Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, №4. С. 239–245.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.44
MSC 44A10.
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245

ОБОБЩЁННОЕ ДВОЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Московский государственный технологический университет (Станкин),
Москва, 127055, Россия
Пензенский государственный университет,
Пенза, 449926, Россия

E-mail: yaremki8@gmail.com

Аннотация. Метод операторов преобразования применяется для построения обобщённого двойного преобразования. Создан аппарат обобщённого двойного преобразования Лапласа, в котором рассматривается операция дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами. При этом вычисления обобщённого двойного преобразования Лапласа методом операторов преобразования сводится к вычислению классического преобразования Лапласа. Доказано несколько теорем об общих свойствах двойного преобразования Лапласа: о дифференцировании оригинала, о сдвиге изображения. Определяется свертка двух оригиналов f и g, изучаются ее свойства, доказывается теорема о свертке. Рассматриваются приложения обобщённого двойного преобразования Лапласа в теории кусочно-линейных систем. Решена задача Коши для волнового уравнения с кусочно-постояными коэфициентами.

Ключевые слова: двойное преобразование Лапласа, свертка оригиналов, волновое уравнение, задача Коши.

Для цитирования: Яремко О. Э., Яремко Н. Н., 2020. Обобщённое двойное преобразование Лапласа и его применения для решения уравнений в частных производных. Прикладная математика & Физика. 52(4): 239–245.
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.

GENERALIZED DOUBLE LAPLACE TRANSFORM AND ITS APPLICATION FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLVING

O. E. Yaremko, N. N. Yaremko

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

Moscow State Technological University (Stankin),
Moscow, 127055, Russia,
Penza State University,
Penza, 449926, Russia
E-mail: yaremki8@gmail.com
Received November 11, 2020

Abstract. The transmutation operator method is used to construct the generalized double Laplace transform. In the article, the apparatus of the generalized double Laplace transform is created, the differentiation with a piecewise constant factor is considered. By using the transmutation operator method, the calculation of the generalized double Laplace transform is reduced to the calculation of the classical Laplace transform. Theorems on the general properties of the double Laplace transform are proved: on the differentiation of the function; about shifts; a convolution of two functions is defined, its properties are studied, and a convolution theorem is proved. In the article the applications of the generalized double Laplace transform for solving partial differential equations with piecewise constant coefficients it is discussed. The Cauchy problem for the wave equation with piecewise constant coefficients is solved.

Key words: double Laplace transform, convolution of functions, wave equation, Cauchy problem.

For citation: Yaremko O. E., Yaremko N. N. 2020. Generalized double laplace transform and its application for partial differential equations solving. Applied Mathematics & Physics. 52(4): 239–245 (in Russian).
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.

1. Введение. Преобразование Лапласа получило широкое распространение в научных и инженерных расчётах. Как известно, преобразование Лапласа соотношениям и операциям над оригиналами сопоставляет более простые соотношения над их изображениями. Так операции дифференцирования оригинала соответствует операция умножения изображения. Усилия многих исследователей направлены на замену операции дифференцирования на более сложную операцию [1, 2, 4-17]. В статье предложено использовать метод операторов преобразования [18, 19]. В итоге создан аппарат обобщённого двойного преобразования Лапласа, в котором рассматривается операция дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами. При этом вычисление обобщённого двойного преобразования Лапласа методом операторов преобразования сводится к вычислению классического преобразования Лапласа. Доказано несколько теорем об общих свойствах двойного преобразования Лапласа. Определяется свертка двух оригиналов $f(x, y)$ и $g(x, y)$, изучаются ее свойства, доказывается теорема о свертке. Рассматриваются приложения обобщённого двойного преобразования Лапласа в теории кусочно-линейных систем. В частности, получено аналитическое описание температурного поля с переменным режимом для полубесконечного тела [20]. Целью данной работы является изучение обобщённого двойного преобразования Лапласа и его приложений к дифференциальным уравнениям в частных производных.

