

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 519.213.7
MSC 60E07
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-5-21
EDN DDORQQ

Оценка остаточного члена в разложении устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$

Саенко В. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Вирченко Ю. П.)
Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42
vsyaenko@inbox.ru

Аннотация. В работе исследуется разложение устойчивого закона в случае $\alpha \rightarrow 0$. Получены асимптотические разложения функции распределения и плотности вероятности, а также оценки остаточных членов этих разложений. На основе оценок остаточных членов введен критерий, позволяющий определить область значений параметра α , внутри которой относительная ошибка аппроксимации не будет превосходить задаваемый уровень точности ε . Представленные расчеты подтверждают справедливость полученных выражений.

Ключевые слова: устойчивый закон, разложение устойчивого закона, плотность вероятности, функция распределения, асимптотическое разложение, полиномы Белла

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект №123020700216 (FEUF-2023-0004))

Для цитирования: Саенко В.В. Оценка остаточного члена в разложении устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):5–21. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-5-21 EDN DDORQQ

Original Research

Estimation of the Remainder Term in the Expansion of the Stable Law at $\alpha \rightarrow 0$

Viacheslav V. Saenko 

(Article submitted by a member of the editorial board Virchenko Yu. P.)
Ulyanovsk State University,
42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia
vsyaenko@inbox.ru

Abstract. The paper studies the expansion of a stable law in the case of $\alpha \rightarrow 0$. Asymptotic expansions of the distribution function and probability density, as well as estimates of the remainder terms of these expansions, are obtained. Based on the estimates of the remainder terms, a criterion is introduced that allows one to determine the range of values of the parameter α within which the relative approximation error will not exceed the specified accuracy level ε . The presented calculations confirm the validity of the expressions obtained.

Keywords: Stable Law, Expansion of Stable Law, Probability Density, Distribution Function, Asymptotic Expansion, Bell Polynomials

Funding: The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 123020700216 (FEUF-2023-0004))

For citation: Saenko VV. Estimation of the Remainder Term in the Expansion of the Stable Law at $\alpha \rightarrow 0$. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):5–21. (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-5-21 EDN DDORQQ

1. Введение. Устойчивые законы являются предельными распределениями и возникают в задаче суммирования серий независимых случайных величин. В зависимости от выбранной параметризации этот класс распределений характеризуется четырьмя параметрами α , β , γ , λ . Параметр α называется характеристическим параметром и может принимать значения из интервала $(0, 2]$. Параметр β является параметром асимметрии и принимает значения из интервала $[-1, 1]$. Параметр γ есть параметр сдвига $\gamma \in R$ и $\lambda > 0$ – масштабный параметр.

Параметр α является основным параметром и характеризует закон распределения. В общем случае для вычисления устойчивых законов необходимо использовать интегральные представления [1, 2, 3], которые справедливы во всем диапазоне допустимых значений α , за исключением некоторых частных случаев. В пяти частных случаях устойчивые законы выражаются в элементарных функциях: распределение Леви

($\alpha = 1/2, \theta = 1$), симметричное распределение Леви ($\alpha = 1/2, \theta = -1$), распределение Коши ($\alpha = 1, \theta = 0$), обобщенное распределение Коши ($\alpha = 1, -1 \leq \theta \leq 1$) и распределение Гаусса ($\alpha = 2, \theta = 0$). При этом параметр α инвариантен относительно различных параметризаций. Этот параметр непрерывен в интервалах $(0, 1)$ и $(1, 2)$ независимо от системы параметризации. В окрестности точек $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ для исследования поведения и вычисления устойчивых законов необходимо использовать соответствующие асимптотические разложения. Данная работа посвящена исследованию устойчивых законов в случае $\alpha \rightarrow 0$.

Изучению свойств устойчивых законов в случае $\alpha \rightarrow 0$ посвящено несколько работ. В статье [4] изучается распределение случайной величины $|Y(\alpha, \theta)|^\alpha$, где $Y(\alpha, \theta)$ – устойчивая случайная величина. В этой статье показано, что $|Y(\alpha, \theta)|^\alpha \xrightarrow{d} E^{-1}$ в случае $\alpha \rightarrow 0$, где E – случайная величина с экспоненциальным распределением (см. также § 4.8 в [5]). В книге [6] (см. § 3.8) автор приходит к аналогичному результату, рассматривая интегральное представление плотности вероятности устойчивого закона. Результаты этих работ позволяют судить о характере поведения устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$ и соответствуют главному асимптотическому члену разложения. Более содержательный результат получен в работе [7]. В этой работе были исследованы устойчивые законы в окрестности точек $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ и получены асимптотические разложения функции распределения. В дальнейшем результаты этой работы в переработанном варианте и с внесением некоторых исправлений были использованы в монографии [3]. В случае $\alpha \rightarrow 0$ полученное разложение представляет из себя ряд по степеням α , при этом первое слагаемое этого ряда является главным асимптотическим членом и совпадает с результатами упомянутых выше работ.

В случае $\alpha \rightarrow 0$ использование этого разложения в ряд позволяет получить необходимую точность аппроксимации. Однако вопрос о том, сколько слагаемых в разложении необходимо использовать и при каких значениях параметра α возможно использование этого разложения, остается открытым. Для ответа на этот вопрос необходимо получить оценку остаточного члена разложения. Такая оценка позволит ввести критерий, позволяющий определить область допустимых значений параметра α и количество слагаемых в разложении, при которых будет достигаться заданный уровень точности. Данная статья как раз и направлена на решение этой проблемы.

В основе работы лежит разработанный в статье [7] подход и более детально описанный в книге [3]. В этих работах было получено разложение функции распределения устойчивого закона в случае $\alpha \rightarrow 0$. Так как получение оценки остаточного члена разложения тесно связано с получением самого разложения, то по ходу изложения будет получено само разложение плотности вероятности и функции распределения в ряд при $\alpha \rightarrow 0$. Это позволит устранить некоторые опечатки, присутствующие в ранее полученных результатах.

2. Предварительные замечания. Будем рассматривать устойчивые законы с характеристической функцией

$$\hat{g}(t, \alpha, \theta, \lambda) = \exp \left\{ -\lambda |t|^\alpha \exp \left\{ -i \frac{\pi}{2} \alpha \theta \operatorname{sign} t \right\} \right\}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

где $\alpha \in (0, 2]$, $|\theta| \leq \min(1, 2/\alpha - 1)$, $\lambda > 0$. Согласно терминологии, введенной в книгах [3, 5], такой вид характеристической функции соответствует параметризации «С». Будем обозначать через $g(x, \alpha, \theta, \lambda)$, $G(x, \alpha, \theta, \lambda)$ и $Y(\alpha, \theta, \lambda)$ плотность вероятности, функцию распределения и случайную величину устойчивого закона с характеристической функцией (1) соответственно.

Нам понадобится характеристическое преобразование. Характеристическое преобразование плотности $p_X(x)$ произвольной случайной величины X определяется следующим образом:

$$W_X(t) = \begin{pmatrix} w_0(t)_X & 0 \\ 0 & w_1(t)_X \end{pmatrix} = (\mathcal{W}p_X)(t),$$

где $w_k(t)_X = E|X|^{it} (\operatorname{sign} X)^k$, $t \in \mathbf{R}$, $k = 0, 1$. Для характеристического преобразования плотности устойчивого закона $g(x, \alpha, \theta, \lambda)$ введем обозначение

$$W(s, \alpha, \theta, \lambda) = (\mathcal{W}g)(-is) = \begin{pmatrix} w_0(s, \alpha, \theta, \lambda) & 0 \\ 0 & w_1(s, \alpha, \theta, \lambda) \end{pmatrix},$$

где $w_k(s, \alpha, \theta, \lambda) = E|Y(\alpha, \theta, \lambda)|^s (\operatorname{sign} Y(\alpha, \theta, \lambda))^k$, $-1 < \Re s < \alpha$, $k = 0, 1$.

Имеет место следующая теорема (см. Теорему 2.6.4 в [3])

Теорема 1. В полосе $-1 < \Re s < \alpha$ характеристические преобразования плотностей строго устойчивых распределений имеют вид

$$w_k(s, \alpha, \theta, \lambda) = \lambda^{s/\alpha} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(k - \theta s)\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(k - s)\right) \Gamma(1 - s)}, \quad k = 0, 1.$$

Связь характеристического преобразования с преобразованием Меллина дается соотношениями

$$w_0(s, \alpha, \theta, \lambda) = m(s, \alpha, \theta, \lambda) + m(s, \alpha, -\theta, \lambda), \quad (2)$$

$$w_1(s, \alpha, \theta, \lambda) = m(s, \alpha, \theta, \lambda) - m(s, \alpha, -\theta, \lambda), \quad (3)$$

где $m(s, \alpha, \theta, \lambda)$ – преобразование Меллина плотности устойчивого закона. За более подробной информацией о характеристическом преобразовании и преобразовании Меллина устойчивых законов отсылаем читателя к монографии [3] и статьям [7, 8].

В дальнейшем будем предполагать параметр масштаба $\lambda = 1$. Такие устойчивые законы называются стандартными и для них приняты обозначения $g(x, \alpha, \theta, 1) \equiv g(x, \alpha, \theta)$, $G(x, \alpha, \theta, 1) \equiv G(x, \alpha, \theta)$, $Y(\alpha, \theta, 1) \equiv Y(\alpha, \theta)$, $w_k(s, \alpha, \theta, 1) \equiv w_k(s, \alpha, \theta)$, $m(s, \alpha, \theta, 1) \equiv m(s, \alpha, \theta)$.

Получение асимптотического разложения устойчивых законов при $\alpha \rightarrow 0$ тесно связано со случайной величиной

$$Z(\alpha, \theta) = |Y(\alpha, \theta)|^\alpha \operatorname{sign} Y(\alpha, \theta). \tag{4}$$

Плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ будем обозначать $f(y, \alpha, \theta)$ и $F(y, \alpha, \theta)$ соответственно.

