Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 2. С. 82–92.
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 2. P. 82–92.

УДК 517.95
MSC 35L10, 35L20, 25L99
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-82-92
EDN YPBMKJ

Об одной задаче с нелокальными интегральными условиями первого рода для уравнения второго порядка

Гилев А. В.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева,
Россия, 443086, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34
toshqaaa@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями первого рода для гиперболического уравнения второго порядка в характеристической области. Обусловив единственность решения поставленной задачи, выполняется переход к операторному уравнению, которое, как доказано в работе, эквивалентно рассматриваемой нелокальной задаче. Показано, что оператор полученного уравнения вполне непрерывен, а значит ввиду доказанной единственности решения операторное уравнение разрешимо. Отсюда, а также в силу эквивалентности рассматриваемой задачи и операторного уравнения, и следует разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальные интегральные условия первого рода, существование решения, вполне непрерывный оператор

Для цитирования: Гилев А. В. 2025. Об одной задаче с нелокальными интегральными условиями первого рода для уравнения второго порядка. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 82–92.
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-82-92 EDN YPBMKJ

Original Research

On a Problem With Nonlocal Integral Conditions of the First Kind for a Second-order Equation

Anton V. Gilev
(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)*
Samara National Research University,
34 Moskovskoye shosse, Samara 443086, Russia
toshqaaa@gmail.com

Abstract. In this article we consider a nonlocal problem for a second-order differential equation in the characteristic domain with integral conditions of the first kind. By introducing a new unknown function we reduce the original problem to the equivalent one with nonlocal conditions containing the unit as kernels. Next, we were able to prove the uniqueness of the solution to the problem and perform the transition to the operator equation. At this stage we justify the complete continuity of the obtained operator. From this, and also due to the previously proven uniqueness of the solution, the solvability of the operator equation follows. Since the original problem is equivalent to an operator equation whose solution exists, then the solution to the original problem also exists. As a result of the study, we found the conditions under which exists a solution to original problem. We also formulated and proved the corresponding theorem on the existence and uniqueness of the solution to the problem under consideration.

Keywords: Nonlocal Integral Conditions of the First Kind, Existence of a Solution, Completely Continuous Operator

For citation: Gilev A. V. 2025. On a Problem With Nonlocal Integral Conditions of the First Kind for a Second-order Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 82–92. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-82-92 EDN YPBMKJ

1. Введение. Моделирование различных физических процессов в случае, когда граница протекания моделируемого процесса недоступна для измерения, приводит к постановке задач с нелокальными условиями. Принято считать, что отправной точкой множества исследований этого класса задач являются работы [1, 2]. Не ограничивая общности, остановимся на рассмотрении нелокальных интегральных условий и отметим, что после выхода вышеупомянутых работ стали активно появляться исследования, посвященные разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями, играющими роль как граничных условий [3, 4], так и условий переопределения в обратных задачах [5, 6, 7].

Под нелокальными интегральными условиями принято понимать [8] следующее соотношение

$$\alpha u(x,t) + \beta\frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dy = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{1}$$

где
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_x \nu_j,$$
а $\nu(x) = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ есть вектор внешней нормали к границе области Ω. Нелокальные интегральные условия имеют классификацию по родам. Если в (1) α и β не обращаются в нуль одновременно, то условие (1) называют нелокальным интегральным условием второго рода, а если же $\alpha = \beta = 0$ – первого рода.

Важно отметить, что задачи с нелокальными условиями относятся к классу неклассических задач, что не позволяет применить хорошо изученные подходы и методы обоснования разрешимости задачи без какой-либо модификации. Данный факт хорошо виден, например, в работе [9].

Род нелокальных условий также оказывает влияние на выбор метода исследования нелокальной задачи. Так, в [10] для задачи с условиями, содержащими производную по нормали, предложен метод обоснования разрешимости в пространстве Соболева, так называемый метод компактности, основывающийся на известной процедуре, изложенной в [11]. Однако, при отсутствии внеинтегрального слагаемого, содержащего производную, позже, в [12] была предложена альтернатива этому методу, получившая развитие в дальнейших работах. В работе [13] предложен метод, который основывается на возможности сведения условий первого к условиям второго рода.

Кроме начально-краевых задач с нелокальными условиями интересен класс задач, которые можно рассматривать как интегральный аналог задачи Гурса. Простейшая задача из такого класса была рассмотрена З. А. Нахушевой в [14] для уравнения $u_{xy}(x,y) = 0$. Решение этой задачи основано на известном общем решении этого уравнения. В случае общего уравнения со старшей смешанной производной нельзя рассчитывать на возможность нахождения общего решения, однако удалось доказать разрешимость задачи с нелокальными условиями для него.