2. Методы. Метод операторов преобразования успешно проявил себя при решении уравнений математической физики в кусочно-однородных средах [18, 19]. Этот метод представляет полноценную замену метода интегральных преобразований Фурье. Его преимущество заключается в том, что нет необходимости переходить в пространство изображений. Решение получается в естественном классе функций. Исследования по применению метода операторов преобразования для задач с переменными по временной переменной коэффициентами ранее не проводились. Пусть $\tilde{f}(t_1, t_2)$ –заданная в первом квадранте функция-оригинал и пусть $F(p_1, p_2)$ – ее изображение, т. е.

$$F(p_1, p_2) = \int_0^\infty e^{-p_1 t_1} \int_0^\infty e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2.$$

Разобьем первый квадрант на четыре части прямыми $t_1 = t_1^0, t_2 = t_2^0$. Примем обозначения

$$D_{00} = \left\{(t_1, t_2) : 0 \le t_1 \le t_1^0, 0 \le t_2 \le t_2^0\right\}, D_{10} = \left\{(t_1, t_2) : t_1^0 \le t_1, 0 \le t_2 \le t_2^0\right\}$$

$$D_{01} = \left\{(t_1, t_2) : 0 \le t_1 \le t_1^0, t_2^0 \le t_2\right\}, D_{11} = \left\{(t_1, t_2) : t_1^0 \le t_1, t_2^0 \le t_2.\right\}$$

Оператор преобразования определим формулой $J : \tilde{f} \to f$

$$\begin{cases} f(t_1, t_2) = \tilde{f}(a_1 t_1, b_1 t_2), t \in D_{00}, \\ f(t_1, t_2) = \tilde{f}\left(a_2\left(t_1 - t_1^0\right) + a_1 t_1^0, b_1 t_2\right), t \in D_{10}, \\ f(t_1, t_2) = \tilde{f}\left(a_1 t_1, b_2\left(t_2 - t_2^0\right) + b_1 t_2^0\right), t \in D_{10}, \\ f(t_1, t_2) = \tilde{f}\left(a_2\left(t_1 - t_1^0\right) + a_1 t_1^0, b_1 t_2, b_2\left(t_2 - t_2^0\right) + b_1 t_2^0\right), t \in D_{11}. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Оператор преобразования J допускает факторизацию $J = J_1 J_2$, в которой первый оператор J_1 действует по переменной t_1 и имеет вид*

$$\begin{cases} f(t_1) = \tilde{f}(a_1 t_1), 0 \le t_1 \le t_1^0, \\ f(t_1) = \tilde{f}\left(a_2\left(t_1 - t_1^0\right) + a_1 t_1^0\right), t_1^0 \le t_1, \end{cases} \tag{2}$$

а второй оператор J_2 действует по переменной t_2 и имеет вид

$$\begin{cases} g(t_2) = \tilde{g}(b_1 t_2), 0 \le t_2 \le t_2^0, \\ g(t_2) = \tilde{g}\left(b_2\left(t_2 - t_2^0\right) + b_1 t_2^0\right), t_2^0 \le t_2. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство теоремы следует из определения оператора преобразования.

Будем обозначать $\tilde{D}_{ij} = \tilde{f}\left(D_{ij}\right)$. Из определения следует, что для обратного оператора преобразования $J^{-1} : f \to \tilde{f}$ справедлива формула

$$\begin{cases} \tilde{f}(t_1, t_2) = f\left(\frac{t_1}{a_1}, \frac{t_2}{b_1}\right), (t_1, t_2) \in \tilde{D}_{00}, \\ \tilde{f}(t_1, t_2) = f_2\left(\frac{t_1 - a_1 t_1^0}{a_2} + t_1^0, \frac{t_2}{b_1}\right), (t_1, t_2) \in \tilde{D}_{10}, \\ \tilde{f}(t_1, t_2) = f\left(\frac{t_1}{a_1}, \frac{t_2 - b_1 t_2^0}{b_2} + t_2^0\right), (t_1, t_2) \in \tilde{D}_{10}, \\ \tilde{f}(t_1, t_2) = f\left(\frac{t_1 - a_1 t_1^0}{a_2} + t_1^0, \frac{t_2 - b_1 t_2^0}{b_2} + t_2^0\right), (t_1, t_2) \in \tilde{D}_{11}. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 2. *Оператор обратный к оператору преобразования J допускает факторизацию $J^{-1} = J_1^{-1} J_2^{-1}$, в которой первый множитель J_1^{-1} действует по переменной t_1 и имеет вид*

