

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 51-7, 519.6, 517

MSC 92B05

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-235-242

EDN SOKAHU

Методы решения задач с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани

Кудаева Ф. Х. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Черновой О. В.)

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

kfatimat@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены методы решения задачи с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани. Методом нелинейных вариационных параметров определение свободной границы сведено к задаче Коши. Проведен сравнительный анализ предложенных методов. Сделанные выводы можно распространить и на другие, более сложные, многомерные и многофронтовые постановки задачи Стефана. Сделаны выводы о том, что для одномерных однофронтовых задач Стефана наиболее эффективным из рассмотренных является метод ловли фронта в узел сетки с использованием неявной схемы. Работа может быть полезна специалистам, которые занимаются решением задач с фазовыми переходами.

Ключевые слова: математическое моделирование, задачи с фазовыми переходами, низкотемпературное воздействие, метод нелинейных вариационных параметров, численные методы, однофазная задача, разностная задача

Для цитирования: Кудаева Ф.Х. Методы решения задач с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):235–242.

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-235-242 EDN SOKAHU

Original Research

Methods for Solving Problems with Phase Transitions under Low-Temperature Exposure to Biological Tissues

Fatimat Kh. Kudayeva 

(Article submitted by a member of the editorial board Chernova O. V.)

Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia

kfatimat@yandex.ru

Abstract. Methods for solving the problem with phase transitions under low-temperature exposure to biological tissues are considered. A comparative analysis of the proposed methods is carried out. By the method of nonlinear variational parameters, the determination of the free boundary is reduced to the Cauchy problem for single-phase and two-phase Stefan problems. To solve the single-phase and two-phase Stefan problem, the method of catching the phase front in a grid node was used. The conclusions drawn can be extended to other, more complex, multidimensional and multi-front formulations of Stefan's problem. The advantages and disadvantages of the method of catching the front in a mesh node and the method of nonlinear variational parameters are revealed. It is concluded that for one-dimensional single-front Stefan problems, the most effective of the considered methods is the method of catching the front into a grid node using an implicit scheme, which can be useful for specialists who solve problems with phase transitions.

Keywords: Mathematical Modeling, Problems with Phase Transitions, Low-Temperature Exposure, Method of Nonlinear Variational Parameters, Numerical Methods, Single-Phase Problem, Difference Problem

For citation: Kudayeva FKh. Methods for Solving Problems with Phase Transitions under Low-Temperature Exposure to Biological Tissues. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):235–242 (In Russ.).

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-235-242 EDN SOKAHU

1. Введение. В настоящее время существуют аналитические и численные методы решения классической задачи с фазовыми переходами Стефана. Но нахождение решения задачи со свободными границами типа Стефана в замкнутой аналитической форме является не такой простой проблемой, решение которой возможно лишь для ограниченного количества случаев, когда рассматривают более упрощенную постановку задачи.

Проведен анализ существующих работ, где авторы используют в своих исследованиях численные методы. По этим методам, чтобы получить результаты в работах, авторы реализуют программы на различных языках программирования алгоритмы получения решений. По составленным программам проведены численные расчеты с различными данными.

Приведем некоторые из них. Работа А. М. Онишкова «Численное решение задачи для плоской области со свободной границей» посвящается построению математической модели некоторого физического процесса. В данной работе предлагается численный алгоритм для решения двумерной задачи со свободной границей [1].

В работе Н. А. Пинчук, А. М. Столяр «Решение начально-краевых задач с подвижной границей» исследуются начально-краевые задачи для уравнений гиперболического типа с подвижной границей. В данной работе предлагаются численные методы и проводится сравнение асимптотических результатов с численными [2].

Работа С. Л. Бородина «Численные методы решения задачи Стефана» содержит наиболее известные численные методы решения задачи Стефана а также новый метод, разработанный авторами, с целью выбора наиболее эффективного из них с позиций точности и скорости расчетов. В данной работе приводятся численные методы решения задачи с фазовыми переходами «лед-вода» вертикальной скважины, проходящей сквозь толщу многолетних мерзлых пород. Здесь автором сделаны выводы, которые распространяются и на другие многомерные и многофронтовые постановки задачи Стефана [3].

