Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 3. С. 172–185
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 3. P. 172–185

УДК 517.3
MSC 331B15; 47G10; 44A15; 46E30
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-172-185
EDN IRORTQ

Об уравнениях Коши – Эйлера целого и дробного порядков

Махамуд А. А.[1], **Шишкина Э. Л.**[2, 3]
[1] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
1269765@bsuedu.ru
[2] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
[3] Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
Россия, 364024, г. Грозный, ул. А. Шерипова, 32
ilina_dico@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе исследуются уравнения Коши – Эйлера целого и дробного порядков. Анализируется и используется тот факт, что операторы, входящие в такие уравнения, тесно связаны с числами Стирлинга второго рода и их обобщениями дробного порядка. Предложена конечно-разностная интерпретация оператора $(x\frac{d}{dx})^n$. Рассмотрено применение преобразования Меллина для решения неоднородных уравнений Коши – Эйлера целого и дробного порядков.

Ключевые слова: уравнение Коши – Эйлера, дифференциальный оператор Коши – Эйлера, числа Стирлинга второго рода, функции Стирлинга второго рода, дробные производные Адамара, преобразование Меллина

Благодарности: Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEGS-2023-0003).

Для цитирования: Махамуд А.А., Шишкина Э.Л. Об уравнениях Коши – Эйлера целого и дробного порядков. *Прикладная математика & Физика.* 2025;57(3):172–185. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-172-185 EDN IRORTQ

Original Research

Cauchy – Euler Equation: Integer and Fractional Orders

Ahmat A. Mahamoud [1], **Elina L. Shishkina** [2, 3]
[1] Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
1269765@bsuedu.ru
[2] Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh 394018, Russia
[3] Kadyrov Chechen State University,
32 A. Sheripova St., Grozny 364024, Russia
ilina_dico@mail.ru

Abstract. In this paper, we study the Cauchy-Euler equations of both integer and fractional orders. We analyze and utilize the fact that the operators involved in these equations are closely related to the Stirling numbers of the second kind and their fractional generalizations. We propose a finite-difference interpretation of the operator $(x\frac{d}{dx})^n$. Additionally, we consider the application of the Mellin transform for solving inhomogeneous Cauchy – Euler equations of both integer and fractional orders.

Keywords: Cauchy – Euler Equation, Cauchy – Euler Differential Operator, Stirling Numbers of the Second Kind, Stirling Functions of the Second Kind, Hadamard Fractional Derivatives, Mellin Transform

Acknowledgements: The work of the second author was carried out with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on a state assignment (project FEGS-2023-0003).

For citation: Mahamoud AA., Shishkina EL. Cauchy – Euler Equation: Integer and Fractional Orders. *Applied Mathematics & Physics.* 2025;57(3):172–185 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-172-185 EDN IRORTQ

1. Введение. Исследование дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами продолжается и далеко от завершения. Особенно интересной и насыщенной является теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Некоторые такие обыкновенные дифференциальные уравнения эффективно решаются с помощью рядов. Такая простая ситуация возникает в том случае, когда у уравнения нет особых точек. Если у уравнения есть особые точки, то, вообще говоря, простой метод поиска решения в виде степенного ряда неприменим напрямую. Однако, в некоторых случаях, и при наличии у уравнения особых точек простые методы поиска решения в виде рядов остаются в силе. Такие особые точки уравнения называются регулярными особыми точками.

Простейшим уравнением с полиномиальными коэффициентами, имеющим регулярную особую точку $x = 0$, является уравнение Коши – Эйлера. Уравнение Коши – Эйлера отличается тем, что при некоторых условиях оно имеет несколько независимых полиномиальных решений. Поэтому, построив полную теорию для уравнений Коши – Эйлера, имеется возможность перенести ее на любое общее уравнение, имеющее регулярную особую точку. Этот классический подход реализован в [1].

Мы рассмотрим дифференциальное уравнение Эйлера – Коши дробного порядка. Ситуация в этом случае становится значительно интереснее, поскольку существует, во-первых, много способов обобщения уравнений такого типа на случай уравнения дробного порядка, а во-вторых, поскольку уравнение типа Коши – Эйлера тесно связано с числами Стирлинга второго рода, то его дробный аналог оказывается связан с функциями Стирлинга второго рода (числами Стирлинга дробного порядка). Второе наблюдение позволит реализовать метод численного решения таких уравнений.

Будем рассматривать функцию одной переменной $y = y(x)$. Пусть $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ — производная n-го порядка функции $y(x)$. Неоднородное уравнение Коши – Эйлера порядка n имеет вид

$$Ly = a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, ..., n, \quad a_n \neq 0$$

или

$$Ly = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = f(x). \tag{1}$$

Наиболее популярно у исследователей уравнение Коши – Эйлера второго порядка (см. [2], p. 273).

Заметим, что, в силу основной теоремы алгебры, оператор

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k}{dx^k} \tag{2}$$

можно факторизовать, то есть записать в виде

$$L = a_n \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_1 I \right) \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_2 I \right) ... \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_n I \right),$$

где I – тождественный оператор, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ являются корнями соответствующего характеристического уравнения.

Факторизованное уравнение Коши – Эйлера

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_k \right) \right) f(x) = 0$$

рассмотрено в [3, 4].

Центральным моментом при исследовании решения уравнения Коши – Эйлера является то, что

$$L\, x^r = p(r) x^r, \tag{3}$$

где $p(r)$ – многочлен. Этот многочлен является характеристическим многочленом оператора L. Оператор Коши – Эйлера L отображает степень x^r в многочлен от переменной r (характеристический многочлен), умноженный на ту же степень x.