$$\begin{cases} \tilde{f}(t_1) = f\left(\frac{t_1}{a_1}\right), 0 \le t_1 \le t_1^0, \\ \tilde{f}(t_1) = f\left(\frac{t_1 - a_1 t_1^0}{a_2} + t_1^0\right), t_1^0 \le t_1, \end{cases} \tag{5}$$

второй множитель J_2^{-1} действует по переменной t_2 и имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{g}(t_2) = g\left(\frac{t_2}{b_1}\right), 0 \le t_2 \le t_2^0, \\ \tilde{g}(t_2) = g\left(\frac{t_2 - b_1 t_2^0}{b_2} + t_2^0\right), t_2^0 \le t_2. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство следует из формул (4) для обратного оператора преобразования.

3. Двойное интегральное преобразование Лапласа. Двойные преобразования Лапласа исследованы в монографии [3]. Двойным преобразованием Лапласа для функции оригинала $y = \tilde{f}(t_1, t_2)$ называется функция изображение $F(p_1, p_2)$, определяемая по правилу

$$F(p_1, p_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Здесь представляется развитие теории двойных интегральных преобразований на случай дифференциальных операторов с кусочно постоянными коэффициентами. Пусть $\tilde{f}(t_1, t_2)$, заданная в первом квадранте функция-оригинал. Пусть также J оператор преобразования, действующий по формуле (1).

Определение 1. *Пусть функция $y = f(t_1, t_2)$ определена в первом квадранте по формуле (1). Обобщённым двойным преобразованием Лапласа L функции $y = f(t_1, t_2)$ назовем двойное преобразование Лапласа $\tilde{L}$ функции $y = \tilde{f}(t_1, t_2)$,*

$$F(p_1, p_2) \equiv L[f(t_1, t_2] = \tilde{L}[\tilde{f}(t_1, t_2)].$$

Иначе говоря, обобщённое двойное преобразование Лапласа и классическое двойное преобразование Лапласа связаны формулами

$$L = \tilde{L} J^{-1}, LJ = \tilde{L}.$$

Теорема 3. *Обобщённое двойное преобразование Лапласа L функции $y = f(t_1, t_2)$ вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2) &= a_1 b_1 \int_0^{t_1^0} e^{-a_1 p_1 t_1} \int_0^{t_2^0} e^{-b_1 p_2 t_2} f(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 + \\ &+ a_2 b_1 \int_{t_1^0}^\infty e^{-p_1 (a_2 (t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0)} \int_0^{t_2^0} e^{-b_1 p_2 t_2} f(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 + \\ &+ a_1 b_2 \int_0^{t_1^0} e^{-a_1 p_1 t_1} \int_{t_2^0}^\infty e^{-p_2 (b_2 (t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0)} f(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 + \\ &+ a_2 b_2 \int_0^{t_1^0} e^{-p_1 (a_2 (t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0)} \int_{t_2^0}^\infty e^{-p_2 (b_2 (t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0)} f(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Разобьем интеграл в определении 1 на четыре слагаемых

$$F(p_1, p_2 = \int_{D_{00}} e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{D_{10}} e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 +$$

$$+ \int_{D_{01}} e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{D_{11}} e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

В каждом из четырех интегралов выполним замену переменных. В первом,

$$t_1 = a_1 u_1, t_2 = b_1 u_2,$$

во-втором,

$$t_1 = a_1 t_1^0 + a_2 (u_1 - t_1^0), t_2 = b_1 u_2,$$

в в третьем

$$t_1 = a_1 u_1, t_2 = b_1 t_2^0 + b_2 (u_2 - t_2^0),$$

четвертом

$$t_1 = a_1 t_1^0 + a_1 (u_1 - t_1^0), t_2 = b_1 t_2^0 + b_2 (u_2 - t_2^0).$$

В итоге формула (3) установлена.

