Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 2. С. 75–81.
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 2. P. 75–81.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 51-7, 519.6, 517
MSC 92B05
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-75-81
EDN XZOFDY

Эквиограниченность по Пуассону и эквиосциллируемость множеств всех решений систем дифференциальных уравнений

Лапин К. С., **Грицай И. О.**
(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)
Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева,
Россия, 430007, г. Саранск, ул. Студенческая, 11 А
klapin@mail.ru, ilya.gritsay1337@gmail.com

Аннотация. В данной статье исследуются осциллирующие движения динамических систем, а именно, движения, которые не являются ограниченными и, кроме того, обладают тем свойством, что не стремятся к бесконечности при стремлении времени к плюс бесконечности. Такие движения играют важную роль в различных задачах математической физики, небесной механики, термодинамики и астрофизики. В работе вводятся в рассмотрение новые понятия, связанные с осциллируемостью множества всех решений системы дифференциальных уравнений, а именно, введены понятие эквиосциллируемости множества всех решений и частичные аналоги этого понятия. На основе принципа сравнения Матросова с вектор-функциями Ляпунова и найденной автором связи между ограниченностью по Пуассону и осциллируемостью решений получены достаточные условия эквиосциллируемости множества всех решений, а также частичные аналоги этих условий. Работа продолжает исследования автора по изучению ограниченности и осциллируемости множеств всех решений дифференциальных систем с использованием функций Ляпунова и вектор-функций Ляпунова. Полученные теоретические результаты могут быть использованы для анализа сложных динамических систем в различных областях науки.

Ключевые слова: эквиограниченность по Пуассону, эквиосциллируемость, вектор-функция Ляпунова

Для цитирования: Лапин К. С., Грицай И. О. 2025. Эквиограниченность по Пуассону и эквиосциллируемость множеств всех решений систем дифференциальных уравнений. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 75–81. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-75-81 EDN XZOFDY

Original Research

Poisson Equiboundedness and Equioscillability of Sets of all Solutions of Systems of Differential Equations

Kirill S. Lapin, **Il'ya O. Gritsay**[2]
(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)
Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev,
11 A Studencheskaya St., Saransk 430007, Russia
klapin@mail.ru, ilya.gritsay1337@gmail.com

Abstract. In this paper we study oscillating motions of dynamic systems, namely, motions that are not bounded and, in addition, have the property that they do not tend to infinity as time tends to plus infinity. Such motions play an important role in various problems of mathematical physics, celestial mechanics, thermodynamics and astrophysics. In this paper we introduce new concepts related to the oscillability of the set of all solutions of a system of differential equations, namely, the concept of equioscillability of the set of all solutions and partial analogues of this concept. Based on the principle of comparison of Matrosov with Lyapunov vector functions and the connection between Poisson boundedness and oscillability of solutions found by the author, sufficient conditions for the equioscillability of the set of all solutions are obtained, as well as partial analogues of these conditions. The paper continues the author's research on the study of boundedness and oscillability of sets of all solutions of differential systems using Lyapunov functions and Lyapunov vector functions. The obtained theoretical results can be used for the analysis of complex dynamic systems in various fields of science.

Keywords: Poisson Equiboundedness of Solutions, Equioscillation of Solutions, Lyapunov Vector Function

For citation: Lapin K. S., Gritsay I. O. 2025. Poisson Equiboundedness and Equioscillability of Sets of all Solutions of Systems of Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 75–81. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-75-81 EDN XZOFDY