2. Постановка задачи. Поставим следующую задачу: найти в области $\Omega = (0,\alpha) \times (0,\beta)$ решение уравнения
$$u_{xy}(x,y) + (a(x,y)u(x,y))_x + (b(x,y)u(x,y))_y + c(x,y)u(x,y) = f(x,y), \tag{2}$$
которое удовлетворяет нелокальным интегральным условиям первого рода
$$\int_0^\alpha K(x)u(x,y)dx = h(y), \ \int_0^\beta M(y)u(x,y)dy = p(x). \tag{3}$$

Будем предполагать выполненными следующие условия
$$a, a_x, b, b_y, c, f \in C^1(\bar{\Omega}), \ p \in C^1[0,\alpha], \ h \in C^1[0,\beta], \tag{R_1}$$
$$\begin{gathered} K(x) \in C^1[0,\alpha], \ K(x) \neq 0, \ x \in [0,\alpha], \\ M(y) \in C^1[0,\beta], \ M(y) \neq 0, \ y \in [0,\beta]. \end{gathered} \tag{R_2}$$
Прежде всего сведем условия (3) к более простым. Введем функцию
$$v(x,y) = K(x)M(y)u(x,y),$$
где $u(x,y)$ – решение задачи (2) – (3). Тогда новая неизвестная функция удовлетворяет уравнению
$$v_{xy}(x,y) + (A(x,y)v(x,y))_x + (B(x,y)v(x,y))_y + C(x,y)v(x,y) = F(x,y), \tag{4}$$
и условиям
$$\int_0^\alpha v(x,y)dx = H(y), \ \int_0^\beta v(x,y)dy = P(x), \tag{5}$$
где
$$A(x,y) = a(x,y) - \frac{M'(y)}{M(y)}, \ B(x,y) = b(x,y) - \frac{K'(x)}{K(x)},$$
$$C(x,y) = \frac{K'(x)M'(y)}{K(x)M(y)} - \frac{a(x,y)K'(x)}{K(x)} - \frac{b(x,y)M'(y)}{M(y)} + c(x,y), \ F(x,y) = K(x)M(y)f(x,y),$$
$$H(y) = M(y)h(y), \ P(x) = K(x)p(x).$$
Предполагая же теперь, что $v(x,y)$ – решение задачи (4)–(5), и воспользовавшись обратной заменой, не составляет труда получить задачу (2)–(3), что и приводит к эквивалентности задач (2)–(3) и (4)–(5).

Вид интегральных условий (5) позволяет легко доказать следующую теорему [15].

Теорема 2.1. *Если*

$$A_y(x,y)p_1^2 - 2C(x,y)p_1p_2 + B_x(x,y)p_2^2 \geq 0,\ C_{xy}(x,y) \geq 0,$$

то существует не более одного решения задачи (4)–(5) *для любых конечных чисел* α, β.

Доказательство. Предположим, что существует два различных решения $v_1(x,y)$ и $v_2(x,y)$ задачи (4)–(5). Тогда функция $v(x,y)$, определенная следующим образом $v(x,y) = v_1(x,y) - v_2(x,y)$, очевидно, является решением однородного уравнения

$$v_{xy}(x,y) + (A(x,y)v(x,y))_x + (B(x,y)v(x,y))_y + C(x,y)v(x,y) = 0 \tag{6}$$

и удовлетворяет следующим условиям,

$$\int\limits_0^{\alpha} v(x,y)dx = 0,\ \int\limits_0^{\beta} v(x,y)dy = 0. \tag{7}$$

Умножим (6) на функцию

$$\int\limits_0^{y}\int\limits_0^{x} v(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

и проинтегрируем по области Ω, что приводит к равенству

$$\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha} \left[v_{xy}(x,y) + (A(x,y)v(x,y))_x + (B(x,y)v(x,y))_y + C(x,y)v(x,y)\right] \int\limits_0^{y}\int\limits_0^{x} v(\xi,\eta)d\xi d\eta dxdy = 0.$$

Воспользуемся интегрированием по частям в левой части этого равенства и, ввиду условий (7), получим

$$\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha}\left[v^2(x,y) + \frac{1}{2}A_y(x,y)\left(\int\limits_0^{y} v(x,\eta)d\eta\right)^2 + \frac{1}{2}B_x(x,y)\left(\int\limits_0^{x} v(\xi,y)d\xi\right)^2 - \frac{1}{2}C_{xy}(x,y)\left(\int\limits_0^{y}\int\limits_0^{x} v(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)^2 -\right.$$

$$\left. -C(x,y)\int\limits_0^{y} v(\xi,\eta)d\eta \int\limits_0^{x} v(\xi,y)d\xi\right]dxdy = 0, \tag{8}$$

а значит, в силу условий теоремы, $v(x,y) = 0$, что и означает единственность решения задачи (4)–(5).