Пример 1.1. Рассмотрим оператор Коши – Эйлера второго порядка:

$$L\, y = a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y.$$

Тогда

$$L\, x^r = a_2 x^2 \frac{d^2 x^r}{dx^2} + a_1 x \frac{dx^r}{dx} + a_0 x^r = (a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0) x^r = (a_2 r^2 + (a_1 - a_2) r + a_0) x^r,$$

$$p(r) = (a_2 r^2 + (a_1 - a_2) r + a_0).$$

В общем,

$$a_k x^k \frac{d^k x^r}{dx^k} = a_k r(r-1)(r-2)...(r-k+1) x^r = p_k x^r, \text{ где } \quad p_k = a_k (r)_k, \ (r)_k - \text{символ Похгаммера.}$$

Таким образом, если мы знаем $p(r)$ и можем найти корни уравнения $p(r) = 0$, то мы можем найти решение однородного уравнения Коши – Эйлера $L\, y = 0$. А именно, справедливо следующее утверждение (см. [1]).

1. Если $m \le n$ и $r_1, r_2, \ldots, r_m$ – различные действительные корни уравнения $p(r) = 0$, тогда $x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_m}$ являются линейно независимыми действительными решениями уравнения Коши – Эйлера $Ly = 0$ и
$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + \ldots + c_m x^{r_m}, \qquad c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$$
тоже являются решениями уравнения Коши – Эйлера $Ly = 0$. Эти решения определяют m-мерное подпространство ядра оператора L.

2. Если s корень уравнения $p(r) = 0$ кратности k, $1 < k \le n$, то $x^s, x^s \ln x, \ldots, x^s (\ln x)^{k-1}$ – линейно независимые решения уравнения Коши – Эйлера $Ly = 0$ и
$$y(x) = c_1 x^s + c_2 x^s \ln x + \ldots + c_k x x^s (\ln x)^{k-1}, \qquad c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$$
тоже являются решениями уравнения Коши – Эйлера $Ly = 0$. Эти решения определяют k-мерное подпространство ядра оператора L.

3. Если $r = \alpha \pm i\beta$ – комплексно-сопряженная пара корней уравнения $p(r) = 0$, тогда $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ и $x^\alpha \sin(\beta \ln x)$ – действительные линейно независимые решения, соответствующие паре $\alpha \pm i\beta$ комплексных корней. Если $\alpha \pm i\beta$ – пара кратности k, то
$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), \qquad x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), \qquad \ldots, \qquad x^\alpha (\ln x)^{k-1} \cos(\beta \ln x)$$
и
$$x^\alpha \sin(\beta \ln x), \qquad x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x), \qquad \ldots, \qquad x^\alpha (\ln x)^{k-1} \sin(\beta \ln x)$$
являются $2k$ действительными линейно независимыми решениями в ядре оператора L. Их линейные комбинации охватывают $2k$-мерное подпространство ядра оператора L.

4. Полное описание ядра оператора L – это множество всех линейных комбинаций функций, найденных в предыдущих трех случаях.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. Во втором разделе приводятся основные определения чисел Стирлинга первого и второго рода, функций Стирлинга второго рода, их обобщение, а также свойства таких чисел и функций. Также приведено определение преобразования Меллина. В третьем разделе приведены операторы Коши – Эйлера $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ и Шватта $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$, формулы связи между ними, а также доказана лемма о конечно-разностном представлении оператора Шватта. Линейные неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения с операторами Коши – Эйлера и Шватта рассмотрены в четвертом разделе. Приведены их решения, полученные при помощи преобразования Меллина. Приведены примеры решения таких уравнений. Пятый раздел посвящен дробным степеням оператора $x \frac{d}{dx}$. Его дробная степень сначала построена с помощью полугруппового подхода, затем приведены известные формулы, определяющие дробную производную и дробный интеграл Адамара и их обобщение. Дифференциальные уравнения с дробными производными адамаровского типа рассмотрены в шестом разделе.

2. Основные определения. Приведем необходимые в дальнейшем определения. Числами Стирлинга первого рода со знаком $s(n,k)$ называются коэффициенты многочлена (см. [5, 6]):
$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k,$$
где $(x)_n$ – символ Похгаммера (убывающий факториал):
$$(x)_0 = 1, \qquad (x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1). \tag{4}$$

Абсолютные значения $s(n,k)$ называются числами Стирлинга первого рода без знака и обозначаются $\left[{n \atop k}\right]$:
$$\left[{n \atop k}\right] = |s(n,k)| = (-1)^{n-k} s(n,k).$$
Эти числа задают количество перестановок множества, состоящего из n элементов с k циклами. Производящей функцией $\left[{n \atop k}\right]$ является возрастающий факториал $x^{(n)} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$, т. е.
$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k. \tag{5}$$

Хорошо известно, что числа Стирлинга первого рода не выражаются формулой с одной суммой. Формула, определяющая числа Стирлинга первого рода с двумя суммами, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=n}^{2n-k} \binom{j-1}{k-1} \binom{2n-k}{j} \sum_{m=0}^{j-n} \frac{(-1)^{m+n-k} m^{j-k}}{m!(j-n-m)!}. \tag{6}$$

Числа Стирлинга второго рода находятся по формуле (см. [5, 6])

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!i!} i^n \qquad 1 \le k \le n, \qquad n \ge 1. \tag{7}$$

Известно, что число Стирлинга второго рода $\left\{ {n \atop k} \right\}$ равно количеству неупорядоченных разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств. Для чисел Стирлинга второго рода используются два обозначения $\left\{ {n \atop k} \right\}$ и $S(n,k)$.