Оказалось, что работ, в которых авторами был проведен сравнительный анализ численных методов, недостаточно, применительно к задачам с фазовыми переходами, описывающим низкотемпературное воздействие на биологические ткани. В связи с этим в данной работе проводится такой анализ для выбора наиболее эффективного численного метода для решения задач Стефана, который бы сочетал высокую точность и скорость расчетов.

Существующие численные методы можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся методы сквозного счёта, которые позволяют не выделять границу раздела фаз и использовать общее уравнение во всей расчетной области [3]. А ко второй группе относятся методы, предполагающие явное определение положения межфазных границ [3].

Главной особенностью методов сквозного счёта является то, что отсутствует необходимость точного отслеживания положения межфазных границ, и это оказывается достаточно эффективным при решении многомерных и многофазных задач. Для применения такого подхода исходную задачу необходимо записать в обобщенной формулировке в виде единого уравнения с разрывными коэффициентами на межфазных границах. Для построения численного алгоритма решения полученной задачи проводят процедуру сглаживания разрывных коэффициентов на некотором интервале. Данный подход был предложен в работах А. А. Самарского [4]. Недостатками такого подхода являются зависимость точности разностного решения от выбора параметра сглаживания и низкая точность определения положения межфазных границ.

Основные трудности при решении задач с фазовыми переходами Стефана связаны с тем, что свободные границы раздела фаз формируют переменные области для вычисления значений температуры или концентрации, а положение этих границ считается заранее неизвестным и должно определяться в ходе решения [5, 6, 7]. Аналитическое решение для таких задач можно получить лишь для малого числа постановок, поэтому в большинстве случаев необходимо применять численные методы, которых достаточно много [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Однако сразу применить существующие численные методы не удастся. Необходимо разработать методы решения и затем уже применять численные методы.

Среди методов сквозного счёта в настоящее время активно развиваются метод функций уровня и метод фазового поля.

На практике широко применяются такие методы, которые в явном виде отслеживают движение межфазных границ. В основе всех таких методов данной группы лежит идея использования метода конечных разностей, когда расчёты проводятся на равномерных или же неравномерных сетках. При этом всегда определено, между какими узлами расчётной сетки находится подвижная граница, или же через какой узел она проходит.

Наиболее известными среди них являются метод ловли фронта в узел пространственной сетки и метод выпрямления фронтов. Еще имеется один подход к решению задачи Стефана, который предполагает использование метода динамически адаптирующихся сеток. Для решения задачи со свободными границами типа Стефана также может быть использован и метод конечных элементов.

В статье на примере решения одномерной задачи Стефана, возникающей при низкотемпературном воздействии на биоткани, проводится сравнение предложенных методов.

Цель настоящей работы – провести сравнительный анализ методов решения одномерной задачи фазовыми переходами Стефана, возникающей при низкотемпературном воздействии на биологические ткани. Полученные результаты можно распространить и на многомерные и многофронтовые постановки задачи Стефана.

2. Постановка задачи. Определение динамики температурного поля $u = u(x, t)$ и свободной границы $s = s(t)$ в начальный период охлаждения, когда $t > t_1$, при низкотемпературных воздействиях на биологические ткани сводится к решению следующей задачи [14, 15]

$$\begin{aligned} u_{xx} - \frac{\partial u}{\partial t} &= u^\beta, \quad 0 < x < s(t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 < x < s(0), \\ \frac{\partial u}{\partial x} - Hu &= -H\varphi(t), \quad x = 0, \\ u(s(t), t) &= 0, \quad \frac{\partial u(s(t), t)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Момент времени t_1 определяется по решению задачи из условия $u(0, t) = 1$.