3. Существование решения задачи (4)–(5)**.** Займемся вопросом существования решения эквивалентной задачи (4)–(5), для чего сформулируем и докажем теорему.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (R_1), (R_2) *и теоремы 2.1. Тогда, если*

$$1 + \frac{1}{\beta}\int\limits_0^{\beta}(\beta - y)A(x,y)dy \neq 0,\ \forall x \in [0,\alpha], \quad 1 + \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha}(\alpha - x)B(x,y)dx \neq 0,\ \forall y \in [0,\beta],$$

то решение задачи (4)–(5) *существует.*

Доказательство. Запишем уравнение (4) следующим образом:

$$v_{xy}(x,y) = F(x,y) - A(x,y)v_x(x,y) - B(x,y)v_x(x,y) - \tilde{C}(x,y)v(x,y), \tag{9}$$

где $\tilde{C}(x,y) = A_x(x,y) + B_y(x,y) + C(x,y)$. Считая правую часть временно известной, легко получить представление

$$v(x,y) = f(x) + g(y) + \int\limits_0^{y}\int\limits_0^{x} F(\xi,\eta)d\xi d\eta - \int\limits_0^{y}\int\limits_0^{x} A(\xi,\eta)v_{\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta -$$

$$-\int\limits_0^{y}\int\limits_0^{x} B(\xi,\eta)v_{\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta - \int\limits_0^{y}\int\limits_0^{x} \tilde{C}(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{10}$$

где $f(x)$, $g(y)$ – произвольные гладкие функции.

При помощи интегрирования по частям избавимся от слагаемых, содержащих производные от функции $v(x,y)$ в правой части (10). Заметим, что условия (R_1), (R_2) и представления A, B, C дают гарантию выполнения условия (R_1) и для новых коэффициентов. Тогда, в силу определения $\tilde{C}(x,y)$, получим

$$v(x,y) = f(x) + g(y) + \int_0^y \int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta - \int_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta + \int_0^y A(0,\eta)v(0,\eta)d\eta -$$

$$- \int_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi + \int_0^x B(\xi,0)v(\xi,0)d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{11}$$

Применим для отыскания $f(x)$ и $g(y)$ условия (5), что приводит к равенствам

$$H(y) = \int_0^\alpha f(x)dx + \alpha g(y) + \int_0^\alpha (\int_0^y \int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta - \int_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta + \int_0^y A(0,\eta)v(0,\eta)d\eta -$$

$$- \int_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi + \int_0^x B(\xi,0)v(\xi,0)d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta)dx, \tag{12}$$

$$P(x) = \beta f(x) + \int_0^\beta g(y)dy + \int_0^\beta (\int_0^y \int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta - \int_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta + \int_0^y A(0,\eta)v(0,\eta)d\eta -$$

$$- \int_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi + \int_0^x B(\xi,0)v(\xi,0)d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta)dy. \tag{13}$$

Поменяем порядок интегрирования в равенствах (12) и (13) и получим

$$\int_0^\beta \int_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta dy = \int_0^\beta (\beta - y)A(x,y)v(x,y)dy, \quad \int_0^\alpha \int_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi dx = \int_0^\alpha (\alpha - x)B(x,y)v(x,y)dx,$$

$$\int_0^\beta \int_0^y A(0,\eta)v(0,\eta)d\eta dy = \int_0^\beta (\beta - y)A(0,y)v(0,y)dy, \quad \int_0^\alpha \int_0^x B(\xi,0)v(\xi,0)d\xi dx = \int_0^\alpha (\alpha - x)B(x,0)v(x,0)dx,$$

$$\int_0^\alpha \int_0^y \int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dx = \int_0^y \int_0^\alpha (\alpha - x)F(x,\eta)dx d\eta, \quad \int_0^\beta \int_0^y \int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dy = \int_0^x \int_0^\beta (\beta - y)F(\xi,y)dy d\xi,$$

$$\int_0^\alpha \int_0^y \int_0^x \tilde{C}(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta dx = \int_0^y \int_0^\alpha (\alpha - x)\tilde{C}(x,\eta)v(x,\eta)dx d\eta,$$

$$\int_0^\beta \int_0^y \int_0^x \tilde{C}(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta dy = \int_0^x \int_0^\beta (\beta - y)\tilde{C}(\xi,y)v(\xi,y)dy d\xi.$$