Теорема 4. Формула обращения Римана – Меллина. *Пусть $F(p_1, p_2)$ изображение Лапласа, тогда оригинал $f(t_1, t_2) \equiv L^{-1}[F(p_1, p_2)]$ находится по формулам*

$$f\left(t_1,t_2\right)=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{p_1t_1a_1}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}e^{p_2t_2a_2}F\left(p_1,p_2\right)dp_1dp_2,\left(t_1,t_2\right)\in D_{00},$$
$$f\left(t_1,t_2\right)=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{p_1\left(a_2\left(t_1-t_1^0\right)+a_1t_1^0\right)}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}e^{p_2t_2b_1}F\left(p_1,p_2\right)dp_1dp_2,\left(t_1,t_2\right)\in D_{10},$$
$$f\left(t_1,t_2\right)=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{p_1t_1a_1}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}e^{p_2\left(b_2\left(t_2-t_2^0\right)+b_1t_2^0\right)}F\left(p_1,p_2\right)dp_1dp_2,\left(t_1,t_2\right)\in D_{01},\qquad(8)$$
$$f\left(t_1,t_2\right)=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{p_1\left(a_2\left(t_1-t_1^0\right)+a_1t_1^0\right)}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}e^{p_2\left(b_2\left(t_2-t_2^0\right)+b_1t_2^0\right)}F\left(p_1,p_2\right)dp_1dp_2,\left(t_1,t_2\right)\in D_{11}.$$

Доказательство. Запишем формулу обращения Римана – Меллина [3]

$$\tilde{f}\left(t_1,t_2\right)=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{p_1t_1a_1}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}e^{p_2t_2a_2}F\left(p_1,p_2\right)dp_1dp_2.$$

Применим первую из формул (1), в итоге получим формулу обращения в области D_{00}.

Пример 1. Если $f(t_1,t_2)=1, t_1>0, t_2>0$, то

$$F(p_1,p_2)=\frac{1}{p_1p_2}.$$

В самом деле, из определения оператора преобразования следует, что $\tilde{f}(t_1,t_2)=1, t_1>0, t_2>0$. В работе [3] найдено изображение единичной функции $F(p_1,p_2)=\frac{1}{p_1p_2}$.

Пример 2. Если

$$\begin{cases} f\left(t_1,t_2\right)=exp\left(-(a_1t_1+b_1t_2)\right), t\in D_{00},\\ f\left(t_1,t_2\right)=exp\left(-\left(a_2\left(t_1-t_1^0\right)+a_1t_1^0+b_1t_2\right)\right), t\in D_{10},\\ f\left(t_1,t_2\right)=exp\left(-\left(a_1t_1+b_2\left(t_2-t_2^0\right)+b_1t_2^0\right)\right), t\in D_{10},\\ f\left(t_1,t_2\right)=exp\left(-\left(a_2\left(t_1-t_1^0\right)+a_1t_1^0, b_1t_2+b_2\left(t_2-t_2^0\right)+b_1t_2^0\right)\right), t\in D_{11},\end{cases}\qquad(9)$$

то двойное обобщённое преобразование Лапласа функции (10) имеет вид

$$F(p_1,p_2)=\frac{1}{(p_1-1)(p_2+1)}.$$

Свойства обобщённого двойного преобразования Лапласа:

(1) $L=L_1L_2$, где L_1 и L_2- однократное преобразование Лапласа, действующие по переменной t_1 и t_2 соответственно. Операторы L_1 и L_2 имеют вид

$$G(p_1)\equiv L_1[g(t_1)]=a_1\int_0^{t_1^0}e^{-a_1p_1t_1}g\left(t_1\right)dt_1+a_2\int_{t_1^0}^{\infty}e^{-p_1\left(a_2\left(t_1-t_1^0\right)+a_1t_1^0\right)}g\left(t_1\right)dt_1$$

$$G(p_2)\equiv L_2[g(t_2)]=b_1\int_0^{t_2^0}e^{-b_1p_2t_2}g\left(t_2\right)dt_2+b_2\int_{t_2^0}^{\infty}e^{-p_2\left(b_2\left(t_2-t_2^0\right)+b_1t_2^0\right)}g\left(t_2\right)dt_2$$

соответственно.