При $t_1 < t < t_2$ для определения $u = u(x, t)$, $s = s(t)$ и границы раздела замороженной и охлажденной области биологической ткани $x^* = x^*(t)$ имеем двухфазную задачу Стефана:

$$\begin{aligned} u_{xx} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \quad 0 < x < x^*(t), \\ u_{xx} - \frac{\partial u}{\partial t} &= u^\beta, \quad x^*(t) < x < s(t), \\ u(x, t_1) &= u_1(x), \quad 0 < x < s(t_1), \\ \frac{\partial u}{\partial x} - Hu &= -H\varphi(t), \quad x = 0, \\ [u]_{x^*} &= 0, \quad [u_x]_{x^*} = Px^*, \quad u(x^*(t), t) = 1, \\ u(s(t), t) &= 0, \quad \frac{\partial u(s(t), t)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Момент времени t_2 определяется по решению задачи из условия $u(0, t_2) = u_n$.

В задачах (1), (2) H – коэффициент теплообмена с окружающей средой, $u_0(x)$ – начальная температура биологической ткани, $\varphi(t)$ – температура внешней среды, t – временная переменная, x – пространственная переменная, $0 \leq \beta < 1$, $a^2 = \frac{\lambda \bar{c} \bar{\rho}}{\bar{\lambda} \bar{c} \bar{\rho}}$, $u_1(0) = 1$, $H = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{w}}$, $w = \bar{a} w_0$, $w_0 = c_k m_k$, $\bar{a} = \left[\bar{T} / (\bar{T} - T^*) \right]^{1-\beta}$, $\varphi = 1 + \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right) u_a(t) - \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)$, $u_a(t) = u_a(1 - \exp(-\chi t))$, $u_a = (\bar{T} - T_a) / (T - T^*)$, $P = \frac{p}{\bar{c}} \bar{\rho} (\bar{T} - T^*)$, $P = \Lambda \bar{\rho}$. Здесь $\bar{T} = 36.7^\circ\text{C}$, $T^* = -3 \div 0^\circ\text{C}$, T_a – температура аппликатора, $\lambda, c, \alpha, \Lambda, \rho$ теплофизические характеристики биоткани, c_k, m_k – теплоемкость и скорость потока массы крови, χ – параметр выхода на заданный режим охлаждения, β – параметр нелинейности, u_n – температура криопоражения, u_0, u_1, P, P_1 – заданные функции, знак черты сверху относится к незамороженной области биоткани, знак черты снизу – к замороженной области биоткани.

3. Метод нелинейных вариационных параметров. Рассмотрим стационарные задачи, соответствующие (1) и (2):

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u^\beta, \quad 0 < x < s, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - Hu &= -H\varphi, \quad x = 0, \\ u(s) &= 0, \quad \frac{\partial u(s)}{\partial x} = 0, \\ u_{xx} &= 0, \quad 0 < x < x^*, \\ u_{xx} &= u^\beta, \quad x^* < x < s, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - Hu &= -H\varphi, \quad x = 0, \\ [u]_{x^*} &= 0, \quad [u_x]_{x^*} = 0, \quad u(x^*) = 1, \\ u(s) &= 0, \quad \frac{\partial u(s)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} [u]_{x^*} &= 0, \quad [u_x]_{x^*} = 0, \quad u(x^*) = 1, \\ u(s) &= 0, \quad \frac{\partial u(s)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Задачи (3), (4) имеют важное значение, т. к. их решения позволяют описать установившиеся состояния, когда достигаются максимальные размеры охлажденной и замороженной биологической ткани при заданной криогенной температуре охлаждающей поверхности криоинструмента.

Сначала найдем решение стационарной задачи, соответствующее (3)

$$u(x) = \bar{u} \left(1 - \frac{x}{s}\right)^{\frac{2}{1-\beta}}, \quad s = \frac{2}{1-\beta} \sqrt{\frac{1+\beta}{2}} \bar{u}^{\frac{1-\beta}{2}},$$

где $\bar{u} = \bar{u}(0)$ – положительный корень следующего уравнения

$$\bar{u} + \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2}{1+\beta}} \bar{u}^{\frac{1+\beta}{2}} - u_A = 0. \quad (5)$$

Для удобства вычисления запишем (5) в виде: $F(\bar{u}) = 0$, где

$$F(\bar{u}) = \bar{u} + \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2}{1+\beta}} \bar{u}^{\frac{1+\beta}{2}} - u_A.$$