откуда

$$H(y) = \int_0^\alpha f(x)dx + \alpha g(y) + \int_0^\alpha \int_0^y (\alpha - x)F(x,\eta)d\eta dx - \int_0^\alpha \int_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta dx + \alpha \int_0^y A(0,\eta)v(0,\eta)d\eta -$$

$$- \int_0^\alpha (\alpha - x)B(x,y)v(x,y)dx + \int_0^\alpha (\alpha - x)B(x,0)v(x,0)dx - \int_0^\alpha \int_0^y (\alpha - x)C(x,\eta)v(x,\eta)d\eta dx,$$

$$P(x) = \beta f(x) + \int_0^\beta g(y)dy + \int_0^\beta \int_0^x (\beta - y)F(\xi,y)d\xi dy - \int_0^\beta (\beta - y)A(x,y)v(x,y)dy + \int_0^\beta (\beta - y)A(0,y)v(0,y)dy -$$

$$-\int_0^\beta\int_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi dy+\beta\int_0^x B(\xi,0)v(\xi,0)d\xi-\int_0^\beta\int_0^x(\beta-y)C(\xi,y)v(\xi,y)dyd\xi.$$

Обратим внимание на наличие интегральных слагаемых от неизвестных функций в приведенных отношениях. Для того чтобы определить функции $f(x), g(y)$, можно решить соответствующие интегральные уравнения, однако выберем другой способ. Запишем полученные выше выражения в виде

$$\begin{cases} H(y)-G(y)=\int_0^\alpha f(x)dx+\alpha g(y),\\ P(x)-N(x)=\beta f(x)+\int_0^\beta g(y)dy, \end{cases} \tag{14}$$

где обозначим

$$G(y)=\int_0^\alpha\int_0^y(\alpha-x)F(x,\eta)d\eta dx-\int_0^\alpha\int_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta dx+\alpha\int_0^y A(0,\eta)v(0,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^\alpha(\alpha-x)B(x,y)v(x,y)dx+\int_0^\alpha(\alpha-x)B(x,0)v(x,0)dx-\int_0^\alpha\int_0^y(\alpha-x)C(x,\eta)v(x,\eta)d\eta dx,$$

$$N(x)=\int_0^\beta\int_0^x(\beta-y)F(\xi,y)d\xi dy-\int_0^\beta(\beta-y)A(x,y)v(x,y)dy+\int_0^\beta(\beta-y)A(0,y)v(0,y)dy-$$

$$-\int_0^\beta\int_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi dy+\beta\int_0^x B(\xi,0)v(\xi,0)d\xi-\int_0^\beta\int_0^x(\beta-y)C(\xi,y)v(\xi,y)d\xi dy,$$

и сразу вычислим сумму интегралов от искомых функций, проинтегрировав систему (14) по соответствующим переменным, а затем сложим оба равенства

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx+\frac{1}{\beta}\int_0^\beta g(y)dy=\frac{1}{2\alpha\beta}(\int_0^\beta H(y)dy+\int_0^\alpha P(x)dx-\int_0^\beta G(y)dy-\int_0^\alpha N(x)dx). \tag{15}$$

Тогда, учитывая (15), для (11) следует

$$v(x,y)=\frac{1}{\beta}(P(x)-N(x))+\frac{1}{\alpha}(H(y)-G(y))-\frac{1}{2\alpha\beta}(\int_0^\beta H(y)dy-\int_0^\beta G(y)dy+\int_0^\alpha P(x)dx-\int_0^\alpha N(x)dx)+$$

$$+\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta+\int_0^y A(0,\eta)v(0,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi+\int_0^x B(\xi,0)v(\xi,0)d\xi-\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Подставим значения $N(x), G(y)$ и, после упрощений, получим

$$v(x,y)=\frac{1}{\beta}\int_0^\beta(\beta-y)A(x,y)v(x,y)dy+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\int_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta dx-\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^\alpha\int_0^\beta(\beta-y)A(x,y)v(x,y)dydx-$$