3. Разложение $f(y, \alpha, \theta)$ и $F(y, \alpha, \theta)$ в ряд в случае $\alpha \rightarrow 0$. Теорема 1 является отправной точкой получения разложения функции распределения $F(y, \alpha, \theta)$ и плотности вероятности $f(y, \alpha, \theta)$. Для случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ элементы характеристического преобразования принимают вид

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = E|Z(\alpha, \theta)|^s (\operatorname{sign} Z(\alpha, \theta))^k = E|Y(\alpha, \theta)|^{\alpha s} (\operatorname{sign} Y(\alpha, \theta))^k = w_k(\alpha s, \alpha, \theta).$$

Таким образом,

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(k - \theta\alpha s)\right) \Gamma(1 - s)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(k - \alpha s)\right) \Gamma(1 - \alpha s)}, \quad k = 0, 1. \tag{5}$$

За более детальной информацией о свойствах случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ отсылаем читателя к монографии [3]. Основным результатом сформулируем в форме теоремы.

Теорема 2. Для любых фиксированных $-1 \leq \theta \leq 1$ и $y \in R^1$ асимптотическое разложение функции распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \neq 0$ имеет вид

$$F(y, \alpha, \theta) = \frac{1}{2}(1 - \theta) + \frac{1}{2}(\operatorname{sign} y + \theta)e^{-\frac{1}{|y|}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{|y|}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) \operatorname{sign} y + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_n(|y|) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta), \tag{6}$$

где для остаточного члена $R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta)$ справедлива оценка

$$R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta) \leq R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) e^{-\frac{1}{|y|}} \bar{P}_{N+1}(|y|) + o\left(\alpha^{N+1}\right). \tag{7}$$

Здесь

$$C_n^{(k)}(\theta) = Y_n \left(a_1^{(k)}(\theta), a_2^{(k)}(\theta), \dots, a_n^{(k)}(\theta) \right), \quad k = 0, 1, \tag{8}$$

$$a_n^{(k)}(\theta) = \begin{cases} -\mathbb{C}, & n = 1, \\ \frac{1}{n}(2^n - 1)^{1-k} \pi^n (1 - \theta^n) |B_n| - (n-1)! \zeta(n), & n \geq 2, \end{cases} \tag{9}$$

$$\bar{C}_n^{(k)}(\theta) = Y_n \left(\bar{a}_1^{(k)}(\theta), \bar{a}_2^{(k)}(\theta), \dots, \bar{a}_n^{(k)}(\theta) \right), \quad k = 0, 1, \tag{10}$$

$$\bar{a}_n^{(k)}(\theta) = \begin{cases} \mathbb{C}, & n = 1, \\ \frac{1}{n}(2^n - 1)^{1-k} \pi^n (1 - \theta^n) |B_n| + (n-1)! \zeta(n), & n \geq 2, \end{cases} \tag{11}$$

где $\mathbb{C} = 0.577 \dots$ – постоянная Эйлера, B_n – числа Бернуллы, $\zeta(n)$ – Дзета-функция Римана, $Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – полные полиномы Белла, $P_n(y)$ и $\bar{P}_n(y)$ – полиномы, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$P_{n+1}(y) = -\frac{1}{y} P_n(y) - y P_n'(y), \quad P_0(y) = 1, \tag{12}$$

$$\bar{P}_{n+1}(y) = \frac{1}{y} \bar{P}_n(y) - y \bar{P}_n'(y), \quad \bar{P}_0(y) = 1 \tag{13}$$

и в явном виде определяются формулами

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^n S(n, k) \left(-\frac{1}{y} \right)^k, \quad \bar{P}_n(y) = \sum_{k=0}^n S(n, k) \left(\frac{1}{y} \right)^k, \tag{14}$$

где $S(n, k)$ – числа Стирлинга второго рода, $S(n, 0) = \delta_{n0}$, δ_{nm} – символ Кронекера, $n = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Запишем в явном виде элементы характеристического преобразования (5)

$$w_0^Z(s, \alpha, \theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\theta s\right) \Gamma(1-s)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha s\right) \Gamma(1-\alpha s)}, \quad (15)$$

$$w_1^Z(s, \alpha, \theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\theta s\right) \Gamma(1-s)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha s\right) \Gamma(1-\alpha s)}. \quad (16)$$

Представим их в виде

$$\begin{aligned} w_0^Z(s, \alpha, \theta) &= \Gamma(1-s) \exp\left\{\ln \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\theta s\right) - \ln \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha s\right) - \ln \Gamma(1-\alpha s)\right\}, \\ w_1^Z(s, \alpha, \theta) &= \Gamma(1-s) \exp\left\{\ln \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\theta s\right) - \ln \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha s\right) - \ln \Gamma(1-\alpha s)\right\}. \end{aligned}$$

Используя теперь известные разложения в ряд $\ln \cos(x)$, $\ln \sin(x)$ и $\ln \Gamma(1+z)$ (см. [9], 1.518, 8.342.1), а также свойства чисел Бернулли

$$B_{2l} = -(-1)^l |B_{2l}|, \quad B_{2l+1} = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

функции $w_k^Z(s, \alpha, \theta)$ можно представить в виде

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s) \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}(\theta) \frac{(\alpha s)^n}{n!}\right\}, \quad k = 0, 1, \quad (18)$$

где коэффициенты $a_n^{(k)}(\theta)$ определяются выражением (9).

Вычисляя (15) и (16) при $\alpha \rightarrow 0$, и используя для $w_1^Z(s, \alpha, \theta)$ правило Лопитала, получаем

$$w_k^Z(s, 0, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s), \quad k = 0, 1. \quad (19)$$

Представим теперь (18) в виде $w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s) H(h^{(k)}(\alpha))$, где

$$H(h) = e^h, \quad h \equiv h^{(k)}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}(\theta) s^n \frac{\alpha^n}{n!}. \quad (20)$$

Разложим теперь $w_k^Z(s, \alpha, \theta)$ в ряд Тейлора по параметру α при $\alpha \rightarrow 0$. Используя (19), получаем

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s) \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{d^n H(h^{(k)}(\alpha))}{d\alpha^n} \Big|_{\alpha=0} \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta)\right), \quad k = 0, 1. \quad (21)$$

Здесь

$$R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta) = \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \frac{d^{N+1} H(h^{(k)}(\alpha'))}{d\alpha'^{N+1}} \Big|_{\alpha'=\zeta\alpha} \quad (22)$$

остаточный член разложения в форме Лагранжа и $0 < \zeta < 1$.

Рассмотрим в начале N -ю частичную сумму. Используя формулу Фаа-ди-Бруно, получаем

$$\frac{d^n H(h^{(k)}(\alpha))}{d\alpha^n} = \sum_{m=1}^n H^{(m)}(h) B_{n,m}(h_1, h_2, \dots, h_{n-m+1}),$$

где $B_{n,m}(h_1, h_2, \dots, h_{n-m+1}) = \sum \frac{n!}{l_1! l_2! \dots} \frac{h_1^{l_1}}{(1!)^{l_1}} \frac{h_2^{l_2}}{(2!)^{l_2}} \dots$ – частичные полиномы Белла. Суммирование ведется по всем $l_1, l_2, l_3, \dots \geq 0$ таким, что $l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \dots = n$, $l_1 + l_2 + l_3 + \dots = m$. За более подробной информацией отсылаем читателя к книгам [10, 11].

$$H^{(m)}(h) = \frac{d^m H(h)}{dh^m} = e^{h^{(k)}(\alpha)}, \quad h_m = \frac{d^m h^{(k)}(\alpha)}{d\alpha^m} = s^m \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+m}^{(k)}(\theta) \frac{\alpha^i}{i!}. \quad (23)$$

В точке $\alpha = 0$ имеем $H^{(m)}(h)|_{\alpha=0} = 1$, $h_m|_{\alpha=0} = s^m a_m^{(k)}(\theta)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d^n H(h^{(k)}(\alpha))}{d\alpha^n} \Big|_{\alpha=0} &= \sum_{m=1}^n B_{n,m} \left(s a_1^{(k)}(\theta), s^2 a_2^{(k)}(\theta), \dots, s^{n-m+1} a_{n-m+1}^{(k)}(\theta) \right) \\ &= s^n Y_n \left(a_1^{(k)}(\theta), a_2^{(k)}(\theta), \dots, a_{n-m+1}^{(k)}(\theta) \right) = s^n C_n^{(k)}(\theta), \quad (24) \end{aligned}$$

где использованы свойства полиномов Белла

$$B_{n,m}(abx_1, ab^2x_2, \dots, ab^{n-m+1}x_{n-m+1}) = a^m b^n B_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_{n-m+1}), \quad (25)$$

$$Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m=1}^n B_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_{n-m+1}), \quad (26)$$

и введено обозначение $C_n^{(k)}(\theta) = Y_n(a_1^{(k)}(\theta), a_2^{(k)}(\theta), \dots, a_n^{(k)}(\theta))$. Здесь $Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – полные полиномы Белла.

Используя теперь (24) в разложении (21), получим

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s) \left(1 + \sum_{n=1}^N C_n^{(k)}(\theta) \frac{(s\alpha)^n}{n!} + R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta) \right), \quad k = 0, 1. \quad (27)$$

Воспользуемся теперь формулами (2) и (3). Из этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} m^Z(s, \alpha, \theta) &= \frac{1}{2}(w_0^Z(s, \alpha, \theta) + w_1^Z(s, \alpha, \theta)), \\ m^Z(s, \alpha, -\theta) &= \frac{1}{2}(w_0^Z(s, \alpha, \theta) - w_1^Z(s, \alpha, \theta)). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $m^Z(s, \alpha, \theta)$ обозначает преобразование Меллина плотности вероятности случайной величины $Z(\alpha, \theta)$. Используя разложение (27), получим

$$w_0^Z(s, \alpha, \theta) + w_1^Z(s, \alpha, \theta) = \Gamma(1-s)(1+\theta) + \sum_{n=1}^N (C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta)) s^n \Gamma(1-s) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta), \quad (29)$$

где

$$R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta) = \Gamma(1-s) (R_{N+1}^{(0)}(s, \alpha, \theta) + \theta R_{N+1}^{(1)}(s, \alpha, \theta)). \quad (30)$$

Рассмотрим множитель $s^n \Gamma(1-s)$, входящий в это выражение. В случае $n = 0$, используя определение Гамма-функции и делая замену переменной интегрирования $x = 1/y$, получим

$$\Gamma(1-s) = \int_0^\infty x^{-s} e^{-x} dx = \int_0^\infty y^s d \left[e^{-\frac{1}{y}} \right] = \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_0(y) e^{-\frac{1}{y}} \right],$$

где $\hat{P}_0(y) \equiv 1$ – некоторый полином нулевого порядка.