Далее применяем метод нелинейных вариационных параметров. Приближенное решение можно искать в виде

$$u(x, t) \approx \bar{u}(x, t) = \bar{u} \left(1 - \frac{x}{s(t)}\right)^{\frac{2}{1-\beta}},$$

$$\bar{u}(t) = \bar{u}(s) = \frac{(1-\beta)h\varphi s}{2 + (1-\beta)hs}. \quad (6)$$

Краевые условия при этом будут выполняться автоматически для любой функции $s = s(t) \geq 0$. Потребуем, чтобы конструкция (6) удовлетворяла дифференциальному уравнению в смысле равенства нулю интегральной невязки

$$\int_0^s (\bar{u}_{xx} - \bar{u}_t - \bar{u}^\beta) dx = 0.$$

Определяем свободную границу $s(t)$, решив задачу Коши:

$$\frac{d}{dt} \bar{u}s + \frac{3-\beta}{1+\beta} \bar{u}^\beta s - \frac{2(3-\beta)\bar{u}}{(1-\beta)^2 s} = 0, \quad s(0) = 0.$$

Заменяя производную $\frac{d}{dt}(\bar{u}s)$ конечной разностью, получаем нелинейное уравнение для определения значения s на данном временном слое $F(s) = 0$, где

$$F(s) = s\bar{u}(s) - \tau \frac{2(3-\beta)\bar{u}}{(1-\beta)^2 s} + \tau \frac{3-\beta}{1+\beta} \bar{u}^\beta s - \check{s}\check{\bar{u}}.$$

Алгоритм поиска свободной границы реализован на ЭВМ (рис. 1). Проведены расчеты на ЭВМ для различных входных параметров.

Рассмотрим применение данного метода к решению двухфазной задачи Стефана (2).

Для определения $x^* = x^*(t)$ и $s = s(t)$ решается задача Коши:

$$\frac{ds}{dt} + \frac{2}{1-\beta} \frac{dx^*}{dt} + \frac{3-\beta}{1+\beta} (s - x^*) - \frac{2(3-\beta)}{(1-\beta)^2} \frac{1}{s - x^*} = 0,$$

$$\frac{ds}{dt} + \left\{ \left[\frac{(\varphi - 1)x^*}{2a^2(H^{-1} + x^*)} + P \right] x^* \right\} - \frac{\varphi - 1}{H^{-1} + x^*} + \frac{2}{(1-\beta)} \frac{1}{s - x^*} = 0.$$

Используя алгоритм решения задачи Коши, находим $x^* = x^*(t)$ и $s = s(t)$.