$$-\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^\alpha\int_0^\beta(\alpha-x)B(x,y)v(x,y)dydx+\frac{1}{\beta}\int_0^\beta\int_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi dy+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha(\alpha-x)B(x,y)v(x,y)dx-$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\int_0^y(\alpha-x)C(x,\eta)v(x,\eta)d\eta dx+\frac{1}{\beta}\int_0^\beta\int_0^x(\beta-y)C(\xi,y)v(\xi,y)d\xi dy-\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^\alpha\int_0^\beta(\alpha-x)(\beta-y)C(x,y)v(x,y)dydx-$$

$$-\int\limits_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta-\int\limits_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi-\int\limits_0^y\int\limits_0^x C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta+G(x,y), \tag{16}$$

где

$$G(x,y)=\frac{1}{\beta}P(x)-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^x(\beta-y)F(\xi,y)d\xi dy+\frac{1}{\alpha}H(y)-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^y(\alpha-x)F(x,\eta)d\eta dx-\frac{1}{2\alpha\beta}\int\limits_0^\beta H(y)dy-$$

$$-\frac{1}{2\alpha\beta}\int\limits_0^\alpha P(x)dx+\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^\beta(\alpha-x)(\beta-y)F(x,y)dydx+\int\limits_0^y\int\limits_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Формула (16) естественно не дает нам решение задачи, и необходимо вспомнить, что мы только временно считаем правую часть (9) известной. (16) представляет собой операторное уравнение, к которому сведена задача (4)–(5). Предполагая теперь, что уравнение (16) разрешимо и $v(x,y)$ его решение, можно легко показать, что эта же функция, если она имеет все производные, входящие в уравнение (4), является решением задачи (4)–(5). Для этого нужно лишь продифференцировать (16) и подставить введенные обозначения $N(x)$ и $G(y)$.

На следующем этапе покажем, что следующее операторное уравнение

$$v(x,y)+\mathcal{T}v=G(x,y), \tag{17}$$

где

$$\mathcal{T}v=-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta(\beta-y)A(x,y)v(x,y)dy-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^y\Big[A(x,\eta)v(x,\eta)+(\alpha-x)C(x,\eta)v(x,\eta)\Big]d\eta dx+$$

$$+\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^\beta\Big[(\beta-y)A(x,y)v(x,y)+(\alpha-x)B(x,y)v(x,y)+(\alpha-x)(\beta-y)C(x,y)v(x,y)\Big]dydx-$$

$$-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^x\Big[B(\xi,y)v(\xi,y)+(\beta-y)C(\xi,y)v(\xi,y)\Big]d\xi dy-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha(\alpha-x)B(x,y)v(x,y)dx+\int\limits_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi+\int\limits_0^y\int\limits_0^x C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

разрешимо.

Действительно, легко показать, что оператор $\mathcal{T}$ вполне непрерывен как оператор из C в C, для чего обозначим

$$S(x,y)=\mathcal{T}v.$$

Тогда, в силу условий (R_1), существуют такие числа A_1,B_1,C_1,V, что

$$\max_\Omega|A(x,y)|\le A_1,\ \max_\Omega|B(x,y)|\le B_1,\ \max_\Omega|C(x,y)|\le C_1,\ \max_\Omega|v(x,y)|\le V$$

и выполняется неравенство

$$|S(x,y)|\le qD(6+\frac{5}{4}q),$$

где

$$D=\max\{A_1,B_1,C_1,V\},\ q=\max\{\alpha,\beta\},$$

откуда и следует равномерная ограниченность $S(x,y)$.

Рассмотрим разность

$$S(x_2,y_2)-S(x_1,y_1)=-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta(\beta-\eta)A(x_2,\eta)v(x_2,\eta)d\eta+\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta(\beta-\eta)A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta-$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^{y_2}A(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^{y_1}A(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^{x_2}B(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta+\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^{x_1}B(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha(\alpha-\xi)B(\xi,y_2)v(\xi,y_2)d\xi+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha(\alpha-\xi)B(\xi,y_1)v(\xi,y_1)d\xi-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^{y_2}(\alpha-\xi)C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^{y_1}(\alpha-\xi)C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^{x_2}(\beta-\eta)C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta+\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^{x_1}(\beta-\eta)C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^{y_2}A(x_2,\eta)v(x_2,\eta)d\eta-\int\limits_0^{y_1}A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta+\int\limits_0^{x_2}B(\xi,y_2)v(\xi,y_2)d\xi-\int\limits_0^{x_1}B(\xi,y_1)v(\xi,y_1)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{y_2}\int\limits_0^{x_2}C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{x_1}C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Отметим, что так как