Другой способ задания чисел Стирлинга второго рода имеет вид

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{k!} \lim_{x \to 0} \Delta^k (x^n), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n,k \in \mathbb{N}_0, \tag{8}$$

где Δ задается как $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f)(x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (x)_k = x^n. \tag{9}$$

Для рассмотрения уравнения Коши – Эйлера дробного порядка нам потребуются числа Стирлинга дробного порядка. В [7, 8] классические числа Стирлинга второго рода $\left\{ {n \atop k} \right\} = S(n,k)$, $n \in \mathbb{N}$ распространены на более общие комплексные функции $\left\{ {\alpha \atop k} \right\} = S(\alpha,k)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Функции $\left\{ {\alpha \atop k} \right\} = S(\alpha,k)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ будем называть функциями Стирлинга второго рода. Рассмотрим случай вещественного α, а именно, формулу (7) можно обобщить на случай $a \ge 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ при помощи равенства

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^\alpha, \qquad \alpha \ne 0, \qquad k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \alpha > 0; \qquad \begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}; \qquad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1. \tag{10}$$

Функция Стирлинга второго рода $\left\{ {\alpha \atop 0} \right\}$ не определена для $\alpha < 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Формула (8) в этом случае примет вид

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{k!} \lim_{x \to 0} \Delta^k (x^\alpha), \quad \text{при} \quad \alpha \ge 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть $\alpha > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ таковы, что $k > \alpha$. Тогда функции Стирлинга второго рода имеют интегральное представление (см. [8], Теорема 4)

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ k \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-t})^k \frac{dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Для того, чтобы выразить дробные производные и интегралы адамаровского типа в виде суммы в [8], были введены обобщенные функции Стирлинга вида

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ k \end{Bmatrix}_c = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} (c+j)^\alpha, \qquad \alpha, c \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для таких функций справедливо

$$\lim_{c \to 0} \begin{Bmatrix} \alpha \\ k \end{Bmatrix}_c = \begin{Bmatrix} \alpha \\ k \end{Bmatrix}.$$

Справедливо равенство

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}_c = c^\alpha.$$

Определение 2.1. Преобразование Меллина *функции* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *имеет вид*

$$\varphi^*(s) = \mathcal{M}[\varphi(x)](s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}\varphi(x)dx, \tag{11}$$

где $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, *такое, что указанный интеграл существует.*

В качестве пространства оригиналов выбираем пространство P_a^b, *где* $-\infty < a < b < \infty$. *Пространство* P_a^b *является линейным пространством функций* $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, *таких, что* $x^{s-1}\varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ *для каждого* $s \in \{p \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} p \leq b\}$.

Если дополнительно $\varphi^*(\sigma+i\tau) \in L_1(\mathbb{R})$ *относительно* τ, *то выполняется комплексная формула обращения:*

$$\mathcal{M}^{-1}[\varphi^*(s)](x) = \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s}\varphi^*(s)\,ds.$$

3. Операторы Коши – Эйлера и Шватта. Приведем операторы Коши – Эйлера и Шватта, а также некоторые их свойства. Представленные здесь свойства иллюстрируют связь операторов $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ и $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$ с числами Стирлинга первого и второго рода.

В книге [1], стр. 241, приведено определение оператора Коши – Эйлера $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ и соответствующее ему уравнение. В [9, 10] изучался оператор $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$, который, как оказалось, имеет большое количество приложений к различным задачам анализа и теории дифференциальных уравнений.

Определение 3.1. Оператор Коши – Эйлера – *это дифференциальный оператор вида* $x^n \frac{d^n}{dx^n}$, *где* $n \in \mathbb{N}$ *(см. [1], 242). Простейшим примером является оператор* $x\frac{d}{dx}$, *имеющий собственные значения* $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *и соответствующие собственные функции* x^r.

Определение 3.2. Оператор Шватта – *это дифференциальный оператор вида* $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$.

Операторы $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ и $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$ тесно связаны с числами Стирлинга первого и второго рода

Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$x^n\frac{d^n}{dx^n} = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\left(x\frac{d}{dx}-2\right)\ldots\left(x\frac{d}{dx}-n+1\right) = \left(x\frac{d}{dx}\right)_n,$$

где $(x)_n$ – символ Похгаммера (4). Тогда $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ выражается через числа Стирлинга первого рода (6)

$$x^n\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\left(x\frac{d}{dx}\right)^k f(x). \tag{12}$$

Для произвольной бесконечно дифференцируемой функции f в [9, 10] методом математической индукции доказано, что

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \sum_{k=1}^{n}\left\{ n \atop k \right\} x^k\frac{d^k}{dx^k}f(x), \tag{13}$$

где $\left\{ n \atop k \right\}$ – числа Стирлинга второго рода (7).

Получим конечно-разностное представление для оператора $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$.

Лемма 3.1. *Справедлива формула*

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i E_i^n\left(\frac{x}{h}\right)f(x+ih),$$

где $E_i^n(t) = \sum\limits_{k=i}^{n}\binom{k}{i}\left\{ n \atop k \right\}t^k$.

Доказательство. Поскольку

$$\frac{d^k f}{dx^k} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^k[f](x)}{h^n},$$

где $\Delta_h^k[f](x) = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x+ih)$ – восходящая конечная разность порядка k от функции f с шагом h, взятая в точке x, $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ – биномиальный коэффициент, то по формуле (13), учитывая, что $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$, имеем

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}x^k\frac{d^kf}{dx^k}=\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{x^k}{h^k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x+ih)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{x^k}{h^k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}f(x+ih)=\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f(x+ih)\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{x^k}{h^k}.$$

Что и завершает доказательство.

Оператор (2) можно записать в виде

$$L=\sum_{k=0}^{n}b_k\left(x\frac{d}{dx}\right)^k, \qquad \text{где} \qquad b_k=\sum_{j=k}^{n}\left\{{j \atop k}\right\}a_j.$$

Следствие 3.1. *Уравнение*

$$Ly=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\frac{d^k}{dx^k}y(x)=f(x)$$

равносильно уравнению

$$Ly=\sum_{k=0}^{n}b_k\left(x\frac{d}{dx}\right)^k y(x)=f(x), \tag{14}$$

где

$$b_k=\sum_{j=k}^{n}\left\{{j \atop k}\right\}a_j.$$

4. Применение преобразования Меллина к решению неоднородного уравнения Коши – Эйлера. В этом разделе рассматриваются линейные неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения с операторами Коши – Эйлера и Шватта. Уравнение Эйлера – Коши низкого порядка (до второго) можно решить с помощью различных методов, таких как метод вариации параметров, метод понижения порядка, метод дифференциального преобразования. В общем же случае наиболее эффективным является метод интегральных преобразований. С использованием прямого и обратного преобразования Меллина устанавливаются явные решения таких уравнений. В работе [11] показано, как решать уравнение Коши – Эйлера при помощи преобразования Меллина. Следуя [12], приведем основные для нас формулы.

Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (11) от нее существует и

$$x^{s-m}\varphi^{(k-m)}(x)|_{x=0}=x^{s-m}\varphi^{(k-m)}(x)|_{x=\infty}=0, \qquad m=1,2,...,k, \tag{15}$$

тогда преобразование Меллина $x^k\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)$ имеет вид:

$$\mathcal{M}\left[x^k\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)\right](s)=(-1)^k\frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}\varphi^*(s). \tag{16}$$

Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (11) от нее существует и

$$x^s\left(x\frac{d}{dx}\right)^m\varphi(x)\bigg|_{x=0}=x^s\left(x\frac{d}{dx}\right)^m\varphi(x)\bigg|_{x=\infty}=0, \qquad m=0,1,...,k-1, \tag{17}$$

тогда преобразование Меллина $\left(x\frac{d}{dx}\right)^k\varphi(x)$ имеет вид:

$$\mathcal{M}\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^k\varphi(x)\right](s)=(-1)^ks^k\varphi^*(s). \tag{18}$$

Теорема 4.1.

1. Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (11) *от нее существует и выполняется условие* (15), *тогда решение неоднородного уравнение Коши – Эйлера вида*

$$Ly=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\frac{d^k}{dx^k}y(x)=\varphi(x) \tag{19}$$

имеет вид

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\varphi^*(s)}{a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}}\right](x). \tag{20}$$

2. Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (11) *от нее существует и выполняется условие* (17), *тогда решение неоднородного уравнение Коши – Эйлера вида*

$$Ly = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(x\frac{d}{dx}\right)^k y(x) = \varphi(x) \qquad \text{где} \qquad b_k = \sum_{j=k}^{n}\left\{\begin{matrix} j \\ k \end{matrix}\right\} a_j \tag{21}$$

имеет вид

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\varphi^*(s)}{b_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k b_k s^k}\right](x). \tag{22}$$

Доказательство.
1. Применим к (19) преобразование Меллина:

$$\mathcal{M}[Ly(x)](s) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{M}\left[x^k \frac{d^k}{dx^k} y(x)\right](s) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} y^*(s) = \varphi^*(s),$$

тогда формула (16) дает (20).
2. Применим к (21) преобразование Меллина, получим:

$$\mathcal{M}[Ly(x)](s) = \sum_{k=0}^{n} b_k \mathcal{M}\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^k y(x)\right](s) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k s^k y^*(s) = \varphi^*(s),$$

тогда формула (18) дает (22).

В силу следствия 2.1. уравнения (19) и (21) равносильны и выбор уравнения осуществляется в пользу того уравнения, для которого проще найти обратное преобразование Меллина.

Для иллюстрации этого элементарного метода приведем несколько преобразований Меллина от функций из [12]:

$$\mathcal{M}\left[\sin(ax)\right](s) = \frac{\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}}{a^s}, \tag{23}$$

формула (23) справедлива при $0 < a$, $-1 < \operatorname{Re}(s) < 1$;

$$\mathcal{M}\left[\delta(x-a)\right](s) = a^{s-1}, \tag{24}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, формула (24) справедлива при $0 < a$,

$$\mathcal{M}\left[\theta(1-x)\right](s) = \frac{1}{s}, \tag{25}$$

где $\theta(1-x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ 0 & 1 \le x < \infty. \end{cases}$ – функция Хевисайда, формула (25) справедлива при $0 < \operatorname{Re}(s)$.

Пример 4.1. *При $n = 1$ уравнения (19) и (21) совпадают и принимают вид $ax\dfrac{dy}{dx} + by(x) = \varphi(x)$. Рассмотрим уравнение*

$$ax\frac{dy}{dx} + by(x) = \sin(\alpha x).$$

Применяя преобразование Меллина, при помощи Wolfram Matematica 13.0, получим

$$-a\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)}y^*(s) + by^*(s) = \alpha^{-s}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s) \Rightarrow (b-as)y^*(s) = \alpha^{-s}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s) \Rightarrow y^*(s) = \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)}{\alpha^s(b-as)}.$$

Применяя обратное преобразование Меллина, будем иметь

$$y(x) = \frac{\alpha}{a+b}x\,{}_1F_2\left(\frac{a+b}{2a}; \frac{3}{2}, \frac{a+b}{2a}+1; -\frac{x^2\alpha^2}{4}\right) + \frac{\pi}{2b\alpha^{\frac{b}{a}}\Gamma\left(-\frac{b}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi b}{2a}\right)}x^{-\frac{b}{a}}.$$

При $a = 2$, $b = 1$, $\alpha = 3$, $x > 0$ *получим, что решение уравнения* $2x\dfrac{dy}{dx} + y(x) = \sin(3x)$ *имеет вид*

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{6x}}\left(2S\left(\sqrt{\frac{6x}{\pi}}\right) - 1\right), \tag{26}$$

где $S(x)$ *– интеграл Френеля, определяемый как*

$$S(x) = \int\limits_0^x \sin(t^2)\,dt, \quad C(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)\,dt.$$