Рассмотрим теперь случай $n = 1$. Используя предыдущее выражение, получаем

$$\begin{aligned} s\Gamma(1-s) &= s \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_0(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] = s \int_0^\infty y y^{s-1} \left(\hat{P}_0'(y) + \frac{1}{y^2} \hat{P}_0(y) \right) e^{-\frac{1}{y}} dy \\ &= s \int_0^\infty y^{s-1} \hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}} dy = y^s \hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\hat{P}_1(y) = y\hat{P}_0'(y) + \frac{1}{y}\hat{P}_0(y)$ – полином первого порядка. Используя это соотношение, нетрудно получить, что $\hat{P}_1(y) = \frac{1}{y}$. Далее было выполнено интегрирование по частям, в котором $dv = sy^{s-1} dy$ и $u = \hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}}$. Принимая во внимание, что $-1 < \Re s < \alpha$, и предполагая $\alpha < 1$, видно, что первое слагаемое в последнем выражении будет равно нулю. Таким образом,

$$s\Gamma(1-s) = - \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}} \right].$$

Продолжая аналогичным образом, можно показать, что в случае произвольного n справедливо выражение

$$s^n \Gamma(1-s) = (-1)^n \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right],$$

где полиномы $\hat{P}_n(y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $\hat{P}_n(y) = y\hat{P}_{n-1}'(y) + \frac{1}{y}\hat{P}_{n-1}(y)$, $\hat{P}_0(y) \equiv 1$. Для удобства дальнейшего изложения введем полиномы $P_n(y)$ следующим образом: $P_n(y) = (-1)^n \hat{P}_n(y)$, $P_0(y) \equiv 1$. Нетрудно показать, что полиномы $P_n(y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (12). В результате

$$s^n \Gamma(1-s) = \int_0^\infty y^s d \left[P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right]. \quad (31)$$

Несложно проверить, что производящая функция полиномов $P_n(y)$ равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(y) \frac{t^n}{n!} = \exp \left\{ -\frac{1}{y} (e^t - 1) \right\}.$$

Сравнивая теперь эту производящую функцию с производящей функцией чисел Стирлинга второго рода $S(n, k)$ [11, 12]

$$\exp \{x(e^t - 1)\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n S(n, k) x^k \frac{t^n}{n!},$$

видим, что явный вид полинома $P_n(y)$ определяется первой формулой в (14).

Используя теперь (29) и (31) в выражении (28), мы получим

$$m^Z(s, \alpha, \theta) = \frac{1+\theta}{2} \int_0^{\infty} y^s d \left[P_0(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{\infty} y^s d \left[P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] + \frac{1}{2} R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta). \quad (32)$$

Рассмотрим теперь остаточный член $R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta)$, определяемый формулой (30). Принимая во внимание (22), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(1-s) \theta^k R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta) &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left| \theta^k \Gamma(1-s) \frac{d^{N+1} H(h^{(k)}(\alpha'))}{d\alpha'^{N+1}} \right|_{\alpha'=\zeta\alpha} = \\ &= \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left| \theta^k \Gamma(1-s) \sum_{m=1}^{N+1} H^{(m)}(h) B_{N+1,m}(h_1, h_2, \dots, h_{N+1-m+1}) \right|_{\alpha'=\zeta\alpha} \leq \\ &= \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} |\theta|^k \left(\sum_{m=1}^{N+1} |H^{(m)}(h)| \left| \Gamma(1-s) B_{N+1,m}(h_1, h_2, \dots, h_{N+1-m+1}) \right| \right)_{\alpha'=\zeta\alpha}. \quad (33) \end{aligned}$$

Оценим множители, стоящие под знаком суммы. Используя (23), (20) и принимая во внимание то, что $0 < \zeta \leq 1$ и $\alpha \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} |H^{(m)}(h)|_{\alpha'=\zeta\alpha} &= \left| \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}(\theta) s^n \frac{\alpha'^n}{n!} \right\} \right|_{\alpha'=\zeta\alpha} \leq \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(k)}(\theta)| \left| s^n \frac{(\zeta\alpha)^n}{n!} \right| \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(k)}(\theta)| \left| \frac{(s\alpha)^n}{n!} \right| \right\} = \exp \left\{ |a_1^{(k)}(\theta)| |s\alpha| + o(\alpha) \right\} = 1 + o(1). \end{aligned}$$

Здесь, в последнем неравенстве мы предположили, что $\zeta = 1$.

Далее, используя (23) и принимая во внимание, что $\alpha \rightarrow 0$, получаем

$$h_m |_{\alpha'=\zeta\alpha} = s^m \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+m}^{(k)}(\theta) \frac{(\zeta\alpha)^i}{i!} = s^m \left(a_m^{(k)}(\theta) + o(1) \right).$$

Используя этот результат, а также свойство (25) для частичных полиномов Белла, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(1-s) B_{N+1,m}(h_1, h_2, \dots, h_{N+1-m+1}) \right|_{\alpha'=\zeta\alpha} \\ &= \left| \Gamma(1-s) B_{N+1,m} \left(s \left(a_1^{(k)}(\theta) + o(1) \right), s^2 \left(a_2^{(k)}(\theta) + o(1) \right), \dots, s^{N+2-m} \left(a_{N+2-m}^{(k)}(\theta) + o(1) \right) \right) \right| \\ &= \left| s^{N+1} \Gamma(1-s) \left(B_{N+1,m} \left(a_1^{(k)}(\theta), a_2^{(k)}(\theta), \dots, a_{N+2-m}^{(k)}(\theta) \right) + o(1) \right) \right| \leq \\ &\leq |s^{N+1} \Gamma(1-s)| \left(B_{N+1,m} \left(|a_1^{(k)}(\theta)|, |a_2^{(k)}(\theta)|, \dots, |a_{N+2-m}^{(k)}(\theta)| \right) + o(1) \right) \\ &\leq |s^{N+1} \Gamma(1-s)| \left(B_{N+1,m} \left(\bar{a}_1^{(k)}(\theta), \bar{a}_2^{(k)}(\theta), \dots, \bar{a}_{N+2-m}^{(k)}(\theta) \right) + o(1) \right). \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение $B_{n,m}(x_1 + o(1), \dots, x_{n-1+m} + o(1)) = B_{n,m}(x_1, \dots, x_{n-1+m}) + o(1)$, которое легко получить из определения частичных полиномов Белла. Коэффициенты $\bar{a}_n^{(k)}(\theta)$ определяются

выражением (11). Используя (9), несложно показать, что коэффициенты $\bar{a}_n^{(k)}(\theta)$ удовлетворяют неравенству $|\bar{a}_n^{(k)}(\theta)| \leq \bar{a}_n^{(k)}(\theta)$.

Используя теперь полученные выше оценки в (33), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(1-s)\theta^k R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta) &\leq \frac{\alpha^{N+1}|\theta|^k}{(N+1)!} |\Gamma(1-s)s^{N+1}| \sum_{m=1}^{N+1} \left(B_{N+1,m} \left(\bar{a}_1^{(k)}(\theta), \dots, \bar{a}_{N+2-m}^{(k)}(\theta) \right) + o(1) \right) \\ &= \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} |\theta|^k |\Gamma(1-s)s^{N+1}| \left(\bar{C}_{N+1}^{(k)}(\theta) + o(1) \right). \end{aligned}$$

Здесь использовано свойство (26) и введено обозначение $\bar{C}_n^{(k)}(\theta) = Y_n \left(\bar{a}_1^{(k)}(\theta), \bar{a}_2^{(k)}(\theta), \dots, \bar{a}_n^{(k)}(\theta) \right)$.

Учитывая полученную оценку, а также соотношение (31) для остаточного члена $R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta)$, справедлива оценка

$$R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta) \leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \left| \int_0^\infty y^s d \left[P_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] \right| + o\left(\alpha^{N+1}\right).$$

Вернемся теперь к выражению (32). В левой части этого равенства стоит преобразование Меллина плотности $f(y, \alpha, \theta)$. Согласно определению

$$m^Z(s, \alpha, \theta) = \int_0^\infty y^s f(y, \alpha, \theta) dy.$$

Следует отметить, что при работе с устойчивыми законами вместо общепринятого ядра y^{s-1} в преобразовании Меллина более удобно использовать ядро y^s . Именно для такого вида ядра в [3] доказана теорема 1. Из этой формулы видно, что преобразование Меллина определено только для положительной части плотности $f(y, \alpha, \theta)$, т. е. для $y > 0$. Таким образом,

$$m^Z(s, \alpha, \theta) = \int_0^\infty y^s f(y, \alpha, \theta) dy = \int_0^\infty y^s dF_{(+)}(y, \alpha, \theta) = \int_0^\infty y^s d [F(y, \alpha, \theta) - F(0, \alpha, \theta)].$$

Здесь $F(y, \alpha, \theta)$ – функция распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$, $F_{(+)}(y, \alpha, \theta)$ – функция распределения положительной части распределения и $F(0, \alpha, \theta)$ – значение функции распределения в нуле. Таким образом, выражение (32) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^s d [F(y, \alpha, \theta) - F(0, \alpha, \theta)] &= \frac{1+\theta}{2} \int_0^\infty y^s d \left[P_0(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^\infty y^s d \left[P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] + \frac{1}{2} R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta). \end{aligned}$$

Выполняя теперь формально обратное преобразование Меллина этого выражения, получаем

$$\begin{aligned} F(y, \alpha, \theta) &= F(0, \alpha, \theta) + \frac{1+\theta}{2} P_0(y) e^{-\frac{1}{y}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} + \frac{1}{2} R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta), \quad y > 0, \quad (34) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta) &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) |P_{N+1}(y)| e^{-\frac{1}{y}} + o\left(\alpha^{N+1}\right) \\ &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \bar{P}_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} + o\left(\alpha^{N+1}\right) \equiv \mathbb{R}_{N+1}^F(y, \alpha, \theta), \quad y > 0. \quad (35) \end{aligned}$$

Используя явное выражение для полиномов $P_n(y)$, несложно показать, что для $|P_n(y)|$ справедлива оценка

$$|P_n(y)| = \left| \sum_{k=0}^n S(n, k) \left(-\frac{1}{y} \right)^k \right| \leq \sum_{k=0}^n S(n, k) \left(\frac{1}{y} \right)^k = \bar{P}_n(y),$$

где $S(n, 0) = \delta_{n0}$, δ_{n0} – символ Кронекера, $n = 0, 1, 2, \dots$, $y > 0$. Таким образом, явный вид полиномов $\bar{P}_n(y)$ определяется второй формулой в (14). Несложно показать, что полиномы $\bar{P}_n(y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (13).