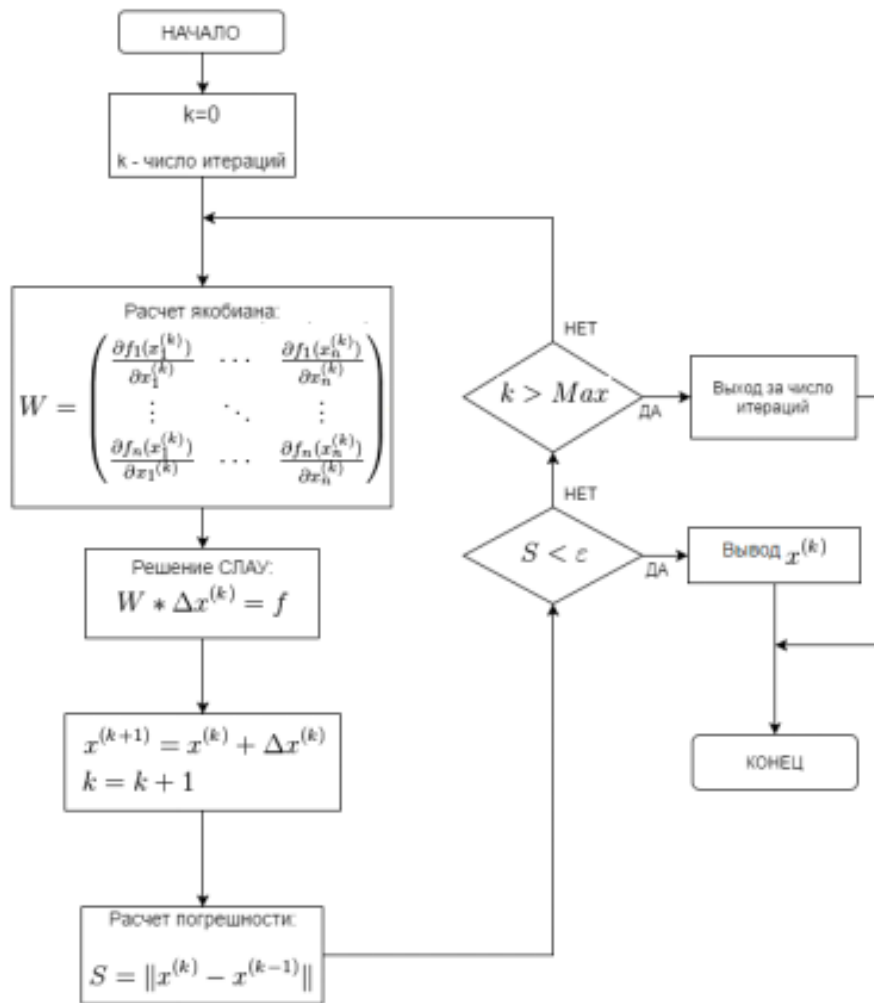


Рис. 1. Алгоритм решения задачи Коши для определения свободной границы
 Fig. 1. Algorithm for solving the Cauchy problem for determining the free boundary

4. Метод ловли фазового фронта в узел сетки. Рассмотрим вначале однофазную задачу (1). Строим разностную сетку на отрезке $[0, s]$, где $s = s(t_1)$, t_1 – конечный момент времени, строим неравномерную пространственную сетку, состоящую из узлов так, чтобы точка совпадала с одним из узлов $x_i = x_{i-1} + h_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x_0 = 0$, $h_i > 0$, $x_m = s$.

На отрезке $[0, t_1]$ также строится неравномерная сетка

$$t_j = t_{j-1} + \tau_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad t_0 = 0, \quad t_{j_0} = t_1, \quad \tau_j > 0.$$

Шаг сетки по времени выбирается таким образом, чтобы за каждый шаг по времени фронт фазового перехода перемещался по координате x ровно на один шаг, т. е. $x(t_j) - x(t_{j-1}) = h_{j+m}$.

Введём обозначения, пусть $\Delta x = h_i$, $\Delta t = \tau_j$. Задачу (1) заменим следующей разностной задачей для определения u_i, τ_j :

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} = u_i^\beta, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$u_i^0 = u_{0i}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - H u_i = -H \varphi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$u_n = 0, \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Предполагая, что искомые величины для всех $j = 1, 2, \dots, m-1, i = 0, 1, \dots, n+j$ найдены, будем определять их значение на j -м временном слое. Если известно τ_{j_0} , то методом прогонки определяются u_{i+1} , а далее следующая итерация и т. д.

Конец итерационного процесса проверяется условиями:

$$\left| 1 - \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}} \right| < \varepsilon_1, \quad |u_{i+1} - u_i| < \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достаточно малые числа.

Теперь рассмотрим применение данного метода к решению двухфазной задачи Стефана (2). Аналогично предыдущему алгоритму строится разностная сетка с шагами $\Delta x = h_i$, $\Delta t = \tau_j$, и пусть $x^*(t) = x^*$.

Узел, лежащий на фронте фазового перехода, имеет индексы (i, j) . Это будем иметь в виду в дальнейшем при записи разностных уравнений в охлажденной и замороженной частях области. Для численного решения задачи возьмем также чисто неявную разностную схему, которую представим в виде:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} &= u_i^\beta, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ u_i^1 &= u_{1i}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - Hu_i &= -H\varphi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ u_n &= 0, \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Полученная система уравнений (7) является нелинейной и ее решение находится по итерационной схеме.

