begin{cases}-1, k\left(x,n\right)=0;\\ 1, 1=k\left(x,n\right);\end{cases}=\lim_{n_0\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{n_0+1}(-1)^{k(x,n)+1}}{n_0}.$$

Видим, что локализованная дробная производная функции Такаги в точке $x\in[0;1]$ равна пределу относительной части разности числа нулей, единиц и двоек, троек к общему числу цифр числа x, записанного в виде числа с основанием четыре. Приведём несколько примеров:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Gamma\left(2-\alpha\right)}{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)\right)(0,1010101010111000111\ldots)\right)=1.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Gamma\left(2-\alpha\right)}{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)\right)(0,233323222233\ldots)\right)=-1.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Gamma\left(2-\alpha\right)}{\varepsilon^{1-\alpha}\log_4\frac{1}{\varepsilon}}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}\sum_{k=0}^{4^n}F\left(4^n x-k\right)\right)(0,102310321013330033\ldots)\right)=0.$$

3. Заключение. Локализованные и локальные дробные производные и интегралы типа Римана – Лиувилля могут быть успешно использованы для исследования непрерывных, но не дифференцированных функций. Локализованные дробные производные типа Маршо получены с помощью перехода от локализованных дробных производных типа Римана – Лиувилля для абсолютно непрерывных функций. Следовательно, для таких функций локализованные производные типа Маршо и Римана – Лиувилля совпадают. Например, локализованные производные типа Маршо и типа Римана – Лиувилля модуля (16) равны. Вопрос о необходимых условиях совпадения локализованных производных типа Римана – Лиувилля и Маршо остаётся открытым. В определении локальной дробной производной первое равенство в (5) есть способ вычисления локальной дробной производной, поскольку при вычислении $\overline{D^{\alpha,-\varepsilon}} f$ мы получаем явный вид функции $\omega\left(\varepsilon\right)$.

Список литературы

1. Grinko A.P. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions.* 2019;30(10):817-832.
2. Grinko A.P. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions.* 2018;29(6):489-504.
3. Гринько А.П. Локализованные и локальные производные дробного порядка функций с заданным модулем непрерывности. *Прикладная математика & Физика.* 2024;56(4):296-313.
4. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan.* 1903;1:176-177.
5. Hata M., Yamaguti M. Takagi function and its generalization *Japan J. Appl. Math.* 1984;1:183-199.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.; Наука и Техника; 1987. 687с.
7. Shidfar A., Sabetfakhri K. On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Hölder Sense. *Amer. Math. Monthly.* 1986;93(5):375-376.
8. Шейпак И.А., О показателях Гёльдера самоподобных функций. *Функциональный анализ и его приложения* 2019;53(1):67–78.
9. Grinko A.P. Localized fractional derivative of Djrbashian-Caputo type. *Integral Transforms and Special Functions.* 2021;32(12);1002-1018.
10. Grinko AP. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk;*2009;17(1):41-50. (In Russian)
11. Grinko AP. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions.* 2022;33(8):623-636.
12. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука; 1968. 511 с.

References

1. Grinko AP. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions.* 2019;30(10):817-832.
2. Grinko AP. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions.* 2018;29(6):489-504.
3. Grin'ko AP. Localized and local derivatives of fractional order of functions with a given modulus of continuity. *Applied Mathematics & Physics.* 2024;56(4):296-313.
4. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan.* 1903;1:176-177.
5. Hata M., Yamaguti M. Takagi function and its generalization *Japan J. Appl. Math.* 1984;1:183-199.
6. Samko SG., Kilbas AA., Marichev OI. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Mn.; Science and Technology; 1987. 687 p.
7. Shidfar A., Sabetfakhri K. On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Hölder Sense. *Amer. Math. Monthly.* 1986;93(5):375-376.
8. Sheipak IA., On Hölder exponents of self-similar functions *Functional Analysis and Its Applications* 2019;53(1):67–78.
9. Grinko AP. Localized fractional derivative of Djrbashian-Caputo type. *Integral Transforms and Special Functions.* 2021;32(12);1002-1018.
10. Grinko AP. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk;*2009;17(1):41-50. (In Russ.)
11. Grinko AP. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions.* 2022;33(8):623-636.
12. Muskhelishvili NI. Singular integral equations. - M.: Nauka; 1968. 511 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 25.03.2025
Поступила после рецензирования 20.05.2025
Принята к публикации 24.05.2025

Received March 25, 2025
Revised May 20, 2025
Accepted May 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гринько Александр Петрович –кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и физико-математических дисциплин, Барановичский государственный университет, г. Барановичи, Беларусь

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander P. Grinko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Assosiate Professor of the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines, Baranovichi State University, Baranovichi, Belarus

К содержанию