Разложение функции распределения, полученное выше, справедливо только для $y > 0$. Для получения разложения при $y < 0$ воспользуемся свойством инверсии

$$F(-y, \alpha, \theta) = 1 - F(y, \alpha, -\theta), \quad y > 0. \quad (36)$$

Справедливость этого свойства непосредственно вытекает из определения (4). Как из него видно, случайная величина $Z(\alpha, \theta)$ является масштабным преобразованием случайной величины $Y(\alpha, \theta)$. При таком преобразовании сохраняются свойства симметрии устойчивой случайной величины относительно точки $y = 0$. Одним из таких свойств является свойство инверсии, которое для функции распределения устойчивого закона $G(x, \alpha, \theta)$ имеет вид $G(-x, \alpha, \theta) = 1 - G(x, \alpha, -\theta)$ (см., например, [3, 1]). Следовательно, будет справедливо и свойство (36). Также сразу получим значение $F(0, \alpha, \theta)$

$$\begin{aligned} F(0, \alpha, \theta) &= P\{Z(\alpha, \theta) \leq 0\} = P\{|Y(\alpha, \theta)|^\alpha \operatorname{sign} Y(\alpha, \theta) \leq 0\} = \\ &= P\{\operatorname{sign} Y(\alpha, \theta) = -1\} = P\{Y(\alpha, \theta) \leq 0\} = G(0, \alpha, \theta) = \frac{1 - \theta}{2}. \end{aligned}$$

Используя теперь свойство инверсии (36) и (34), (35), для отрицательной части $F(y, \alpha, \theta)$ получаем

$$\begin{aligned} F(-y, \alpha, \theta) &= 1 - F(0, \alpha, -\theta) - \frac{1 - \theta}{2} e^{-\frac{1}{y}} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(-\theta) - \theta C_n^{(1)}(-\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} - \frac{1}{2} R_{N+1}^F(y, \alpha, -\theta), \quad y > 0, \end{aligned}$$

$$R_{N+1}^F(y, \alpha, -\theta) \leq R_{N+1}^F(y, \alpha, -\theta) = \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(-\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(-\theta) \right) \bar{P}_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} + o\left(\alpha^{N+1}\right), \quad y > 0.$$

Принимая во внимание свойство чисел Бернулли (17), а также определение коэффициентов $a_n^{(k)}(\theta)$ (9), легко увидеть, что параметр θ входит в коэффициенты разложения $C_n^{(k)}(\theta)$ только с четными степенями. Следовательно, $C_n^{(k)}(\theta)$ являются четными функциями параметра θ и $C_n^{(k)}(-\theta) = C_n^{(k)}(\theta)$. Аналогично, для коэффициентов $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ получаем $\bar{C}_n^{(k)}(-\theta) = \bar{C}_n^{(k)}(\theta)$. Таким образом, отрицательная часть $F(y, \alpha, \theta)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} F(y, \alpha, \theta) &= \frac{1 - \theta}{2} + \frac{-1 + \theta}{2} e^{\frac{1}{y}} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) - \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_n(-y) e^{\frac{1}{y}} - \frac{1}{2} R_{N+1}^F(-y, \alpha, \theta), \quad y < 0. \quad (37) \end{aligned}$$

Объединяя теперь (34) и (37), получаем разложение (6), в котором для остаточного члена справедлива оценка (7). Теорема доказана.

Зная выражение для функции распределения, можно получить выражение для плотности вероятности. Сформулируем результат в виде следствия к теореме 2.

Следствие 1. Для любых фиксированных $-1 \leq \theta \leq 1$ и $y \in \mathbb{R}^1$ асимптотическое разложение плотности вероятности $f(y, \alpha, \theta)$ случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \neq 0$ имеет вид

$$f(y, \alpha, \theta) = \frac{e^{-\frac{1}{|y|}}}{2|y|} \left(\frac{(1 + \theta \operatorname{sign} y)}{|y|} - \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \operatorname{sign} y \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_{n+1}(|y|) \right) + R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta), \quad (38)$$

где для остаточного члена $R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta)$ справедлива оценка

$$R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta) \leq R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta) = \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{e^{-\frac{1}{|y|}}}{2|y|} \bar{P}_{N+2}(|y|) + o\left(\alpha^{N+1}\right). \quad (39)$$

Здесь коэффициенты $C_n^{(k)}(\theta)$ и $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ определяются формулами (8) и (10) соответственно. Полиномы $P_n(y)$ и $\bar{P}_n(y)$ определяются формулами (14) и удовлетворяют рекуррентным соотношениям (12) и (13).

Доказательство. Для получения асимптотического разложения плотности вероятности $f(y, \alpha, \theta)$ воспользуемся выражением (34), определяющим разложение функции распределения для $y > 0$. В результате

$$\begin{aligned} f(y, \alpha, \theta) &= \frac{dF(y, \alpha, \theta)}{dy} = \frac{(1 + \theta)}{2y^2} e^{-\frac{1}{y}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d}{dy} \left(P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dy} R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta), \quad y > 0. \quad (40) \end{aligned}$$

Из рекуррентного выражения (12) получаем

$$\frac{d}{dy} \left(P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right) = -\frac{1}{y} \left(-\frac{1}{y} P_n(y) - y P_n'(y) \right) e^{-\frac{1}{y}} = -\frac{1}{y} P_{n+1}(y) e^{-\frac{1}{y}}. \quad (41)$$

Для оценки остаточного члена понадобится следующая оценка производной:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left| P_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} \right| &= e^{-\frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y^2} |P_{N+1}(y)| + P_{N+1}'(y) \operatorname{sign}(P_{N+1}(y)) \right) = \\ &= -\frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \operatorname{sign}(P_{N+1}(y)) \left(-\frac{1}{y} P_{N+1}(y) - y P_{N+1}'(y) \right) = -\frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \operatorname{sign}(P_{N+1}(y)) P_{N+2}(y) \leq \\ &\leq \left| -\frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \operatorname{sign}(P_{N+1}(y)) P_{N+2}(y) \right| \leq \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} |P_{N+2}(y)| \leq \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \bar{P}_{N+2}(y). \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что $y > 0$ и была использована формула производной модуля функции. Используя теперь эту оценку в первом неравенстве в (35), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta) &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{d}{dy} \left| P_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} \right| + o\left(\alpha^{N+1}\right) \leq \\ &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \bar{P}_{N+2}(y) + o\left(\alpha^{N+1}\right). \quad (42) \end{aligned}$$

Используя теперь (41) и (42) в (40), получаем разложение плотности вероятности для $y > 0$

$$f(y, \alpha, \theta) = \frac{(1+\theta)}{2y^2} e^{-\frac{1}{y}} - \frac{1}{2y} e^{-\frac{1}{y}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_{n+1}(y) + R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta), \quad y > 0, \quad (43)$$

$$R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta) \leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{1}{2y} e^{-\frac{1}{y}} \bar{P}_{N+1}(y) + o\left(\alpha^{N+1}\right) \equiv \mathbb{R}_{N+1}^f(y, \alpha, \theta). \quad (44)$$

Для получения выражения при $y < 0$ воспользуемся свойством инверсии. Для плотности вероятности оно имеет вид $f(-y, \alpha, \theta) = f(y, \alpha, -\theta)$. Так как коэффициенты $C_n^{(k)}(\theta)$ и $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ являются четными функциями θ , получаем

$$f(y, \alpha, \theta) = \frac{(1-\theta)}{2(-y)^2} e^{\frac{1}{y}} - \frac{e^{\frac{1}{y}}}{2(-y)} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) - \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_{n+1}(-y) + R_{N+1}^f(-y, \alpha, -\theta), \quad y < 0. \quad (45)$$

Объединяя теперь формулы (43) и (45), приходим к выражению (38), которое справедливо для $y \in \mathbb{R}^1$ и $\alpha \rightarrow 0$. Для остаточного члена оказывается справедлива оценка (39). Следствие доказано.

4. Разложение $g(y, \alpha, \theta)$ и $G(y, \alpha, \theta)$ в случае $\alpha \rightarrow 0$. Зная разложения плотности вероятности и функции распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$, можно получить асимптотические разложения соответствующих величин для устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$. Сформулируем результат в форме следствия.