График решения (26) *изображен на рис. 1.*

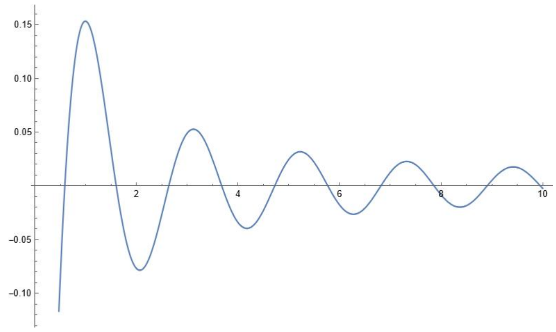

Рис. 1. $y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{6x}}\left(2S\left(\sqrt{\frac{6x}{\pi}}\right) - 1\right)$

Fig. 1. $y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{6x}}\left(2S\left(\sqrt{\frac{6x}{\pi}}\right) - 1\right)$

Пример 4.2. *При* $n = 2$ *уравнения* (19) *и* (21) *примут вид, соответственно*

$$a_2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1x\frac{dy}{dx} + a_0y = \varphi(x),$$

$$b_2\left(x\frac{dy}{dx}\right) + b_1x\frac{dy}{dx} + b_0y = \varphi(x).$$

Рассмотрим уравнение

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy(x) = \delta(x-1),$$

где $\delta(x)$ *– дельта-функция Дирака. Применяя преобразование Меллина, при помощи Wolfram Matematica 13.0, получим*

$$a\frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(s)}y^*(s) - b\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)}y^*(s) + y^*(s) = 1 \Rightarrow (as(s+1) - bs + c)y^*(s) = 1 \Rightarrow y^*(s) = \frac{1}{as(s+1) - bs + c}.$$

Применяя обратное преобразование Меллина, будем иметь

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 - 4ac}}\left(1 - x^{\frac{\sqrt{(a-b)^2-4ac}}{a}}\right)x^{-\frac{\sqrt{(a-b)^2-4ac}-a+b}{2a}}.$$

При $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -1$, $x > 0$ *получим, что решение уравнения* $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 2y(x) = 2\delta(x-1)$, *имеет вид*

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x^{1-\sqrt{3}} - x^{1+\sqrt{3}}). \tag{27}$$

График решения (27) *изображен на рис. 2.*

Рассмотрим теперь

$$\alpha\left(x\frac{dy}{dx}\right)^2 + \beta x\frac{dy}{dx} + \gamma y = \delta(x).$$

Аналогично предыдущему решению, получим

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}x^{-\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}\left(1 - x^{\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}}\right).$$

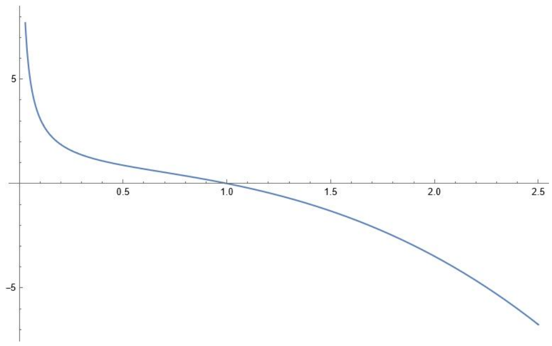

Рис. 2. $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x^{1-\sqrt{3}} - x^{1+\sqrt{3}})$

Fig. 2. $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x^{1-\sqrt{3}} - x^{1+\sqrt{3}})$

Следующий шаг в решении рассмотренных уравнений – применение теории вычетов и H-функций Фокса для построения конкретных решений более сложных уравнений, чем в приведенных примерах.

5. Дробные степени оператора $x\frac{d}{dx}$ и их обобщения. Пусть $\{T_t\}_{t\geq 0}$ – сжимающая полугруппа класса C_0 (то есть сильно непрерывная полугруппа) в банаховом пространстве X с инфинитезимальным генератором. Согласно подходу Балакришнана, (см. [13, 14, 15]), дробная степень $(-A)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ определяется по формуле

$$(-A)^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1}(T_t - I)f(x)dt, \qquad f \in D(A). \tag{28}$$

В случае, когда $1 < \alpha < \ell$, $\ell = 2, 3, \ldots$ эту формулу можно записать с использованием «конечных разностей» $(I - T_t)^\ell$:

$$(-A)^\alpha f = \frac{1}{C_\alpha(\ell)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1}(I - T_t)^\ell f(x)dt, \tag{29}$$

где $C_\alpha(\ell) = \Gamma(-\alpha)A_\alpha(\ell)$, $A_\alpha(\ell) = \sum\limits_{k=0}^{\ell}(-1)^{k-1}\binom{\ell}{k} = \sum\limits_{k=0}^{\ell}(-1)^{k-1}\frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}$.

Отрицательная степень оператора $(-A)$ for $0 < \alpha < 1$ может быть определена с помощью уравнения:

$$(-A)^{-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1}T_t f(x)dt. \tag{30}$$

Чтобы получить дробный интеграл порядка $\alpha > 1$, достаточно применить повторный интеграл к уравнению (30).

В теории групп оператор $x\frac{d}{dx}$ обычно называют инфинитезимальным оператором масштабирующего преобразования. Инфинитезимальный оператор всегда равен дифференцированию по канонической переменной и преобразует преобразование в сдвиг. Для инфинитезимального оператора $x\frac{d}{dx}$ полугруппа имеет вид:

$$T_t f(x) = e^{xt\frac{d}{dx}} f(x) = f(e^t x).$$

Если оператор $A = \left(-x\frac{d}{dx}\right)$, тогда A является порождающим оператором сильно непрерывной полугруппы $T_t f(x) = f(e^{-t}x)$ on $L^2[0, \infty)$.

Тогда (28) получим

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1}(f(e^{-t}x) - f(x))dt, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Произведя замену $e^{-t}x = \tau$, $t = \ln\frac{x}{\tau}$, $dt = -\frac{d\tau}{\tau}$, получим

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \left(\ln\frac{x}{\tau}\right)^{-\alpha-1} (f(\tau) - f(x))\frac{d\tau}{\tau}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

что совпадает с адамаровской дробной производной в смысле Маршо (см. [16], стр. 252).