$$\int\limits_0^\beta(\beta-\eta)(A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)-A(x_2,\eta)v(x_2,\eta))d\eta=\int\limits_0^\beta(\beta-\eta)\Big[A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)-A(x_2,\eta)v(x_1,\eta)+A(x_2,\eta)v(x_1,\eta)-$$

$$-A(x_2,\eta)v(x_2,\eta)\Big]d\eta=\int\limits_0^\beta(\beta-\eta)\Big[v(x_1,\eta)(A(x_1,\eta)-A(x_2,\eta))+A(x_2,\eta)(v(x_1,\eta)-v(x_2,\eta))\Big]d\eta,$$

то можно перейти к следующему неравенству:

$$|\int\limits_0^\beta(\beta-\eta)\Big[v(x_1,\eta)(A(x_1,\eta)-A(x_2,\eta))+A(x_2,\eta)(v(x_1,\eta)-v(x_2,\eta))\Big]d\eta|\le\int\limits_0^\beta(\beta-\eta)|v(x_1,\eta)||A(x_1,\eta)-A(x_2,\eta)|d\eta+$$

$$+\int\limits_0^\beta(\beta-\eta)|A(x_2,\eta)||v(x_1,\eta)-v(x_2,\eta)|d\eta\le\frac{\beta^2}{2}(A_1+V)\epsilon$$

в силу непрерывности функций $v(x,y)$ и $A(x,y)$. Далее, из того что

$$\int\limits_0^{y_2}A(x_2,\eta)v(x_2,\eta)d\eta-\int\limits_0^{y_1}A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta=\int\limits_0^{y_2}A(x_2,\eta)v(x_2,\eta)d\eta-\int\limits_0^{y_2}A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta+\int\limits_0^{y_2}A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta-$$

$$-\int\limits_0^{y_1}A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta=\int\limits_0^{y_2}\left[A(x_2,\eta)v(x_2,\eta)-A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)\right]d\eta+\int\limits_{y_1}^{y_2}A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta=$$

$$=\int\limits_0^{y_2}\left[A(x_2,\eta)v(x_2,\eta)-A(x_2,\eta)v(x_1,\eta)+A(x_2,\eta)v(x_1,\eta)-A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)\right]d\eta+\int\limits_{y_1}^{y_2}A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta=$$

$$=\int\limits_0^{y_2}A(x_2,\eta)\left[v(x_2,\eta)-v(x_1,\eta)\right]d\eta+\int\limits_0^{y_2}v(x_1,\eta)\left[A(x_2,\eta)-A(x_1,\eta)\right]d\eta+\int\limits_{y_1}^{y_2}A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta$$

очевидно следует неравенство

$$|\int\limits_0^{y_2}A(x_2,\eta)v(x_2,\eta)d\eta-\int\limits_0^{y_1}A(x_1,\eta)v(x_1,\eta)d\eta|\le\beta A_1\epsilon+\beta V\epsilon+A_1V\delta.$$

Также несложно заметить, что раз

$$\int\limits_0^{y_2}\int\limits_0^{x_2}C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{x_1}C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int\limits_0^{y_2}\int\limits_0^{x_2}C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^{y_2}\int\limits_0^{x_1}C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^{y_2}\int\limits_0^{x_1} C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{x_1} C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int\limits_0^{y_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_{y_1}^{y_2} C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

то для этой разности имеет место следующая оценка:

$$|\int\limits_0^{y_2}\int\limits_0^{x_2} C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{x_1} C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta|\le \beta C_1V\delta+\alpha C_1V\delta\le 2qC_1V\delta.$$

Проводя аналогичные рассуждения, получим:

$$|-\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{y_2} A(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi+\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{y_1} A(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi|\le \alpha A_1V\delta,$$

$$|-\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{x_2} B(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{x_1} B(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta|\le \beta B_1V\delta,$$

$$|-\int\limits_0^{\alpha}(\alpha-\xi)B(\xi,y_2)v(\xi,y_2)d\xi+\int\limits_0^{\alpha}(\alpha-\xi)B(\xi,y_1)v(\xi,y_1)d\xi|\le \frac{\alpha^2}{2}(B_1+V)\epsilon,$$

$$|-\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{y_2}(\alpha-\xi)C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi+\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{y_1}(\alpha-\xi)C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi|\le \frac{\alpha^2}{2}C_1V\delta,$$

$$|-\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{x_2}(\beta-\eta)C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{x_1}(\beta-\eta)C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta|\le \frac{\beta^2}{2}C_1V\delta,$$

$$|\int\limits_0^{x_2} B(\xi,y_2)v(\xi,y_2)d\xi-\int\limits_0^{x_1} B(\xi,y_1)v(\xi,y_1)d\xi|\le \alpha B_1\epsilon+\alpha V\epsilon+B_1V\delta.$$