1. Введение. Осциллирующие движения динамических систем представляют собой важный класс решений, занимающий промежуточное положение между ограниченными и неограниченными траекториями. Впервые данный феномен был предложен в исследованиях Ж. Шази [1] при анализе возможных движений в классической задаче трех тел. Характерной особенностью таких движений является отсутствие их стремления к бесконечности при неограниченном возрастании времени, несмотря на неограниченность этих решений. Значительный вклад в изучение этого явления внесли иследования К. А. Ситникова [2], где было установлено существование осциллирующих решений в модели Колмогорова, и исследования А. М. Леонтовича [3], обнаружившего аналогичные траектории в биллиардных системах, связанных с эргодической теорией. Дальнейшее развитие теория получила в трудах В. М. Алексеева (см., например, [4]), который выявил осциллирующие режимы в квазислучайных динамических системах небесной механики. Особого внимания заслуживает цикл работ Л. Д. Пустыльникова (см., например, [5]), в которых осциллирующие движения использовались как ключевой инструмент для решения многих важных задач современной физики. Параллельно развивалась теория ограниченных по Пуассону или, более кратко, $\mathcal{P}$-ограниченных решений, основные понятия которой были введены в работах автора (см., например, [6]-[11]). Эти понятия обобщают классическое представление об ограниченности, допуская нахождение решения в заданной области лишь на специальной последовательности временных интервалов. На основе различных модификаций метода вектор-функций Ляпунова были получены достаточные условия различных типов $\mathcal{P}$-ограниченности множеств всех решений дифференциальных систем. В последующих исследованиях на основе синтеза методов вектор-функций Ляпунова, канонических областей Красносельского и направляющих функций были установлены достаточные условия существования $\mathcal{P}$-ограниченных решений. Важным этапом стала финальная характеризация понятия $\mathcal{P}$-ограниченности, позволившая выявить глубокую связь между этим понятием и осциллирующими решениями. Это привело к обнаружению достаточных условий различных видов осциллируемости множеств всех решений – равномерной, равномерной в пределе и тотальной. В настоящем исследовании вводятся новые классы осциллирующих множеств всех решений, а именно, введены понятие эквиосциллируемости множества всех решений и частичные аналоги этого понятия. Введенные понятия представляют собой специализированные случаи $\mathcal{P}$-эквиограниченности множества все решений дифференциальной системы. На основе применения принципа сравнения Матросова с вектор-функцими Ляпунова получены достаточные условия различных типов эквиосциллируемости множества всех решений. В качестве следствий получены достаточные условия соответствующих типов эквиосциллируемости множества всех решений на языке классических функций Ляпунова. Предлагаемый подход открывает новые возможности для анализа сложных динамических систем в различных областях математической физики.

1. Предварительные сведения. Пусть задана произвольная дифференциальная система

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

с непрерывной правой частью, где $\mathbb{R}^+ \equiv [0; +\infty)$, все решения которой продолжимы на $\mathbb{R}^+$.

Далее через $\|\cdot\|$ обозначена стандартная норма в $\mathbb{R}^n$. Для решения $x(t)$ системы (1) используется обозначение $x(t, t_0, x_0)$, если $x_0 = x(t_0)$. Для любого числа $t_0 \in \mathbb{R}^+$ используется обозначение $\mathbb{R}^+(t_0) \equiv [t_0; +\infty)$. Числовая последовательность $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ называется $\mathcal{P}$-последовательностью, если эта последовательность неотрицательна, возрастает и, кроме того, удовлетворяет условию $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = +\infty$. Каждой такой $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$ сопоставлено множество $M(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$. Наконец, для любых $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ используется обозначение $y = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Вспомним сначала необходимые базовые определения, связанные с понятиями ограниченности, $\mathcal{P}$-ограниченности (ограниченности по Пуассону) и осциллируемости данного решения системы (1).

Определение 1. [12] *Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы* (1) *называется y-ограниченным (ограниченным [13]), если для этого решения существует такая константа $\beta > 0$, что для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство*

$$\|y(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta \quad (\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta).$$

В противном случае решение системы (1) *называется y-неограниченным (неограниченным).*

Определение 2. [12]*Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы* (1) *называется y-$\mathcal{P}$-ограниченным ($\mathcal{P}$-ограниченным), если для этого решения существуют такая константа $\beta > 0$ и такая $\mathcal{P}$-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$, что для любых $t \in R^+(t_0) \bigcap M(\tau)$ справедливо неравенство*

$$\|y(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta \quad (\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta).$$

Из определений 1 и 2 видно, что любое y-ограниченное (ограниченное) решение системы (1) является y-$\mathcal{P}$-ограниченным ($\mathcal{P}$-ограниченным).

В работе [9] получен следующий признак, дающий финальную характеризацию y-$\mathcal{P}$-ограниченного ($\mathcal{P}$-ограниченного) решения системы (1).