Следствие 2. Для любых фиксированных $-1 \leq \theta \leq 1$ и $y \in \mathbb{R}^1$ асимптотические разложения плотности вероятности $g(y, \alpha, \theta)$ и функции распределения $G(y, \alpha, \theta)$ устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \neq 0$ с характеристической функцией (1) имеют вид

$$\begin{aligned} G(y, \alpha, \theta) &= \frac{1}{2}(1-\theta) + \frac{1}{2}(\operatorname{sign} y + \theta) e^{-|y|^{-\alpha}} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-|y|^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) \operatorname{sign} y + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_n(|y|^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta), \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(y, \alpha, \theta) &= \frac{\alpha}{2} (1 + \theta \operatorname{sign} y) |y|^{-\alpha-1} e^{-|y|^{-\alpha}} - \\ &\quad - \frac{\alpha}{2|y|} e^{-|y|^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \operatorname{sign} y \right) P_{n+1}(|y|^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta), \quad (47) \end{aligned}$$

где для остаточных членов $R_{N+1}^G(x, \alpha, \theta)$ и $R_{N+1}^g(x, \alpha, \theta)$ справедливы оценки

$$R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta) \leq \mathbb{R}_{N+1}^G(y, \alpha, \theta) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) e^{-|y|^{-\alpha}} \bar{P}_{N+1}(|y|^\alpha) + o\left(\alpha^{N+1}\right), \quad (48)$$

$$R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta) \leq \mathbb{R}_{N+1}^g(y, \alpha, \theta) = \frac{\alpha^{N+2}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{e^{-|y|^{-\alpha}}}{2|y|} \bar{P}_{N+2}(|y|^\alpha) + o\left(\alpha^{N+2}\right). \quad (49)$$

Здесь коэффициенты $C_n^{(k)}(\theta)$ и $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ определяются выражениями (8) и (10), а полиномы $P_n(y)$ и $\bar{P}_n(y)$ определяются формулами (14) и удовлетворяют рекуррентным соотношениям (12) и (13) соответственно. **Доказательство.** Получим разложение для функции распределения. Для этого понадобится определение (4) случайной $Z(\alpha, \theta)$. Согласно определению функции распределения, получаем

$$\begin{aligned} G(y, \alpha, \theta) &= P\{Y(\alpha, \theta) \leq y\} = P\{|Y(\alpha, \theta)|^\alpha \operatorname{sign}(Y(\alpha, \theta)) \leq |y|^\alpha \operatorname{sign} y\} = \\ &= P\{Z(\alpha, \theta) \leq |y|^\alpha \operatorname{sign} y\} = F(|y|^\alpha \operatorname{sign} y, \alpha, \theta). \end{aligned}$$

Используя теперь в этом выражении разложение (6) и оценку (7) для асимптотического разложения функции распределения устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$, получаем представление (46). А для оценки остаточного члена этого асимптотического разложения получаем оценку (48).

Получим теперь асимптотическое разложение для плотности вероятности $g(x, \alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Предположим что $y > 0$, получаем

$$g(y, \alpha, \theta) = \frac{d}{dy}G(y, \alpha, \theta) = \frac{d}{dy}F(y^\alpha, \alpha, \theta) = \alpha y^{\alpha-1} f(y^\alpha, \alpha, \theta),$$

где $f(t, \alpha, \theta)$ – плотность вероятности случайной величины $Z(\alpha, \theta)$. Используя теперь (43) после несложных преобразований приходим к асимптотическому выражению

$$\begin{aligned} g(y, \alpha, \theta) &= \frac{\alpha}{2}(1+\theta)y^{-\alpha-1}e^{-y^{-\alpha}} - \\ &- \frac{\alpha}{2y}e^{-y^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_{n+1}(y^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta), \quad y > 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Для получения оценки остаточного члена воспользуемся (44). В результате получаем

$$\begin{aligned} R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta) &= \alpha y^{\alpha-1} R_{N+1}^f(y^\alpha, \alpha, \theta) \\ &\leq \frac{\alpha^{N+2}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{1}{2y} e^{-y^{-\alpha}} \bar{P}_{N+2}(y^\alpha) \equiv R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta) + o(\alpha^{N+2}), \quad y > 0. \end{aligned}$$

Здесь $R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta)$ – остаточный член в разложении (43), для которого справедлива оценка (44).

Для получения разложения при отрицательных y воспользуемся свойством инверсии. Для плотности вероятности оно имеет вид $g(-y, \alpha, \theta) = g(y, \alpha, -\theta)$, $y > 0$. Используя (50) и учитывая, что коэффициенты $C_n^{(k)}(\theta)$ и $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ являются четными функциями θ , получаем

$$\begin{aligned} g(y, \alpha, \theta) &= \frac{\alpha}{2}(1-\theta)(-y)^{-\alpha-1}e^{-(-y)^{-\alpha}} - \\ &- \frac{\alpha}{2(-y)}e^{-(-y)^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) - \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_{n+1}((-y)^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^g(-y, \alpha, -\theta), \quad y < 0, \quad \alpha \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где для остаточного члена справедлива оценка

$$\begin{aligned} R_{N+1}^g(y, \alpha, -\theta) &\leq \frac{\alpha^{N+2}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{e^{-(-y)^{-\alpha}}}{2(-y)} \bar{P}_{N+2}((-y)^\alpha) + o(\alpha^{N+2}) \\ &\equiv R_{N+1}^g(-y, \alpha, -\theta), \quad y < 0. \end{aligned}$$

Объединяя теперь формулы для случаев $y > 0$ и $y < 0$, получаем разложение (47), где для остаточного члена справедлива оценка (49). Следствие доказано.

Теорема 2 и следствие 1 определяют асимптотическое разложение плотности вероятности и функции распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ по параметру α при $\alpha \rightarrow 0$. Из разложений (6) и (38) видно, что в предельном случае $\alpha \rightarrow 0$ функция распределения и плотность вероятности случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ имеют вид

$$F(y, 0, \theta) = \frac{1}{2}(1-\theta) + \frac{1}{2}(\operatorname{sign} y + \theta)e^{-1/|y|}, \quad f(y, 0, \theta) = (1 + \theta \operatorname{sign} y) \frac{e^{-1/|y|}}{2y^2}.$$

Это распределение является непрерывным по y и имеет устранимую особенность в точке $y = 0$: $\lim_{y \rightarrow 0} F(y, 0, \theta) = (1-\theta)/2$ и $\lim_{y \rightarrow 0} f(y, 0, \theta) = 0$. Несложно показать, что это распределение соответствует распределению случайной величины $U(\theta)/E$, где E – экспоненциально распределенная случайная величина со средним значением равным единице, а $U(\theta)$ – случайная величина, принимающая значения

± 1 с вероятностями $(1 \pm \theta)/2$ и E и $U(\theta)$ независимые случайные величины. Таким образом, $Z(\alpha, \theta) \xrightarrow{d} U(\theta)/E$ при $\alpha \rightarrow 0$. Доказательство этого результата можно найти в [3, 6].

При переходе к устойчивым законам эти слагаемые приводят к главным асимптотическим членам разложения функции распределения и плотности вероятности при $\alpha \rightarrow 0$. Как видно из (46) и (47), они имеют вид

$$G(y, \alpha, \theta) \equiv G_0(y, \alpha, \theta) = \frac{1}{2}(1 - \theta) + \frac{1}{2}(\text{sign } y + \theta)e^{-|y|^{-\alpha}}, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (51)$$

$$g(y, \alpha, \theta) \equiv g_0(y, \alpha, \theta) = (1 + \theta \text{sign } y) \frac{\alpha e^{-|y|^{-\alpha}}}{2|y|^{\alpha+1}}, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (52)$$

и имеют особенность при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$. Выражение $G_0(y, \alpha, \theta)$ в пределе $\alpha \rightarrow 0$ в точке $y = 0$ имеет скачок величиной e^{-1} . Таким образом, при $\alpha \rightarrow 0$ главный асимптотический член разложения функции распределения устойчивого закона $G_0(y, \alpha, \theta)$ принимает вид ступенчатой функции с разрывом в точке $y = 0$, что соответствует вырожденному распределению в этой точке. Соответствующим образом ведет себя и главный асимптотический член разложения плотности вероятности $g_0(y, \alpha, \theta)$. Как видно, в выражение (52) входят два множителя $e^{-|y|^{-\alpha}}$ и $|y|^{-\alpha-1}$. В случае $\alpha \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$ экспоненциальный множитель убывает к нулю значительно медленнее, чем растет множитель $|y|^{-\alpha-1}$. В результате при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ в этом выражении доминирующую роль играет множитель $|y|^{-\alpha-1}$ и, следовательно, $g_0(y, \alpha, \theta)$ растет как $1/|y|$. Такое поведение можно интерпретировать как вырожденное распределение в точке $y = 0$. Таким образом, главные асимптотические члены разложения функции распределения $G_0(y, \alpha, \theta)$ и плотности вероятности $g_0(y, \alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$ стремятся к вырожденному распределению в точке $y = 0$, что полностью соответствует свойствам устойчивых законов. Формулы (51) и (52) позволяют оценить функцию распределения и плотность вероятности устойчивых законов в случае $\alpha \rightarrow 0$, когда интегральные представления этих величин уже не позволяют их вычислить. Учет последующих членов разложения позволяет улучшить точность вычислений этих величин. Следует отметить, что приведенные формулы для главных асимптотических членов не являются новыми и были ранее получены в работах [7, 3, 4, 5, 6].

В самом начале мы условились рассматривать стандартные устойчивые законы, т. е. устойчивые законы в случае $\lambda = 1$. Однако используя известные свойства устойчивых законов, можно без особых трудностей получить устойчивый закон для произвольного $\lambda > 0$. В случае функции распределения и плотности вероятности переход от стандартного устойчивого закона к устойчивому закону с произвольным λ осуществляется при помощи формул

$$G(y, \alpha, \theta, \lambda) = G(y\lambda^{-1/\alpha}, \alpha, \theta), \quad g(y, \alpha, \theta, \lambda) = \lambda^{-1/\alpha} g(y\lambda^{-1/\alpha}, \alpha, \theta).$$

Более детальную информацию об этих свойствах можно найти в работах [1, 3] (см. замечание 5 и 7 в [1], и свойство 2.1 в [3]).

5. Уравнение для порогового параметра. Разложения из следствия 2 позволяют вычислять функцию распределения и плотность вероятности устойчивых законов, а оценки для остаточных членов позволяют получить критерий применимости этих разложений. Представим разложения (46) и (47) в виде

$$G(y, \alpha, \theta) = G_N(y, \alpha, \theta) + R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta), \quad g(y, \alpha, \theta) = g_N(y, \alpha, \theta) + R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta),$$

где

$$G_N(y, \alpha, \theta) = G_0(y, \alpha, \theta) + \frac{1}{2}e^{-|y|^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) \text{sign } y + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_n(|y|^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!}, \quad (53)$$

$$g_N(y, \alpha, \theta) = g_0(y, \alpha, \theta) - \frac{\alpha}{2|y|} e^{-|y|^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \text{sign } y \right) P_{n+1}(|y|^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} \quad (54)$$

и $G_0(y, \alpha, \theta)$ и $g_0(y, \alpha, \theta)$ определяются формулами (51) и (52). Принимая во внимание неравенства (48) и (49) видно, что эти выражения удовлетворяют неравенствам $|G(y, \alpha, \theta) - G_N(y, \alpha, \theta)| \leq R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta)$ и $|g(y, \alpha, \theta) - g_N(y, \alpha, \theta)| \leq R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta)$. Если приравнять правую часть этих неравенств некоторому заданному ε , то получим выражение для абсолютной ошибки вычисления. Однако в данном случае более удобной оказывается относительная ошибка.