Тогда

$$|S(x_2,y_2)-S(x_1,y_1)|\le \frac{\beta}{2}(A_1+V)\epsilon+A_1V\delta+B_1V\delta+\frac{\alpha}{2}(B_1+V)\epsilon+\frac{\alpha}{2}C_1V\delta+\frac{\beta}{2}C_1V\delta+$$
$$+\beta A_1\epsilon+\beta V\epsilon+A_1V\delta+\alpha B_1\epsilon+\alpha V\epsilon+B_1V\delta+2qC_1V\delta.$$

Выберем $\delta=\epsilon$, откуда

$$|S(x_2,y_2)-S(x_1,y_1)|\le Q\epsilon,$$

где

$$Q=\frac{q}{2}((3+\frac{4}{q}V)(A_1+B_1)+V(6+C_1))$$

для всякой функции $v(x,y)\in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющей (16). Это означает, что $S(x,y)$ равностепенно непрерывны, но в таком случае оператор $\mathcal{T}$ вполне непрерывен и тогда из теоремы 3.1 следует разрешимость уравнения (17).

Осталось лишь убедиться в том, что это решение имеет нужные производные. Покажем, что существует $v_x(x,y)$. Запишем (16) следующим образом

$$v(x,y)-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^{\beta}(\beta-y)A(x,y)v(x,y)dy=G_1(x,y), \tag{18}$$

где

$$G_1(x,y)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{y} A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta dx-\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{\beta}(\beta-y)A(x,y)v(x,y)dydx-$$

$$-\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{\beta}(\alpha-x)B(x,y)v(x,y)dydx+\frac{1}{\beta}\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{x} B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi dy+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha}(\alpha-x)B(x,y)v(x,y)dx-$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^y(\alpha-x)C(x,\eta)v(x,\eta)d\eta dx+\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^x(\beta-y)C(\xi,y)v(\xi,y)d\xi dy-\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^\beta(\alpha-x)(\beta-y)C(x,y)v(x,y)dydx-$$

$$-\int\limits_0^y A(x,\eta)v(x,\eta)d\eta-\int\limits_0^x B(\xi,y)v(\xi,y)d\xi-\int\limits_0^y\int\limits_0^x C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta+\frac{1}{\beta}P(x)-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^x(\beta-y)F(\xi,y)d\xi dy+$$

$$+\frac{1}{\alpha}H(y)-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^y(\alpha-x)F(x,\eta)d\eta dx-\frac{1}{2\alpha\beta}\int\limits_0^\beta H(y)dy-\frac{1}{2\alpha\beta}\int\limits_0^\alpha P(x)dx+$$

$$+\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^\beta(\alpha-x)(\beta-y)F(x,y)dydx+\int\limits_0^y\int\limits_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Заметим, что ядро интегрального оператора в (18) зависит только от x, y, следовательно, интегральное слагаемое есть функция от x. Введем следующее обозначение:

$$V(x)=\int\limits_0^\beta(\beta-y)A(x,y)v(x,y)dy. \tag{19}$$

Тогда решение (18) представимо в виде

$$v(x,y)=G_1(x,y)-\frac{1}{\beta}V(x). \tag{20}$$

Отыщем $V(x)$, подставив (20) в (19), откуда

$$V(x)=\frac{\int\limits_0^\beta(\beta-y)A(x,y)G_1(x,y)dy}{1+\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta(\beta-y)A(x,y)dy},$$

а значит

$$v(x,y)=G_1(x,y)-\frac{1}{\beta}\frac{\int\limits_0^\beta(\beta-y)A(x,y)G_1(x,y)dy}{1+\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta(\beta-y)A(x,y)dy}. \tag{21}$$

Путем непосредственной подстановки (21) в (18) убеждаемся в том, что (21) действительно решение. Так как $G_1(x, y)$ имеет производную по x, то же верно и для $v(x, y)$. Аналогичным образом легко показать существование производной по y, а также смешанной производной.

4. Заключение. В заключении работы сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 3.1. Тогда существует единственное решение задачи* (2)–(3).