Процесс итерации продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие

$$\left| 1 - \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}} \right| < \varepsilon_1, \quad |u_{i+1} - u_i| < \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достаточно малые числа.

Решения системы (7) находятся с помощью метода прогонки.

Таким образом, алгоритм модифицированного метода ловли фронта в узел сетки состоит из следующих этапов: вычисляются прогоночные коэффициенты; вычисляется неизвестный шаг пространственной сетки; на последнем этапе по формуле прогонки определяются значения.

Неизвестные величины по модифицированному методу ловли фронта определяются без использования итерационного процесса. В этом заключается достоинство модифицированного метода ловли фронта в узел сетки.

5. Сравнительный анализ методов. На основе представленных методов для решения поставленной задачи были разработаны программы, которые определяют динамику распределения температуры, границу раздела фаз и свободную границу, а также выдают время расчетов. С помощью этих программ было проведено сравнение используемых методов.

Оказалось, что метод ловли в узел сетки имеет некоторые недостатки, которые следует учитывать при решении задач с фазовыми переходами. Это сложность в реализации и в отладке программного кода для данного метода. Определение свободных границ, имеющие сложные формы, чрезвычайно сложно. Порядок точности часто приводит к снижению точности решения и зависит от размера сетки. Еще одним из недостатков является ограничение по выбору шага по времени, шаг по времени нужно использовать малого размера. Данный метод трудно применить ко всем типам граничных условий.

Из проведенного анализа следует, что метод ловли в узел сетки имеет еще преимущества для решения исследуемых задач. Основные из них следующие: простота в реализации и понимании; легкость применения граничных условий; возможность использования более точных численных схем. Если граница не сложной формы, то данный метод очень эффективен для решения. И еще данный метод можно адаптировать для различных моделей фазового перехода.

Метод нелинейных вариационных параметров относится к аналитическим методам. Основное преимущество данного метода в возможности получения аналитического или приближенно-аналитического решения, что позволяет легко изучать влияние различных параметров на процесс фазового перехода. Для некоторых уравнений, описывающих фазовые переходы, метод является относительно простым в применении. В отличие от метода ловли в узел сетки, данный метод не требует дискретизации пространства и времени. Полученное решение методом нелинейных вариационных параметров может быть использовано для валидации численных методов.

Данный метод имеет и недостатки. К недостаткам можно отнести: ограниченность применимости, не ко всем задачам может быть применен. Для сложных уравнений применение может быть трудоемким и требовать значительных математических усилий. В большинстве случаев дает только приближенное

решение, а не точное. Оценка точности приближенного решения может быть сложной задачей. Метод требует подходящего параметра для вариации, что влияет на точность и сходимость решения.

6. Заключение. На основе результатов сравнительного анализа методов сделаны следующие выводы.

Метод ловли в узел сетки не является универсальным решением для всех типов задач с фазовыми переходами, но данный метод может быть хорошим выбором, когда важна простота реализаций, а требования точности и устойчивости не слишком высоки. Правильная реализация имеет решающее значение для получения надежных решений.

Метод нелинейных вариационных параметров может быть полезным методом для получения аналитических и приближенно-аналитических решений. Однако применимость данного метода ограничена, и для решения более сложных задач требуются численные методы.

Список литературы

1. Онишкова А.М. Численное исследование двумерной задачи, содержащей неизвестную границу. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2012;4(1):136-142.
2. Пинчук Н.А., Столяр А.М. Решение начально-краевых задач с подвижной границей. *Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011;4(5):2423-2424.
3. Бородин С.Л. Численные методы решения задачи Стефана. *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2015;1(3):164-175. DOI: 10.21684/2411-7978-2015-1-3-164-175
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ; 1956. 684 с.
5. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского университета. 2011; 456 с.
6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 2010;268:268–283. DOI: 10.1134/S0081543810010189
7. Васильева А.Б., Нефёдов Н.Н., Радченко И.В. О внутреннем переходном слое в сингулярно возмущенной начальной задаче. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1996;36(9):105–111.
8. Самарский А.А. Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. 2-ое издание, перераб. и доп. М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит.; 1987. 288 с.
9. Самарский А.А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1963;3(3):431-466. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90290-8
10. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука; 1986. 288с.
11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: учебное пособие. М.: Наука; Гл.ред. физ.-мат. лит. 1987. 600 с.
12. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во МГУ; 1987. 164 с.
13. Алипова К.А. Сравнение двух численных методов решения задачи Стефана. *XVII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям: программа, тезисы докладов, алфавитный указатель участников, Новосибирск. 30 октября – 3 ноября 2016 г. Новосибирск*. 2016. С. 26.
14. Кудаева Ф.Х. Канонический вид задач со свободными границами в проблемах медицины. *Южно-Сибирский научный вестник*. 2023;5(51):142-147. DOI: 10.25699/SSSB.2023.51.5.019
15. Митропольский Ю.А., Березовский А.А., Плотницкий Т.А. Задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии. *Украинский математический журнал*. 1992;44(1):67-76.