Предложение 1. *Необходимым и достаточным условием y-$\mathcal{P}$-ограниченности ($\mathcal{P}$-ограниченности) решения $x(t,t_0,x_0)$ системы* (1) *является выполнение следующего требования:*

$$\varliminf_{t\to+\infty} y(t,t_0,x_0) \neq \infty \quad (\varliminf_{t\to+\infty} x(t,t_0,x_0) \neq \infty). \quad \blacksquare$$

Определение 3. [9], [10] *Решение $x(t,t_0,x_0)$ системы* (1) *называется y-осциллирующим (осциллирующим [1] (см. также [5]), если это решение является y-неограниченным (неограниченным) и, кроме того, выполнено условие*

$$\varliminf_{t\to+\infty} y(t,t_0,x_0) \neq \infty \quad (\varliminf_{t\to+\infty} x(t,t_0,x_0) \neq \infty).$$

Из данного определения, пользуясь предложением 1, получаем, что каждое y-$\mathcal{P}$-ограниченное ($\mathcal{P}$-ограниченное) решение системы (1) является либо y-ограниченным (ограниченным) либо y-осциллирующим (осциллирующим). Как следствие имеем следующее утверждение.

Предложение 2. [9], [10] *Необходимым и достаточным условием y-осциллируемости (осциллируемости) решения $x(t,t_0,x_0)$ системы* (1) *является одновременное выполнение следующих требований: 1) решение $x(t,t_0,x_0)$ является y-$\mathcal{P}$-ограниченным ($\mathcal{P}$-ограниченным); 2) решение $x(t,t_0,x_0)$ является y-неограниченным (неограниченным).* $\blacksquare$

Вспомним теперь необходимые базовые определения, которые связаны с понятиями эквиограниченности и $\mathcal{P}$-эквиограниченности (эквиограниченности по Пуассону) множества всех решений системы (1). Далее для любых $x = (x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$ будем употреблять следующие обозначения:

$$y = (x_1,\ldots,x_k)^T \in \mathbb{R}^k \quad \text{и} \quad z = (x_1,\ldots,x_m)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Определение 4. [11] *Множество всех решений системы* (1) *называется y-z_0-эквиограниченным, если для произвольных $\alpha \geqslant 0$ и $t_0 \geqslant 0$ существует такое $\beta = \beta(t_0,\alpha) > 0$, что для каждого решения $x(t,t_0,x_0)$, $\|z_0\| \leqslant \alpha$, системы* (1) *при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство $\|y(t,t_0,x_0)\| \leqslant \beta$. В случае, когда $m = n$, y-z_0-эквиограниченность множества всех решений системы* (1) *называется [12] y-эквиограниченностью множества всех решений этой системы. В случае же, когда $k = m = n$, y-z_0-эквиограниченность множества всех решений системы* (1) *называется [13] эквиограниченностью множества всех решений этой системы.*

Определение 5. [6] *Множество всех решений системы* (1) *называется y-z_0-$\mathcal{P}$-эквиограниченным, если для дифференциальной системы* (1) *найдется такая $\mathcal{P}$-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$, и для любых $\alpha \geqslant 0$ и $t_0 \in M(\tau)$ существует такое $\beta = \beta(t_0,\alpha) > 0$, что для каждого решения $x(t,t_0,x_0)$, $\|z_0\| \leqslant \alpha$, системы* (1) *при всех $t \in R^+(t_0) \bigcap M(\tau)$ справедливо неравенство $\|y(t,t_0,x_0)\| \leqslant \beta$. В случае, когда $k \leqslant m = n$, $y - z_0 - \mathcal{P}$-эквиограниченность множества всех решений системы* (1) *называется $y - \mathcal{P}$-эквиограниченностью множества всех решений этой системы. В случае же, когда $k = m = n$, $y - z_0 - \mathcal{P}$-эквиограниченность множества всех решений системы* (1) *называется $\mathcal{P}$-эквиограниченностью множества всех решений этой системы.*

Из определений 4 и 5 видно, что если множество всех решений системы (1) является y-z_0-эквиограниченным, то это множество y-z_0-$\mathcal{P}$-эквиограничено. В частности, если множество всех решений системы (1) y-эквиограничено, то это множество y-$\mathcal{P}$-эквиограничено. Наконец, если множество всех решений системы (1) эквиограничено, то это множество является $\mathcal{P}$-эквиограниченным. Кроме того, легко видеть, что без ограничения общности функцию $\beta = \beta(t_0,\alpha)$ из определений 4 и 5 можно считать неубывающей по α при каждом фиксированном $t_0 \in M(\tau)$.