Для относительной ошибки имеем

$$\frac{|G(y, \alpha, \theta) - G_N(y, \alpha, \theta)|}{G(y, \alpha, \theta)} \leq \frac{R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta)}{G(y, \alpha, \theta)}, \quad (55)$$

$$\frac{|g(y, \alpha, \theta) - g_N(y, \alpha, \theta)|}{g(y, \alpha, \theta)} \leq \frac{R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta)}{g(y, \alpha, \theta)}. \quad (56)$$

Для удобства введем обозначения

$$\begin{aligned}\delta G_N(y, \alpha, \theta) &= \frac{|G(y, \alpha, \theta) - G_N(y, \alpha, \theta)|}{G(y, \alpha, \theta)}, & \Delta G_N(y, \alpha, \theta) &= \frac{\mathbb{R}_{N+1}^G(y, \alpha, \theta)}{G(y, \alpha, \theta)}, \\ \delta g_N(y, \alpha, \theta) &= \frac{|g(y, \alpha, \theta) - g_N(y, \alpha, \theta)|}{g(y, \alpha, \theta)}, & \Delta g_N(y, \alpha, \theta) &= \frac{\mathbb{R}_{N+1}^g(y, \alpha, \theta)}{g(y, \alpha, \theta)}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$ определяют относительную ошибку вычисления функции распределения и плотности вероятности при помощи разложений (53) и (54), а $\Delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\Delta g_N(y, \alpha, \theta)$ оценку соответствующей относительной ошибки.

Приравняем $\Delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\Delta g_N(y, \alpha, \theta)$ некоторому выбранному значению ε . Величину ε будем называть уровнем точности. В результате получим уравнения

$$\Delta G_N(y, \alpha, \theta) = \varepsilon, \quad \Delta g_N(y, \alpha, \theta) = \varepsilon. \quad (57)$$

Решая теперь каждое из этих уравнений относительно α при фиксированных y и θ , получим оценки значений пороговых параметров α_N^ε для относительной ошибки функции распределения и плотности вероятности. Отметим, что аналитически эти уравнения решить невозможно, поэтому необходимо использовать численные методы. Значение координаты y , при которой находится решение этих уравнений, будем обозначать y^ε . В результате справедливы неравенства

$$\delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta) \leq \varepsilon, \quad 0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon, \quad (58)$$

$$\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta) \leq \varepsilon, \quad 0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon. \quad (59)$$

Эти неравенства показывают, что в диапазоне значений $0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ относительная ошибка вычисления функции распределения и плотности вероятности устойчивого закона при помощи разложений (53) и (54) не превосходит величину ε .

6. Вычисление плотности вероятности и функции распределения устойчивых законов при $\alpha \rightarrow 0$. На рис. 1 и 2 представлены результаты вычисления функции распределения $G(y, \alpha, \theta)$ и плотности вероятности $g(y, \alpha, \theta)$ устойчивого закона и соответствующие относительные ошибки $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$ для $N = 0, 1, 2, 3$. На рис. 1а и 2а приведены результаты вычисления $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$ в зависимости от параметра α при фиксированных y и θ . На этих рисунках сплошные кривые – точные значения $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$, вычисленные при помощи интегральных представлений (см. [1, 3]), штриховые кривые – формулы (53) и (54) для указанных N . В качестве координаты y взято значение y^ε , для которого решались уравнения (57). Кружками на рисунках обозначены положения пороговых параметров α_N^ε , которые являются решениями уравнений (57) относительно параметра α при фиксированных y, θ и N . Решения искали для $N = 0, 1, 2, 3$ при значениях $y^\varepsilon = 2$ и $\theta = 0.2$ и значения уровня точности $\varepsilon = 0.1\%$. Для функции распределения получены значения пороговых параметров $\alpha_0^\varepsilon = 0.0049, \alpha_1^\varepsilon = 0.0521, \alpha_2^\varepsilon = 0.0991, \alpha_3^\varepsilon = 0.1397$, для плотности вероятности – $\alpha_0^\varepsilon = 8.665 \cdot 10^{-4}, \alpha_1^\varepsilon = 0.0194, \alpha_2^\varepsilon = 0.0476, \alpha_3^\varepsilon = 0.0770$. Видно, что при увеличении N значения α_N^ε увеличиваются. Следовательно, область допустимых значений параметра α , в которой справедливы неравенства (58) и (59), расширяется. Из рис. 1а также видно, что при увеличении N в формуле (53) соответствующие кривые приближаются к $G(y, \alpha, \theta)$. Такое же поведение характерно и для разложения плотности вероятности $g_N(y, \alpha, \theta)$, но масштаб рис. 2а такой, что все кривые сливаются.

Более детальную информацию о точности формул (53) и (54) позволяют получить соответствующие относительные ошибки. На рис. 1б и 2б представлены результаты вычисления относительных ошибок $\delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$, даваемые формулами (53) и (54) для значений $N = 0, 1, 2, 3$ при фиксированных y^ε и θ . Сплошные кривые – точное значение относительных ошибок $\delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – оценки относительных ошибок $\Delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$ и $\Delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$. Положение пороговых параметров α_N^ε обозначено кружками. Из рисунков видно, что для каждого N штриховые кривые расположены выше соответствующих сплошных кривых. Это значит, что при каждом N для всех $\alpha < 1$ выполняются неравенства (55) и (56), и, следовательно, и неравенства (58) и (59). При этом, чем больше N , тем больше α_N^ε . Таким образом, с увеличением N увеличивается область $0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ допустимых значений параметра α .

Некоторых пояснений требует отклонение от степенного закона убывания (прямолинейная зависимость в двойном логарифмическом масштабе) относительной ошибки $\delta G_3(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$ в случае $N = 3$ и $\alpha \lesssim 3 \cdot 10^{-3}$ на рис. 1б, а также «шумовой» характер поведения относительной ошибки $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$ при значениях $\alpha \lesssim 3 \cdot 10^{-3}$ на рис. 2б. Это является следствием того, что в формулы вычисления $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$ входят точные значения $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$, для вычисления которых используются соответствующие интегральные представления. Для вычисления интегралов в этих представлениях используется метод численного интегрирования. В результате, в указанном диапазоне значений параметра α , численный метод интегрирования достигает своего предела точности и при уменьшении значения

α оказывается неспособен вычислить $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$ с достаточной точностью. Результатом этого и является наблюдаемое поведение зависимостей $\delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$.