Другая форма записи адамаровской дробной производной осуществляется через дробный интеграл Адамара.

Дробный интеграл Адамара при $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \qquad x > 0, \tag{31}$$

дробная производная Адамара при дробных $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n (\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+}f)(x), \qquad x > 0, \tag{32}$$

где $n = [\alpha] + 1$. В случае $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$({}_H\mathfrak{D}^{n}_{0+}f)(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x),$$

$$({}_H\mathfrak{D}^{0}_{0+}f)(x) = ({}_H\mathfrak{I}^{0}_{0+}f)(x) = f(x).$$

При $0 < \alpha < 1$ оператор $\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+}$ примет вид:

$$({}_H\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\, x\frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{t\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha}}.$$

Еще один способ ввести дробную степень оператора $x\frac{d}{dx}$ – обобщение формулы (13).

Учитывая введенные ранее функции Стирлинга второго рода (10), дробная производная Адамара и дробный интеграл Адамара в форме Грюнвальда – Летникова примут вид

$$({}_H\mathbb{D}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {\alpha \atop k} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x), \qquad \alpha > 0,$$

$$({}_H\mathbb{I}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^{-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {-\alpha \atop k} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x), \qquad \alpha > 0.$$

Буцер, Килбас и Трухильо (см. [8], Теорему 17) показали, что для функции бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, определенной для $x > 0$, такой, что ее ряд Тейлора сходится во всякой точке $x > 0$, выполняются при $\alpha > 0$ равенства

$$({}_H\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {-\alpha \atop k} \right\} x^k f^{(k)}(x) = ({}_H\mathbb{I}^{\alpha}_{0+}f)(x),$$

$$({}_H\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n (\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+}f)(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {\alpha \atop k} \right\} x^k f^{(k)}(x) = ({}_H\mathbb{D}^{\alpha}_{0+}f)(x).$$

Пусть $\alpha > 0$. В силу формулы (12), получим

$$({}_H\mathbb{D}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {\alpha \atop k} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {\alpha \atop k} \right\} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \left[{k \atop m} \right] \left(x\frac{d}{dx}\right)^m f(x). \tag{33}$$

В статье [8] рассмотрены также следующие обобщения дробных интегралов и производных Адамара. Дробный интеграл адамаровского типа при $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,c}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^c \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \qquad x > 0, \tag{34}$$

дробная производная адамаровского типа при дробных $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,c}f)(x) = \frac{1}{x^c} \left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^c (\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,c}f)(x), \qquad x > 0, \tag{35}$$

где $n = [\alpha] + 1$. В случае $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$({}_H\mathfrak{D}^n_{0+,c}f)(x) = \frac{1}{x^c}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^c f(x),$$

$$({}_H\mathfrak{D}^0_{0+,c}f)(x) = ({}_H\mathfrak{I}^0_{0+,c}f)(x) = f(x).$$

При $c = 0$ дробный интеграл адамаровского типа и дробная производная адамаровского типа переходят в ${}_H\mathfrak{I}^\alpha_{0+}$ и ${}_H\mathfrak{D}^\alpha_{0+}$, соответственно.

В силу Теоремы 15 из [8] имеем, что для функции бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, определенной для $x > 0$, такой, что ее ряд Тейлора сходится во всякой точке $x > 0$, выполняются при $\alpha > 0$ и $c > 0$ равенства

$$({}_H\mathfrak{I}^\alpha_{0+,c}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^c \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} y(t)\frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}-\alpha\\ k\end{matrix}\right\}_c x^k\frac{d^ky}{dx^k} = ({}_H\mathbb{I}^\alpha_{0+,c}y)(x),$$

$$({}_H\mathfrak{D}^\alpha_{0+,c}y)(x) = \frac{1}{x^c}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^c(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,c}y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ k\end{matrix}\right\}_c x^k\frac{d^ky}{dx^k} = ({}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}f)(x).$$

6. Дифференциальные уравнения с дробными производными адамаровского типа. Решение и анализ дробных дифференциальных уравнений с дробными производными Адамара привлекает внимание исследователей как в области чистой математики [17], так и в области их приложений к теории вероятностей [18]. Здесь мы рассмотрим дифференциальные уравнения с дробными производными адамаровского типа.

Получим обобщение формулы (3).

Лемма 6.1. *Имеют место формулы*

$$ {}_H\mathfrak{D}^\alpha_{0+,c}x^r = (c+r)^\alpha x^r \tag{36}$$

и

$$ {}_H\mathfrak{D}^\alpha_{0+}x^r = r^\alpha x^r. \tag{37}$$

Доказательство. Учитывая формулы (13) и (9), получим

$$ {}_H\mathfrak{D}^\alpha_{0+,c}x^r = \frac{1}{x^c}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^c\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,c}x^r = \frac{1}{x^c}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^c\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x\left(\frac{t}{x}\right)^c\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}t^{r-1}dt =$$

$$= \frac{1}{x^c}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}t^{r+c-1}dt = \left\{\ln\frac{x}{t} = z\right\} =$$

$$= \frac{1}{x^c}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^{r+c}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty z^{n-\alpha-1}e^{-(r+c)z}dz = \frac{(c+r)^{\alpha-n}}{x^c}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^{r+c} =$$

$$= \frac{(c+r)^{\alpha-n}}{x^c}\sum_{k=1}^{n}\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}x^k\frac{d^k}{dx^k}x^{r+c} = \frac{(c+r)^{\alpha-n}}{x^c}\sum_{k=1}^{n}\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}(r+c)_k x^{r+c} =$$

$$= x^r(c+r)^{\alpha-n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}(r+c)_k = (c+r)^\alpha x^r.$$

В частном случае, при $c = 0$, получаем (37).