(2) $L^{-1}=L_1^{-1}L_2^{-1}$ где L_1^{-1} и $L_2^{-1}-$ однократные обратные преобразования Лапласа, действующие по переменной p_1 и p_2 соответственно. Операторы L_1^{-1} и L_2^{-1} определяются по правилам

$$g\left(t_1\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{p_1t_1a_1}G\left(p_1\right)dp_1, 0<t_1<t_1^0,$$

$$g\left(t_1\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{p_1\left(a_2\left(t_1-t_1^0\right)+a_1t_1^0\right)}G\left(p_1\right)dp_1, t_1^0<t_1,$$

$$g\left(t_2\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}e^{p_2t_2b_1}G\left(p_2\right)dp_2, 0<t_2<t_2^0,\qquad(10)$$

$$g\left(t_2\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}e^{p_2\left(b_2\left(t_2-t_2^0\right)+b_1t_2^0\right)}G\left(p_2\right)dp_2, t_2^0<t_2$$

соответственно.

(3) $L[f(t_1)]=L_1[f(t_1)]/p_2, L[f(t_2)]=L_2[f(t_2)]/p_1$

Следующие свойства обобщённого двойного преобразования применяются при решении дифференциальных уравнений в частных производных.

Теорема 5. Дифференцирование оригинала. *Пусть*

$$D_1 = \frac{1}{a_1}\theta(t_1^0 - t_1)\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{a_2}\theta(t_1 - t_1^0)\frac{\partial}{\partial t_1},$$
$$D_2 = \frac{1}{b_1}\theta(t_2^0 - t_2)\frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{1}{b_2}\theta(t_2 - t_2^0)\frac{\partial}{\partial t_2} -$$

операторы дифференцирования,а функции u, D_1u, D_2u- *изображения Лапласа, то*

$$L[D_1u] = p_1L[u] - L_2[u(0, t_2)],$$
$$L[D_2u] = p_2L[u] - L_1[u(t_1, 0)].$$

Как и для преобразования Лапласа, при доказательстве используется метод интегрирования по частям. Определим операторы дифференцирования второго порядка по правилам

$$D_{1,1}^2 = D_1 \cdot D_1, D_{2,2}^2 = D_2 \cdot D_2, D_{1,2}^2 = D_1 \cdot D_2.$$

Следствие. *Если функции* $u, D_{1,1}^2 u, D_{2,2}^2 u, D_{1,2}^2-$ *изображения Лапласа, то*

$$L[D_{1,1}^2 u] = p_1^2 L[u] - p_1 L_2[u(0, t_2) - L_2[D_1 u(0, t_2)],$$
$$L[D_{2,2}^2 u] = p_2^2 L[u] - p_2 L_1[u(t_1, 0) - L_1[D_2 u(t_1, 0)],$$
$$L[D_{1,2}^2 u] = p_1 p_2 L[u] - p_1 L_1[u(t_1, 0) - L_2[u(0, t_2) + u(0, 0)].$$

Теорема о сдвиге. *Пусть* $G(p_1, p_2)$ *изображение Лапласа функции* $g(t_1, t_2)$*, а функция* $f(t_1, t_2)$ *определяется формулой (9), то выполнено равенство*

$$L[f(\alpha t_1, \beta t_2, \alpha t_1^0, \beta t_2^0)g(t_1, t_2] = G(p_1 + \alpha, p_2 + \beta)).$$