References

1. Onishkova AM. Numerical investigation of a two-dimensional problem containing an unknown boundary. *Izvestiya YUFU. Tekhnicheskiye nauki*. 2012;4(1):136-142.
2. Pinchuk NA., Stolyar AM. Solving initial boundary value problems with a movable boundary. *Fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Bulletin of the Nizhny Novgorod Lobachevsky University*. 2011; 4(5):2423-2424.
3. Borodin SL. Numerical methods for solving the Stefan problem. *Bulletin of the Tyumen State University. Physical and mathematical modeling. Oil, gas, and energy*. 2015;1(3):164-175. DOI: 10.21684/2411-7978-2015-1-3-164-175
4. Budak BM., Samarskiy AA., Tikhonov AN. Collection of problems in mathematical physics. Moscow: GITTL; 1956. 684 p.
5. Lomov SA., Lomov IS. Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer. Moscow: Moscow University Press. 2011; 456 p.

6. Vasilyeva AB., Butuzov VF., Nefedov NN. Singularly perturbed problems with boundary and inner layers. *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*. 2010;268:258–273. DOI: 10.1134/S0081543810010189
7. Vasilyeva AB., Nefedov NN., Radchenko IV. On the inner transition layer in a singularly perturbed initial problem. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1996;36(9):1251–1256.
8. Samarskiy AA. Introduction to numerical methods. Textbook for universities. 2nd edition, revised. and dop. Moscow: Nauka. Gl.ed. fiz.-mat. lit.; 1987. 288 p.
9. Samarskiy AA. Locally one-dimensional difference schemes on uneven grids. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963;3(3):431-466. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90290-8
10. Ortega J., Poole W. Introduction to numerical methods for solving differential equations. Moscow: Nauka; 1986. 288 p.
11. Bakhvalov NS., Zhidkov NP., Kobelkov G.M. Numerical methods: a textbook. Moscow: Nauka. Gl.ed. fiz.-mat. lit.; 1987. 600 p.
12. Vabishevich PN. Numerical methods for solving problems with a free boundary. Moscow: Publishing House of Moscow State University; 1987. 164 p.
13. Alipova KA. Comparison of two numerical methods for solving Stefan's problem. *XVII All-Russian Conference of Young Scientists on Mathematical Modeling and Information Technologies: program, abstracts, alphabetical index of participants, Novosibirsk, October 30 - November 3, 2016 Novosibirsk*. 2016. p. 26.
14. Kudayeva FK. Canonical type of tasks with free boundaries in medical problems. *South Siberian Scientific Bulletin*. 2023;5(51):142-147. DOI: 10.25699/SSSB.2023.51.5.019
15. Mitropolsky YuA., Berezovsky AA., Plotnitsky TA. Problems with free boundaries for a nonlinear evolutionary equation in metallurgy, medicine, and ecology. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1992; 44(1):67-76.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.04.2025

Поступила после рецензирования 15.08.2025

Принята к публикации 18.08.2025

Received April 21, 2025

Revised August 15, 2025

Accepted August 18, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кудеева Фатимат Хусейновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Институт искусственного интеллекта и цифровых технологий, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Fatimat Kh. Kudayeva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nalchik, Russia

[К содержанию](#)