Рассмотрим теперь, как действует на ${}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}$ преобразование Меллина, следуя [19].

Теорема 6.1. *Пусть $\alpha > 0$, $c \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{M}\left\{({}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}y)(x)\right\}(s)$ существует, тогда преобразование Меллина дробной производной адамаровского типа имеет вид*

$$\mathcal{M}\left\{({}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}y)(x)\right\}(s) = (c-s)^\alpha y^*(x).$$

Доказательство. Известно, что преобразование Меллина (11) от $\left(x\frac{d}{dx}\right)^m y(x)$ находится по формуле

$$\mathcal{M}\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^m y(x)\right\}(s) = (-s)^m y^*(s).$$

В силу формулы (12), получим

$$({}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}f)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\alpha\\k\end{matrix}\right\}_c x^k\frac{d^ky}{dx^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\alpha\\k\end{matrix}\right\}_c\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\left[\begin{matrix}k\\m\end{matrix}\right]\left(x\frac{d}{dx}\right)^m y(x).$$

Применим преобразование Меллина (11) к $({}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}y)(x)$, получим

$$\mathcal{M}\left\{({}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}y)(x)\right\}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\alpha\\k\end{matrix}\right\}_c\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\left[\begin{matrix}k\\m\end{matrix}\right](-s)^m y^*(s)=y^*(s)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\begin{matrix}\alpha\\k\end{matrix}\right\}_c\sum_{m=0}^{k}\left[\begin{matrix}k\\m\end{matrix}\right]s^m.$$

В силу (5), будем иметь

$$\mathcal{M}\left\{({}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}y)(x)\right\}(s)=y^*(s)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\begin{matrix}\alpha\\k\end{matrix}\right\}_c s^{(k)}.$$

Между восходящим факториалом $s^{(k)}=s(s+1)(s+2)...(s+k-1)$ и нисходящим факториалом $(s)_k=s(s-1)(s-2)...(s-k+1)$ существуют простые соотношения:

$$(s)_k=(-1)^k(-s)^{(k)},$$
$$s^{(k)}=(-1)^k(-s)_k.$$

Тогда, в силу формулы (см. [8], формула (8.2))

$$(c+z)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\alpha\\k\end{matrix}\right\}_c(z)_k$$

получим

$$\mathcal{M}\left\{({}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}y)(x)\right\}(s)=y^*(s)\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\alpha\\k\end{matrix}\right\}_c(-s)_k=(c-s)^\alpha y^*(s).$$

Следствие 6.1. *Пусть $\alpha>0$, $c\in\mathbb{R}$ и $\mathcal{M}\left\{({}_H\mathfrak{D}^\alpha_{0+,c}y)(x)\right\}(s)$ существует, тогда преобразование Меллина дробной производной адамаровского типа имеет вид*

$$\mathcal{M}\left\{({}_H\mathfrak{D}^\alpha_{0+,c}y)(x)\right\}(s)=(c-s)^\alpha y^*(s).$$

В книге [20], на стр.120, приведено другое доказательство этого следствия.

Теорема 6.2. *Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина* (11) *от нее существует и выполняется условие* (17)*, тогда решение неоднородного уравнение Коши – Эйлера вида*

$$L_{\vec{\alpha}}y=\sum_{k=0}^{n}b_k({}_H\mathbb{D}^{\alpha_k}_{0+,c}y)(x)=\varphi(x),\qquad \alpha_k>0,\qquad k=0,1,2,.... \tag{38}$$

имеет вид

$$y(x)=\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\varphi^*(s)}{\sum\limits_{k=0}^{n}b_k(c-s)^{\alpha_k}}\right](x). \tag{39}$$

Доказательство. Учитывая Теорему 6.1, применяя к (38) преобразование Меллина, получим:

$$\mathcal{M}[L_{\vec{\alpha}}y(x)](s)=\sum_{k=0}^{n}b_k\mathcal{M}\left[({}_H\mathbb{D}^{\alpha_k}_{0+,c}y)(x)\right](s)=\sum_{k=0}^{n}b_k(c-s)^{\alpha_k}y^*(s)=\varphi^*(s).$$

Применение обратного преобразования дает (39).

Пример 6.1. *Рассмотрим уравнение*

$$({}_H\mathbb{D}^\alpha_{0+,c}y)(x)=\theta(1-x).$$

Применяя преобразование Меллина, получим

$$(c-s)^\alpha y^*(s)=\frac{1}{s}\Rightarrow y^*(s)=\frac{1}{s(c-s)^\alpha}\Rightarrow y(x)=\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{1}{s(c-s)^\alpha}\right](x).$$

При $\alpha = 1/2$

$$y(x) = -\frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{c \cdot \log(x)}\right)}{\sqrt{c}},$$

где $\operatorname{erf}(x)$ *– функция ошибок, которая определяется как*

$$\operatorname{erf}\, x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Список литературы