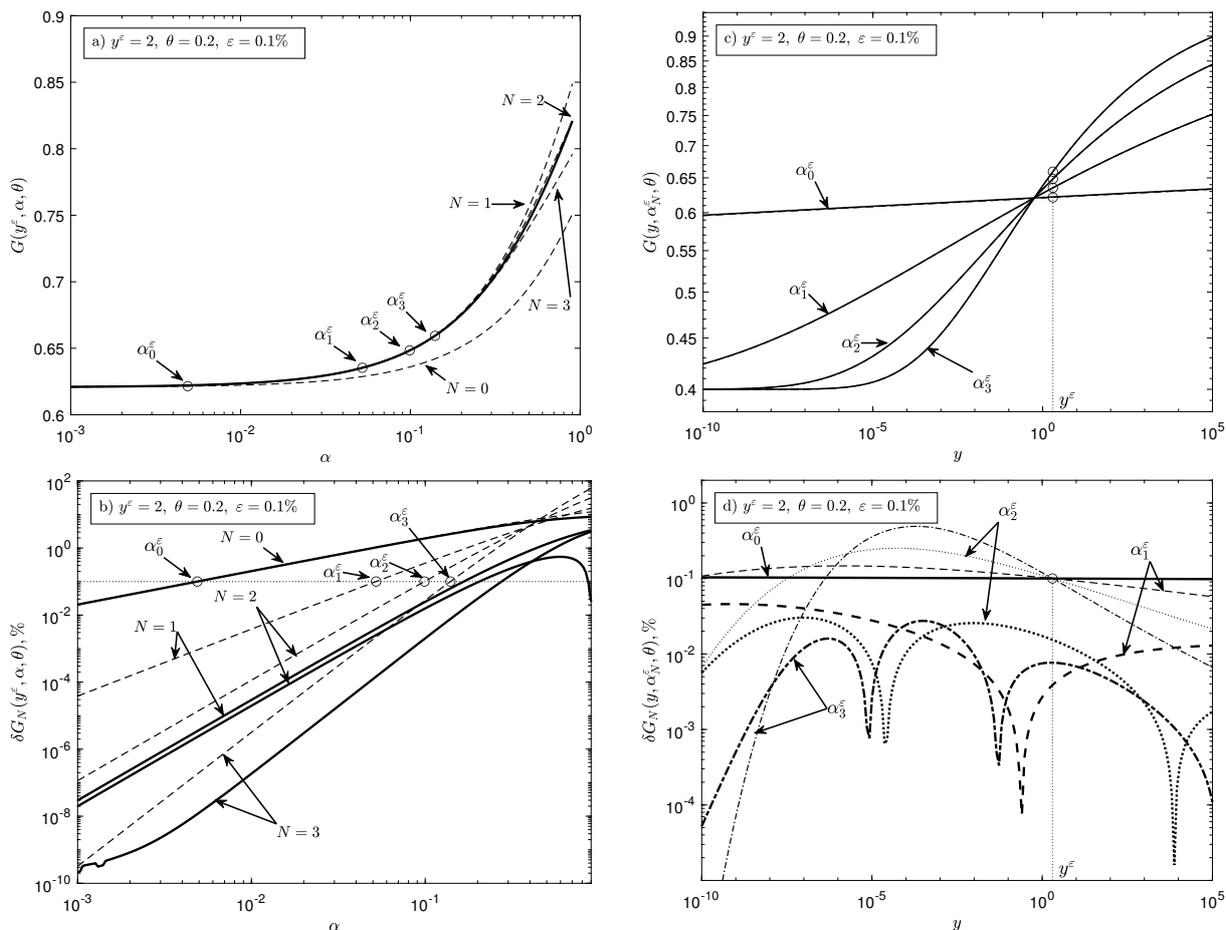


Рис. 1. Функция распределения $G(y, \alpha, \theta)$ и относительная ошибка $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$. а) Зависимость $G(y, \alpha, \theta)$ от α в точке $y = y^\varepsilon$. Сплошная кривая – функция распределения $G(y, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – формула (53) для указанных значений N . б) Относительная ошибка, выраженная в процентах, в зависимости от параметра α для указанных на рисунке значений y^ε, θ и N . Сплошные кривые – относительная ошибка $\delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – оценка относительной ошибки $\Delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$. в) Зависимость $G(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ от y для значений α_N^ε . д) Зависимость относительной ошибки, выраженной в процентах, от координаты y для значений α_N^ε . Жирные кривые – относительная ошибка $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, тонкие кривые – оценка относительной ошибки $\Delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$. На рисунках (а) и (б) кружки показывают положение порогового значения α_N^ε , а на рисунках (с) и (д) – положение координаты y^ε .

Следствие 2 дает асимптотические разложения $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$ по параметру α при $\alpha \rightarrow 0$ и фиксированном значении координаты y . Однако с практической точки зрения больший интерес представляют зависимости $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$ от координаты y при некотором фиксированном α . В качестве значений α возьмем значения пороговых параметров α_N^ε . На рис. 1с и 2с представлены результаты вычислений функции распределения $G(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ и плотности вероятности $g(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ в зависимости от y при значениях $\alpha_N^\varepsilon, N = 0, 1, 2, 3$. На этих рисунках представлены зависимости $G(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ и $g(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, вычисленные как при помощи интегральных представлений, так и при помощи формул (53) и (54). Однако различие между кривыми $G(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta), G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ и кривыми $g(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta), g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ таково, что в масштабах рисунков для каждого N соответствующие две кривые сливаются. Более детальную информацию о различии этих кривых позволяют получить соответствующие относительные ошибки.

На рис. 1д и 2д представлены результаты вычислений относительных ошибок $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ (жирные кривые) и оценок относительных ошибок $\Delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ и $\Delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ (тонкие кривые) в зависимости от координаты y при значениях $\alpha_N^\varepsilon, N = 0, 1, 2, 3$. Разным значениям N со-

ответствует разный тип кривой: сплошная кривая – $N = 0$; штриховая кривая – $N = 1$; пунктирная кривая – $N = 2$; штрих-пунктирная кривая – $N = 3$. Кружками обозначено положение координаты y^ε , при которой решались уравнения (57) и были найдены значения α_N^ε для функции распределения и плотности вероятности.

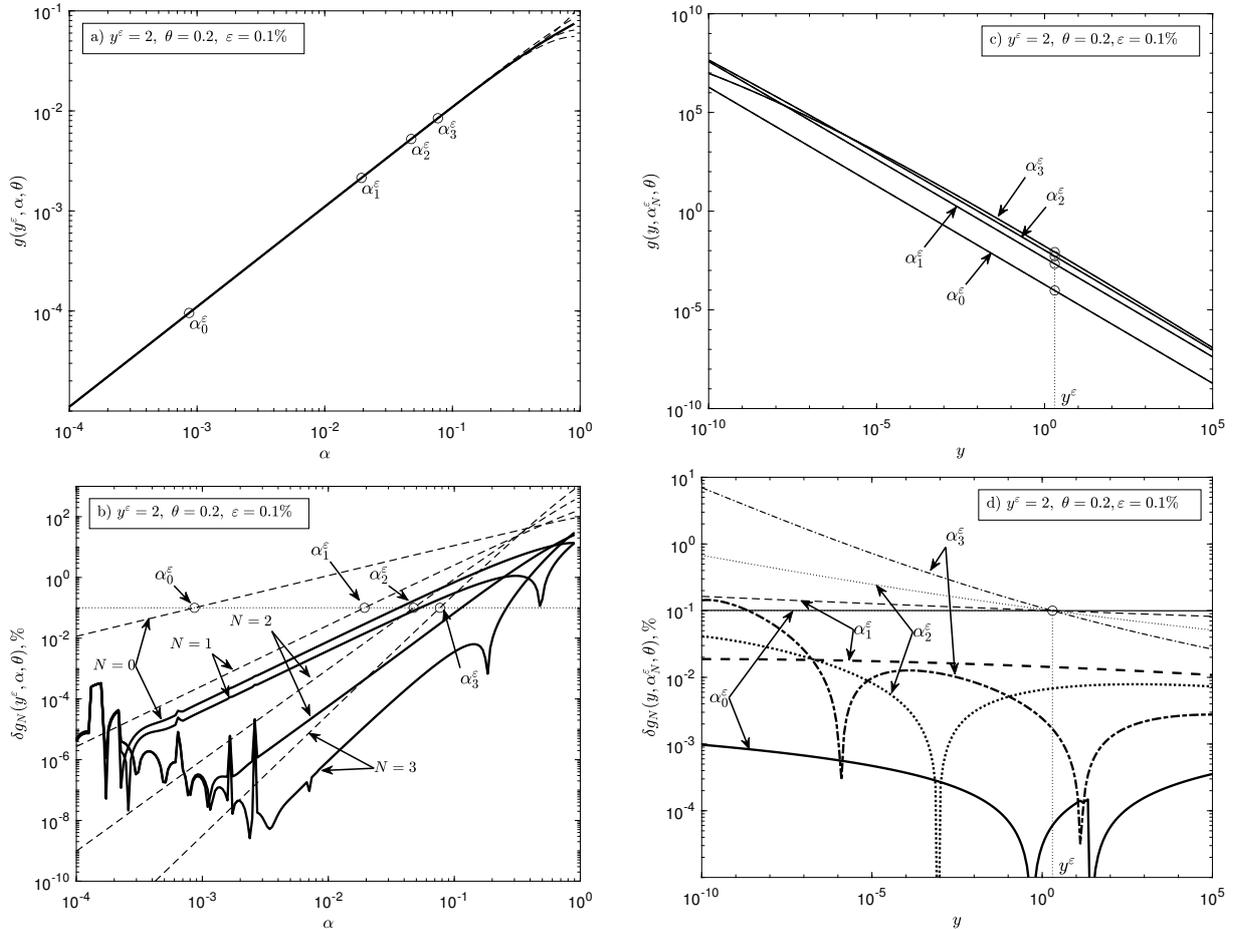


Рис. 2. Плотность вероятности $g(y, \alpha, \theta)$ и относительная ошибка $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$. а) Зависимость $g(y, \alpha, \theta)$ от α в точке $y = y^\varepsilon$. Сплошная кривая – плотность вероятности $g(y, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – формула (54) для указанных значений N . б) Относительная ошибка, выраженная в процентах, в зависимости от параметра α для указанных на рисунке значений y^ε , θ и N . Сплошные кривые – относительная ошибка $\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – оценка относительной ошибки $\Delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$. в) Зависимость $g(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ от y для значений α_N^ε . д) Зависимость относительной ошибки, выраженной в процентах, от координаты y для значений α_N^ε . Жирные кривые – относительная ошибка $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, тонкие кривые – оценка относительной ошибки $\Delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$. На рисунках (а) и (б) кружки показывают положение порогового параметра α_N^ε , а на рисунках (с) и (д) – положение координаты y^ε

Fig. 2. Probability density $g(y, \alpha, \theta)$ and relative error $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$. а) Dependence of $g(y, \alpha, \theta)$ on α at point $y = y^\varepsilon$. Solid curve is probability density $g(y, \alpha, \theta)$, dashed curves are expression (54) for the given values of N . б) Relative error expressed as a percentage depending on parameter α for the given values of y^ε , θ and N . Solid curves – relative error $\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$, dashed curves – estimated relative error $\Delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$. в) Dependence of $g(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ on y for values of α_N^ε . д) Dependence of the relative error expressed as a percentage of the coordinate y for values of α_N^ε . Bold curves – relative error $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, thin curves – estimated relative error $\Delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$. In figures (a) and (b), the circles show the position of the threshold parameter α_N^ε , and in figures (c) and (d), the position of the coordinate y^ε

Видно, что кривые $\Delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ (рис. 1d) и $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ (рис. 2d) для всех N пересекаются в этой точке. Легко понять, что так и должно быть, так уравнения (57) решались для значений $y^\varepsilon = 2$ и $\varepsilon = 0.1\%$. Из рис. 1b и 1d, а также из рис. 2b и 2d видно, что при фиксированном N и $\alpha < \alpha_N^\varepsilon$ и всех y справедливы неравенства $\delta G_N(y, \alpha, \theta) < \varepsilon$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta) < \varepsilon$. Это означает, что формулы (53) и (54) можно использовать при $\alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ и можно гарантировать, что относительные ошибки будут меньше выбранного уровня точности ε для всех y .

Проанализируем результаты, представленные на рис. 1d. В случае $N = 0$ различие между вычисленной относительной ошибкой $\delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ и её оценкой $\Delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ таково, что в масштабе рисунка эти две кривые сливаются. При более детальном изучении этих двух кривых можно увидеть, что при $y < y^\varepsilon$ значения $\Delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta) < \delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$. Это свидетельствует о том, что при $N = 0$ асимптотика еще не

достигается. Учет уже первого слагаемого в формуле (53) увеличивает точность разложения. Как видно из рис. 1d, для $N = 1$ для всех y выполняется неравенство $\delta G_1(y, \alpha_1^\varepsilon, \theta) < \varepsilon$, и увеличение значения N ведет к увеличению точности этого разложения. Таким образом, для вычисления функции распределения в разложении (53) необходимо учитывать как минимум первый член разложения ($N = 1$). По мере приближения y к нулю как относительная ошибка $\delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$, так и ее оценка $\Delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ сначала возрастает, превышая уровень точности ε , а затем начинает убывать и становится меньше ε . Аналогичное поведение относительной ошибки $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ и её оценки $\Delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ наблюдается и для остальных значений N . Однако при других значениях N координата y , при которой $\Delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ становится меньше $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, смещается в сторону меньших значений y . При этом $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta) < \varepsilon$ для $N > 0$ и всех y .