Свертка. Теорема о свертке. *Сверткой двух оригиналов* f, g *назовем функцию* $f * *g$ *, определяемую равенством*

$$f * *g = J[J^{-1}[f] * *J^{-1}[g]].$$

Теорема. *Если* $f, g-$ *оригиналы, то их свертка* $f * *g$ *также оригинал, причем*

$$L[f * *g] = L[f]L[g].$$

Доказательство. Воспользуемся определением обобщённого двойного преобразования Лапласа

$$L = \tilde{L}J^{-1}.$$

Тогда получим

$$L[f * *g] = \tilde{L}J^{-1}[J[J^{-1}[f] * *J^{-1}[g]]] = \tilde{L}[J^{-1}[f] * *J^{-1}[g]] = \tilde{L}[\tilde{f} * *\tilde{g}] = \tilde{L}[\tilde{f}]L[\tilde{g}] = L[f]L[g].$$

4. Применения обобщённого двойного преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений в частных производных.

(a) решить задачу Коши для уравнения

$$D_1u - D_2u = 0, t_1 > 0, t_2 > 0$$

по начальным условиям

$$u(t_1, 0) = f(t_1), u(0, t_2) = f(t_2).$$

Применим обобщённое двойное преобразование Лапласа. В изображениях получим

$$(p_1 - p_2)L[u] = L_1[f] - L_2[f],$$

Тогда

$$L[u] = \frac{L_1[f] - L_2[f]}{p_1 - p_2},$$

Из определения 1 следует, что

$$L[\tilde{u}] = \frac{L_1[\tilde{f}] - L_2[\tilde{f}]}{p_1 - p_2},$$

В работе [3] найдено решение модельной задачи Коши для уравнения

$$\tilde{u}_{t_1} - \tilde{u}_{t_2} = 0, t_1 > 0, t_2 > 0$$

по начальным условиям

$$\tilde{u}(t_1, 0) = \tilde{f}(t_1), \tilde{u}(0, t_2) = \tilde{f}(t_2).$$

Решение имеет вид

$$\tilde{u}(t_1, t_2) = \tilde{f}(t_1 + t_2).$$

Следовательно, $u(t_1, t_2) = J[\tilde{u}(t_1, t_2)]$. В итоге получим решение рассматриваемой задачи

$$\begin{cases} u\left(t_1, t_2\right) = \tilde{f}\left(a_1 t_1 + b_1 t_2\right), t \in D_{00}, \\ u\left(t_1, t_2\right) = \tilde{f}\left(a_2\left(t_1 - t_1^0\right) + a_1 t_1^0 + b_1 t_2\right), t \in D_{10}, \\ u\left(t_1, t_2\right) = \tilde{f}\left(a_1 t_1 + b_2\left(t_2 - t_2^0\right) + b_1 t_2^0\right), t \in D_{10}, \\ u\left(t_1, t_2\right) = \tilde{f}\left(a_2\left(t_1 - t_1^0\right) + a_1 t_1^0, b_1 t_2 + b_2\left(t_2 - t_2^0\right) + b_1 t_2^0\right), t \in D_{11}. \end{cases} \tag{11}$$

В формулах (11) функция $\tilde{f}(t_1)$ определена по формуле (5).

(b) Решить задачу Коши для уравнения

$$D_{1,2}^2 u = 0, t_1 > 0, t_2 > 0$$

по начальным условиям

$$u(t_1, 0) = f(t_1), u(0, t_2) = g(t_2)$$

и условиям согласования $f(0) = g(0) = 0$. Применим обобщённое двойное преобразование Лапласа. Применяя следствие из теоремы 5, в изображениях получим задачу

$$p_1 p_2 L[u] = p_1 L_1[f] + p_2 L_2[g].$$

Тогда

$$L[u] = \frac{1}{p_2} L_1[f] + \frac{1}{p_1} L_2[g].$$

Возвращаясь к оригиналам, с учетом свойства (3) получим решение задачи Коши

$$u(t_1, t_2) = f(t_1) + g(t_2).$$

5. Заключение. Представлено обобщённое двойное интегральное преобразование Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Доказаны основные свойства: теорема о сдвиге, теоремы о дифференцировании оригинала и свертки. Установлен аналог формулы обращения Меллина – Лапласа. Метод операторов преобразования позволил связать обобщённое и классическое преобразования Лапласа, а также разработать эффективный алгоритм вычисления обобщённого преобразования Лапласа. Рассматриваются приложения обобщённого преобразования Лапласа для решения задач математической физики. Решена задача Коши для уравнения колебаний струны с кусочно-постоянными коэффициентами.