В некоторых случаях при работе с множеством всех решений системы (1) требуется точно указать нужную $\mathcal{P}$-последовательность. В таких случаях будем говорить, что множество всех решений системы (1) y-z_0-$\mathcal{P}$-эквиограничено относительно данной $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Аналогично будем говорить для y-$\mathcal{P}$-эквиограниченности, а также для $\mathcal{P}$-эквиограниченности множества всех решений системы (1).

Легко видеть, что если множество всех решений системы (1) y-z_0-$\mathcal{P}$-эквиограничено, то любое решение этой системы y-$\mathcal{P}$-ограничено. Действительно, из определения 5 видно, что каждое решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1), где $t_0 \in M(\tau)$, является y-$\mathcal{P}$-ограниченным. Покажем, что любое решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1), для которого $t_0 \notin M(\tau)$, также является y-$\mathcal{P}$-ограниченным. Рассмотрим для решения $x(t,t_0,x_0)$ решение $x(t,t_0',x_0')$ системы (1), где $t_0' > t_0$, $t_0' \in M(\tau)$ и $x_0' = x(t_0',t_0,x_0)$. Решение $x(t,t_0',x_0')$ является y-$\mathcal{P}$-ограниченным, поскольку $t_0' \in M(\tau)$. Из этого, пользуясь предложением 1, имеем $\varliminf\limits_{t\to+\infty} y(t,t_0',x_0') \neq \infty$. Так как

$$\varliminf_{t\to+\infty} y(t,t_0,x_0) = \varliminf_{t\to+\infty} y(t,t_0',x_0') \neq \infty,$$

то из предложения 1 следует, что решение $x(t,t_0,x_0)$ является y-$\mathcal{P}$-ограниченным. В частности, при $k \leqslant m = n$ получаем, что если множество всех решений системы (1) y-$\mathcal{P}$-эквиограничено, то любое решение этой системы y-$\mathcal{P}$-ограничено. При $k = m = n$ получаем, что если множество всех решений системы является (1) $\mathcal{P}$-эквиограниченным, то любое решение этой системы $\mathcal{P}$-ограничено.

Освежим теперь в памяти необходимые сведения о вектор-функциях Ляпунова [14], [15]. Пусть задана некоторая непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $l \geqslant 1$. Производная $\dot{V}(t,x)$ в силу системы (1) этой вектор-функции определяется обычным способом, т. е. покомпонентно. Далее для любых векторов $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l)^T \in \mathbb{R}^l$ и $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_l)^T \in \mathbb{R}^l$ используется обозначение $\vartheta \leqslant \psi$, если $\vartheta_i \leqslant \psi_i$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant l$. Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ и дифференциальная система

$$\dot{\vartheta} = g(t, \vartheta), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \vartheta \in \mathbb{R}^l, \tag{2}$$

с непрерывной правой частью называются, соответственно, вектор-функцией Ляпунова и системой сравнения для системы (1), если для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место следующее неравенство:

$$\dot{V}(t,x) \leqslant g(t, V(t,x)). \tag{3}$$

Далее будем предполагать, что вектор-функция $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ удовлетворяет условию Важевского, которое состоит в том, что для каждого $1 \leqslant s \leqslant l$ компонента $g_s : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ этой вектор-функции является неубывающей по переменным $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{s-1}, \vartheta_{s+1}, \ldots, \vartheta_l$ при любом фиксированном значении переменной ϑ_s. Выполнение условия Важевского для правой части системы (2) гарантирует, что среди всех решений $\vartheta(t, t_0, \vartheta_0)$ этой системы существует так называемое верхнее решение $\overline{\vartheta}(t, t_0, \vartheta_0)$, т. е. решение, которое для любых $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ удовлетворяет неравенству $\vartheta(t, t_0, \vartheta_0) \leqslant \overline{\vartheta}(t, t_0, \vartheta_0)$. Главным свойством верхних решений является то, что для решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), вектор-функции Ляпунова $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ и верхнего решения $\overline{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0))$ системы сравнения (2) для системы (1) имеет место справедливое при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ неравенство

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leqslant \overline{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0)). \tag{4}$$

3. Полученные результаты. Введем сначала основное понятие этой работы, а именно, введем понятие y-z_0-эквиосциллируемости множества всех решений, представляющее собой специальный случай понятия y-z_0-$\mathcal{P}$-эквиограниченности множества всех решений.