В случае плотности вероятности (рис. 2d) видно, что $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta) < \Delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ для каждого N . Также видно, что в приведенном диапазоне координат $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta) < \varepsilon$. В случае $y \rightarrow 0$, как оценка $\Delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, так и сама относительная ошибка $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ возрастают и с увеличением значения N рост увеличивается. Как видно из рисунка, при $y \leq 10^{-9}$ относительная ошибка $\delta g_3(y, \alpha_3^\varepsilon, \theta) > \varepsilon$. Такое увеличение связано с тем, что при $\alpha \rightarrow 0$ плотность устойчивого закона стремится к вырожденному распределению в точке $y = 0$. Тем не менее из рис. 2d видно, что относительная ошибка $\delta g_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ (случай $N = 0$) для всех y не превышает порогового значения ε . При этом относительная ошибка $\delta g_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ оказывается наименьшей для всех N . Из этого можно сделать вывод, что для вычисления плотности вероятности при $\alpha \rightarrow 0$ целесообразно использовать главный асимптотический член разложения $g_0(y, \alpha, \theta)$, определяемый формулой (52).

Подводя итоги можно сказать, что определение пороговых параметров α_N^ε позволило указать область допустимых значений параметра α ($0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$). Внутри этой области относительные ошибки вычислений функции распределения и плотности вероятности при помощи формул (53) и (54) не превосходят заданного уровня точности ε . А увеличение количества слагаемых N в этих формулах приводят к расширению области допустимых значений α . Исследование зависимостей относительных ошибок от координаты y при найденных значениях α_N^ε показали, что для широкого диапазона y справедливы неравенства $\delta G_N(y, \alpha, \theta) < \varepsilon$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta) < \varepsilon$ для всех $0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$. При этом увеличение N приводит к уменьшению $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$. Таким образом, формулы (53) и (54) можно использовать для вычисления функции распределения и плотности вероятности устойчивого закона при $\alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ при всех y , и при этом можно гарантировать, что $\delta G_N(y, \alpha, \theta) \leq \varepsilon$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta) \leq \varepsilon$. В случае функции распределения в формуле (53) целесообразно учитывать как минимум первое слагаемое в разложении ($N = 1$), а для плотности вероятности использование главного асимптотического члена разложения $g_0(y, \alpha, \theta)$, определяемого формулой (52), приводит к наименьшей относительной ошибке.

7. Заключение. Основной задачей данной работы являлось получение разложения функции распределения и плотности вероятности устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$ и получение оценок остаточных членов этих разложений. Для решения этой задачи понадобилось рассмотреть случайную величину $Z(\alpha, \theta)$, которая определяется (4). Для этой случайной величины получены разложения в ряд функции распределения $F(y, \alpha, \theta)$ и плотности вероятности $f(y, \alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и соответствующие оценки остаточных членов. Результаты представлены в теореме 2 и следствии 1. Используя эти результаты и взаимосвязь случайных величин $Z(\alpha, \theta)$ и $Y(\alpha, \theta)$, в следствии 2 получены асимптотические разложения плотности вероятности и функции распределения устойчивого закона в степенной ряд по параметру α и соответствующие оценки остаточных членов этих разложений.

Полученные оценки остаточных членов позволили записать уравнения для нахождения значений пороговых параметров α_N^ε для функции распределения и плотности вероятности. Их значения находятся в результате численного решения уравнений (57). Параметр α_N^ε определяет область допустимых значений параметра α , внутри которой относительная ошибка при использовании разложений из следствия 2 не будет превосходить задаваемого уровня точности ε . В результате для фиксированных y и θ оказываются справедливы неравенства (58) и (59). Эти неравенства показывают, что в области $0 \leq \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ относительная ошибка не будет превосходить задаваемого уровня точности ε .

Проведенные расчеты зависимости функции распределения и плотности вероятности от параметра α при фиксированных y и θ для $N = 0, 1, 2, 3$ показали, что увеличение количества слагаемых в разложениях ведет к увеличению значения порогового параметра α_N^ε , и, как следствие, к расширению области допустимых значений параметра α . Это означает, что увеличение N влечет увеличение точности аппроксимации, по крайней мере для рассмотренных N . Однако вопрос о сходимости полученных рядов при $N \rightarrow \infty$ остается открытым и требует дополнительного исследования. Тем не менее можно с определенностью утверждать, что полученные в теореме 2 и следствиях 1 и 2 ряды являются асимптотическими при $\alpha \rightarrow 0$.

Полученные выше результаты относятся к случаю, когда координата y фиксирована и исследуется зависимость от параметра α . Однако с практической точки зрения больший интерес представляет зависимость функции распределения и плотности вероятности от координаты y при фиксированном α . В качестве таких значений α были выбраны пороговые значения α_N^ε , найденные в результате

решения уравнений (57). Проведенные расчеты показали (см. рис. 1(c,d) и рис. 2(c,d)), что поведение разложений функции распределения (53) и плотности вероятности (54) несколько отличаются друг от друга. В случае функции распределения увеличение количества слагаемых N в разложении приводит к уменьшению относительной ошибки $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$. Следовательно, учет дополнительных слагаемых в разложении увеличивает точность аппроксимации функции распределения. В случае плотности вероятности результат оказывается противоположным. Учет дополнительных слагаемых в формуле (54) приводит к увеличению относительной ошибки $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ (см. рис. 2d). При этом рост $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ увеличивается при $y \rightarrow 0$. Скорее всего это связано с тем, что при $\alpha \rightarrow 0$ устойчивые законы стремятся к вырожденному распределению в точке $y = 0$. Тем не менее, как это видно из рис. 2d, к наименьшей относительной ошибке приводит случай $N = 0$. Таким образом, для вычисления функции распределения в формуле (53) необходимо учитывать как минимум первый член разложения, а для вычисления плотности вероятности при $\alpha \rightarrow 0$ целесообразно использовать главный асимптотический член разложения $g_0(y, \alpha, \theta)$, определяемый формулой (52). Если при этом значение α все время остается в области $0 \leq \alpha \leq \alpha_0^\varepsilon$, то можно гарантировать, что относительная ошибка не будет превосходить значение ε .

Список литературы

1. Saenko V.V. The Calculation of the Density and Distribution Functions of Strictly Stable Laws. *Mathematics*. 2020;8(5):775. Available from: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/5/775>.
2. Nolan J.P. Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 1997;13(4):759–774. Available from: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15326349708807450>.
3. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. Москва: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.; 1983. 304 с.
4. Cressie N. A note on the behaviour of the stable distributions for small index α *Probability Theory and Related Fields*. 1975;33(1):61–64. Available from: <http://www.springerlink.com/index/VW66M4303X6J8800.pdf> <http://www.springerlink.com/index/10.1007/BF00539862>.
5. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and stability. Stable Distributions and their Applications. Utrecht: VSP; 1999.
6. Nolan J.P. Univariate Stable Distributions. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Cham: Springer International Publishing; 2020. Available from: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-52915-4>.
7. Золотарев В.М. Преобразования Меллина – Стильтьеса в теории вероятностей. *Теория вероятности и ее применения*. 1957;2(4):444–469. Available from: <http://mi.mathnet.ru/tvp4977>.
8. Золотарев В.М. Общая теория перемножения независимых случайных величин. *Доклады АН СССР*. 1962;142(4):788–791.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз; 1963. 1100 с.
10. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. Москва: Издательство иностранной литературы; 1963. 288 с.
11. Comtet L. Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reidel Publishing Company; 1974.
12. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.; 1979. 832 с.

References

1. Saenko V.V. The Calculation of the Density and Distribution Functions of Strictly Stable Laws. *Mathematics*. 2020;8(5):775. Available from: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/5/775>.
2. Nolan J.P. Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 1997;13(4):759–774. Available from: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15326349708807450>.
3. Zolotarev V.M., One-dimensional stable Distributions, Amer. Mat. Soc., Providence, RI, 1986.
4. Cressie N. A note on the behaviour of the stable distributions for small index α *Probability Theory and Related Fields*. 1975;33(1):61–64. Available from: <http://www.springerlink.com/index/VW66M4303X6J8800.pdf> <http://www.springerlink.com/index/10.1007/BF00539862>.
5. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and stability. Stable Distributions and their Applications. Utrecht: VSP; 1999.
6. Nolan J.P. Univariate Stable Distributions. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Cham: Springer International Publishing; 2020. Available from: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-52915-4>.
7. Zolotarev V.M. Mellin-Stieltjes Transforms in Probability Theory. *Teoriya veroyatnostej i eyo primeneniya [Theory of Probability & Its Applications]* 1957;2(4):433–460. Available from: <http://mi.mathnet.ru/tvp4977>.
8. Zolotarev V.M. Obshchaya teoriya peremnozheniya nezavisimykh sluchainykh velichin [General theory of multiplication of independent random variables]. *Doklady AN SSSR*. 1962;142(4):788–791.
9. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables Of Integrals, Series And Products. Academic Press; 2007.
10. Riordan J. An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley & Sons, Inc, New York 1958.
11. Comtet L. Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reidel Publishing Company; 1974.

12. Abramowitz M., Stegun IA. eds. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Applied Mathematics Series. Vol. 55. Washington D.C.; New York: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards. 1983.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 11.10.2025

Received October 11, 2025

Поступила после рецензирования 24.11.2025

Revised November 24, 2025

Принята к публикации 28.11.2025

Accepted November 28, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Саенко Вячеслав Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Передовой инженерной школы «ФармИнжиниринг», Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Viacheslav V. Saenko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher of the, Advanced Engineering School “PharmEngineering”, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia

[К содержанию](#)