Доказательство. Доказательство этой теоремы очевидно следует из приведенных рассуждений, в силу обусловленной эквивалентности задач (2)–(3) и (4)–(5).

Список литературы

1. Cannon JR. The Solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy. *Quarterly of Applied Mathematics.* 1963;21(2):155–160. https://doi.org/10.1090/QAM/160437
2. Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1964;4(6):1006–1024.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения.* 1977;13(2):294–304.
4. Иванчов Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями. *Дифференциальные уравнения.* 2004;40(4):547–564.
5. Cannon JR., van der Hoek J. The Classical Solution of the One-Dimensional Two-Phase Stefan Problem with Energy Specification. *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* 1982;130(1):385–398. https://doi.org/10.1007/BF01761503

6. Cannon JR., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. *Inverse Problems.* 1988;4(1):35–45. https://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006
7. Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения. *Математические заметки.* 2013;94(2):207–217. https://doi.org/10.4213/mzm9370
8. Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Издательство "Самарский Университет"; 2012. 194 с.
9. Beilin SA. Existence of Solutions for One-Dimensional Wave Equations with Nonlocal Conditions. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2001;2001(76):1–8.
10. Pulkina LS. Solution to Nonlocal Problems of Pseudohyperbolic Equations. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2014;2014(116):1–9.
11. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.:Наука; 1973. 408 с.
12. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. *Дифференциальные уравнения.* 2006;42(9):1166–1179.
13. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода. *Известия высших учебных заведений. Математика* 2012;1(4):74–83.
14. Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных. *Дифференциальные уравнения.* 1986;22(1):171–174.
15. Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения. *Дифференциальные уравнения.* 2000;36(2):279–280.

References

1. Cannon JR. The Solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy. *Quarterly of Applied Mathematics.* 1963;21(2):155–160. https://doi.org/10.1090/QAM/160437
2. Kamynin LI. Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviyami [On a boundary value problem of heat conduction theory with non-classical boundary conditions]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics].* 1964;4(6):33–59. https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1
3. Ionkin NI. Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations].* 1977;13(2):294–304.
4. Ivanchov NI. Kraevye zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya s integral'nymi usloviyami [Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations].* 2004;40(4):591–609. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44
5. Cannon JR., van der Hoek J. The Classical Solution of the One-Dimensional Two-Phase Stefan Problem with Energy Specification. *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* 1982;130(1):385–398. https://doi.org/10.1007/BF01761503
6. Cannon JR., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. *Inverse Problems.* 1988;4(1):35–45. https://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006
7. Kamynin VL. Obratnaya zadacha opredeleniya mladshego koehffitsienta v parabolicheskom uravnenii pri uslovii integral'nogo nablyudeniya [The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation]. *Matematicheskie zametki [Mathematical Notes].* 2013;94(2):205–213. https://doi.org/10.1134/S00014-34613070201
8. Pul'kina LS. Zadachi s neklassicheskimi usloviyami dlya giperbolicheskikh uravnenii. Samara: Izdatel'stvo "Samarskii Universitet"; 2012. 194 p.
9. Beilin SA. Existence of Solutions for One-Dimensional Wave Equations with Nonlocal Conditions. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2001;2001(76):1–8.
10. Pulkina LS. Solution to Nonlocal Problems of Pseudohyperbolic Equations. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2014;2014(116):1–9.
11. Ladyzhenskaya OA. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki. Moscow:Nauka; 1973. 408 p.
12. Kozhanov AI., Pul'kina LS. O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida dlya mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii [On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations].* 2006;42(9):1233–1246. https://doi.org/10.1134/S0012266106090023
13. Pul'kina LS. Kraevye zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s nelokal'nymi usloviyami I i II roda [Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika [Russian Mathematics]* 2012;56(4):62–69. https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081
14. Nakhusheva ZA. Ob odnoi nelokal'noi zadache dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations].* 1986;22(1):171–174.
15. Pul'kina LS. O razreshimosti v L_2 nelokal'noi zadachi s integral'nymi usloviyami dlya giperbolicheskogo uravneniya [The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations].* 2000;36(2):316–318. https://doi.org/10.1007/BF02754219

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 02.04.2025
Поступила после рецензирования 20.05.2025
Принята к публикации 24.05.2025

Received April 2, 2025
Revised May 20, 2025
Accepted May 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гилев Антон Владимирович – аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anton V. Gilev – Graduate Student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, Samara, Russia

К содержанию