1. Ross C.C. Differential Equations. An Introduction with Mathematica. 2th ed. New York: Springer; 2004. 431 p.
2. Boyce W.E., DiPrima R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem. 8th ed. New York: Wiley; 2005. 790 p.
3. Sadykov T. Graceful bases in solution spaces of differential and difference equations. Journal of Symbolic Computation. 2025;127:1–13. DOI: 10.1016/j.jsc.2024.10235
4. Takahasi S.E., Oka H., Miura T., Takagi H. A Cauchy-Euler Type Factorization of Operators. Tokyo Journal of Mathematics. 2008;31(2):489–493.
5. Berman G., Fryer K.D. Introduction to Combinatorics. New York: Academic Press; 2014. 314 p.
6. Деза Е.И. Специальные комбинаторные числа: От чисел Стирлинга до чисел Моцкина: всё о двенадцати известных числовых множествах комбинаторной природы (история, классические свойства, примеры и задачи). М.: Ленанд; 2018. 504 с.
7. Butzer P.L., Hauss M., Schmidt M. Factorial functions and Stirling numbers of fractional orders. Results. Math. 1989;16:16–48. DOI: 10.1007/BF03322642
8. Butzer P.L., Kilbas A.A., Trujillo J.J. Stirling functions of the second kind in the setting of difference and fractional calculus. Numer. Funct. Anal. Optim. 2003;24(7–8):673–711. DOI: 10.1081/nfa-120026366
9. Schwatt I.J. An Introduction to the Operations with Series. New York: Chelsea Publishing Co; 1962. 328 p.
10. Knopf P.M. The operator $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$ and its applications to series. Math. Mag. 2003;76(5):364–371. DOI: 10.1080/0025570X.2003.11953210
11. González G.J.R., Plaza Galvez L.F. Solución de la ecuación de Cauchy-Euler por medio de la transformada de Mellin. Scientia Et Technica. 2009;2(42):300–303. DOI: 10.22517/23447214.2651
12. Brychkov Y., Marichev O., Savischenko N. Handbook of Mellin Transforms. New York: Chapman and Hall/CRC; 2018. 609 p.
13. Balakrishnan A.V. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 1959;91:330–353. DOI: 10.2307/1993125
14. Westphal U. Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren, Teil I: Halbgruppenerzeuger, Teil II : Gruppenerzeuger'. Gompositio Math. 1970;22:67–103, 104–136.
15. Yosida K. Functional Analysis, 6 th ed. Berlin: Springer-Verlag; 1980. 504 p.
16. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. Минск: Наука и техника; 1987. 688 с.
17. Ahmad B., Alsaedi A., Ntouyas S.K., Tariboon J. Hadamard-Type Fractional Differential Equations, Inclusions and Inequalities. New York: Springer; 2017. 427 p.
18. Garra R., Orsingher E., Polito F. A Note on Hadamard Fractional Differential Equations with Varying Coefficients and Their Applications in Probability. Mathematics. 2018;6(1):1–10. DOI: 10.3390/math6010004
19. Butzer P.L., Kilbas A.A., Trujillo J.J. Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals. J. Math. Anal. Appl. 2002;269(1):1–27. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00001-X
20. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Switzerland: Elsevier Science; 2006. 540 p.

References

1. Ross CC. Differential Equations. An Introduction with Mathematica. 2th ed. New York: Springer; 2004. 431 p.
2. Boyce WE, DiPrima RC. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem. 8th ed. New York: Wiley; 2005. 790 p.
3. Sadykov T. Graceful bases in solution spaces of differential and difference equations. Journal of Symbolic Computation. 2025;127:1–13. DOI: 10.1016/j.jsc.2024.10235

4. Takahasi SE, Oka H, Miura T, Takagi H. A Cauchy-Euler Type Factorization of Operators. Tokyo Journal of Mathematics. 2008;31(2):489–493.
5. Berman G, Fryer KD. Introduction to Combinatorics. New York: Academic Press; 2014. 314 p.
6. Deza EI. Special combinatorial numbers: From Stirling numbers to Motzkin numbers: everything about the twelve well-known sets of numbers of combinatorial nature (history, classical properties, examples, and problems). Moscow: Lenand; 2018. 504 p. (In Russ.)
7. Butzer PL, Hauss M, Schmidt M. Factorial functions and Stirling numbers of fractional orders. Results. Math. 1989;16:16–48. DOI: 10.1007/BF03322642
8. Butzer PL, Kilbas AA, Trujillo JJ. Stirling functions of the second kind in the setting of difference and fractional calculus. Numer. Funct. Anal. Optim. 2003;24(7–8):673–711. DOI: 10.1081/nfa-120026366
9. Schwatt IJ. An Introduction to the Operations with Series. New York: Chelsea Publishing Co; 1962. 328 p.
10. Knopf PM. The operator $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$ and its applications to series. Math. Mag. 2003;76(5):364–371. DOI: 10.1080/0025570X.2003.11953210
11. González GJR, Plaza Galvez LF. Solución de la ecuación de Cauchy-Euler por medio de la transformada de Mellin. Scientia Et Technica. 2009;2(42):300–303. DOI: 10.22517/23447214.2651
12. Brychkov Y, Marichev O, Savischenko N. Handbook of Mellin Transforms. New York: Chapman and Hall/CRC; 2018. 609 p.
13. Balakrishnan AV. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 1959;91:330–353. DOI: 10.2307/1993125
14. Westphal U. Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren, Teil I: Halbgruppenerzeuger, Teil II : Gruppenerzeuger’. Gompositio Math. 1970;22:67–103, 104–136.
15. Yosida K. Functional Analysis, 6 th ed. Berlin: Springer-Verlag; 1980. 504 p.
16. Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Yverdon: Gordon and Breach; 1993. 1016 p.
17. Ahmad B, Alsaedi A, Ntouyas SK, Tariboon J. Hadamard-Type Fractional Differential Equations, Inclusions and Inequalities. New York: Springer; 2017. 427 p.
18. Garra R, Orsingher E, Polito F. A Note on Hadamard Fractional Differential Equations with Varying Coefficients and Their Applications in Probability. Mathematics. 2018;6(1):1–10. DOI: 10.3390/math6010004
19. Butzer PL, Kilbas AA, Trujillo JJ. Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals. J. Math. Anal. Appl. 2002;269(1):1–27. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00001-X
20. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Switzerland: Elsevier Science; 2006. 540 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.06.2025
Поступила после рецензирования 11.08.2025
Принята к публикации 18.08.2025

Received June 20, 2025
Revised August 11, 2025
Accepted August 18, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Махамуд Ахмат Ассад – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, научный сотрудник, Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, г. Грозный, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ahmat A. Mahamoud – Graduate Student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Elina L. Shishkina – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Researcher, Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

К содержанию