References

1. Aghili A. 2017. New trends in Laplace type integral transforms with applications.Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica. 35(1): 173–193.

2. Baeumer B. 2003. On the Inversion of the Convolution and Laplace Transform. Transactions of the American Mathematical Society. 1201–1212.

3. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P., Shishov V. S. 1979. Operational calculus. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., 16, VINITI, Moscow, 99–148; J. Soviet Math., 15(6) (1981):733–765.

4. Ermolova N. Y., Tirkkonen O. 2014. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications. IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions on. pp. 2938–2944 Jun.

5. Ganzha E. I. 2012. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. Programming and Computer Software. 38: 150–155.

6. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. 2019. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform. Ain Shams Engineering Journal. 10(4): 841–845.

7. Jarad F., Abdeljawad Th. 2018. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators. Results in Nonlinear Analysis. 1(2): 88–98.

8. Koepf W., Kim I., Rathie A. K. 2019. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions. Axioms. 8(3): 87.

9. Li S., Shemyakova E., Voronov Th. 2017. Darboux transformations for differential operators on the superline. Russian Mathematical Surveys. 70(6): 1173–1175.

10. Matveev V. B., Salle M. A. 1991. Darboux transformations and solitons. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin.

11. Milovanovic G. V., Parmar R. K., Rathie A. K. 2018. A study of generalized summation theorems for the series with an applications to Laplace transforms of convolution type integrals involving Kummer's functions. Applicable analysis and discrete mathematics. 257–272.

12. Napalkov V. V., Mullabaeva A. U. 2015. On one class of differential operators and their application. Proc. Steklov Inst. Math. 288(1): 142–155.

13. Pinelas S., Xavier G. B. A., Kumar S. U. Vasantha, Meganathan M. 2017. Laplace – Fibonacci transform by the solution of second order generalized difference equation. Non autonomous Dynamical Systems. 4(1): 22–30.

14. Sharma V. D., Thakare M. M. 2016. Introduction of generalized Laplace-fractional Mellin transform. International journal of engineering sciences & research technology 5. 667–670.

15. Sharma V. D., Thakare M. M. 2013. Generalized Laplace-Fractional Mellin Transform and Operators. International Journal of Pure & Applied Sciences & Technology. 16(1): 20–25.

16. Tsarev S. P. 2005. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations. In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC 2005. 325–331. ACM Press.

17. Zaikina S. M. 2014. Obobshchyonnoe integralnoe preobrazovanie Laplasa i ego primenenie k resheniyu nekotoryh integralnyh uravnenij [Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations]. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehnivceskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematičeskie Nauki. 1(34): 19–24.

18. Jeffreys H. and Jeffreys B. 1956. Methods of Mathematical Physics, 3rd ed., Cambridge Univ. Press.

19. Sitnik S. M., Yaremko O., Yaremko N. 2020. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, Springer Nature Switzerland. 447–466.

20. Yaremko O. E. 2004. Transformation operator and boundary value problems, Differential Equation. 40(8): 1149–1160.

Получена 11.11.2020

Яремко Олег Эмануилович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Московского государственного технологического университета (Станкин)

http://orcid.org/0000-0003-4619-0527
Вадковский пер., 1, г. Москва, 127055, Россия
E-mail: yaremki8@gmail.com

Яремко Наталия Николаевна – доктор педагогических наук, доцент, профессор Пензенского государственного университета

http://orcid.org/0000-0003-1491-624X
ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: yaremki@mail.ru