Определение 6. *Множество всех решений системы* (1) *назовем y-z_0-эквиосциллирующим, если множество всех решений этой системы y-z_0-$\mathcal{P}$-эквиограничено и, кроме того, каждое решение этой системы является y-неограниченным. В случае, когда $k \leqslant m = n$, множество всех решений системы* (1) *будем называть y-эквиосциллирующим. В случае же, когда $k = m = n$, множество всех решений системы* (1) *будем называть эквиосциллирующим.*

Из сказанного выше следует, что если множество всех решений дифференциальной системы (1) y-z_0-эквиосциллирует, то любое решение этой системы является y-осциллирующим. В частности, если множество всех решений системы (1) y-эквиосциллирует, то любое решение этой системы является y-осциллирующим. Наконец, если множество всех решений системы (1) эквиосциллирует, то любое решение этой системы является осциллирующим.

Далее для произвольных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l)^T \in \mathbb{R}^l$ и $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant l$ будем употреблять обозначения $\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_p)^T$ и $\gamma = (\xi_1, \ldots, \xi_q)^T$. Кроме того, для каждой $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ вместе с указанным выше множеством $M(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$ далее будет использоваться еще и, так сказать, «дополнительное к $M(\tau)$» множество $N(\tau)$, т. е. множество

$$N(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i}; \tau_{2i+1}].$$

Получим теперь, пользуясь техникой вектор-функций Ляпунова, достаточное условие y-z_0-эквиосциллируемости множества всех решений системы (1).

Теорема 1. *Предположим, что для системы* (1) *имеются следующие объекты:*

a) $\mathcal{P}$-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$;

b) вектор-функция Ляпунова $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ с системой сравнения (2)*;*

c) числа $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant l$;

d) непрерывно дифференцируемая положительная функция $W : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условиям:

1) для любых $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$V_1(t,x) \geqslant 0, \ldots, V_q(t,x) \geqslant 0;$$

2) для любых $(t,x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$b(\|y\|) \leqslant V_1(t,x) + \cdots + V_p(t,x),$$

где $b(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$ – некоторая неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$;

3) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$V_1(t, x) + \cdots + V_q(t, x) \leqslant a(t, \|z\|),$$

где $a(t, r)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая положительная функция, которая возрастает по r при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$;

4) для любых $(t, x) \in N(\tau) \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$W(t, x) \leqslant d(\|y\|),$$

где $d(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$ – некоторая положительная и возрастающая функция;

5) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\dot{W}(t, x) \geqslant h(W(t, x)),$$

где $h(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$ – некоторая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $h(r) > 0$ при любом $r > 0$. Кроме того, пусть множество всех решений системы сравнения (2) для системы (1) является μ-γ_0-$\mathcal{P}$-эквиограниченным относительно $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Тогда множество всех решений системы (1) является y-z_0-эквиосциллирующим.

Доказательство. Установим сначала, что каждое решение системы (1) является y-неограниченным. Проще всего доказывается это от противного. Действительно, предположим, что любое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является y-ограниченным, т. е. для этого решения существует такое $\beta > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство $\|y(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$. При помощи этого неравенства, пользуясь условием 4) теоремы, получаем для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \bigcap N(\tau)$ неравенство $W(t, x(t, t_0, x_0)) \leqslant d(\beta)$. Теперь, используя условие 5) теоремы, получаем для любых $\mathbb{R}^+(t_0)$ неравенство $W(t, x(t, t_0, x_0)) \geqslant W(t_0, x_0) + h(W(t_0, x_0))(t - t_0)$. Из двух последних неравенств следует справедливость неравенства

$$d(\beta) \geqslant W(t_0, x_0) + h(W(t_0, x_0))(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}^+(t_0) \bigcap N(\tau),$$

что является абсурдом, поскольку $h(W(t_0, x_0)) > 0$ и $d(\beta)$ – константа. Таким образом, получено противоречие и, следовательно, каждое решение системы (1) является y-неограниченным. Докажем теперь, что множество всех решений системы (1) $y - z_0 - \mathcal{P}$-эквиограничено. Рассмотрим любое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), где $\|z_0\| \leqslant \alpha$, системы (1). С целью поиска для этого решения требуемого в определении 5 числа $\beta = \beta(t_0, \alpha)$ заметим сначала, имея в виду неравенство (4) и условие 2), что для любого $t \in M(\tau)$ справедливо неравенство

$$b(\|y(t, t_0, x_0)\|) \leqslant \overline{\vartheta}_1(t, t_0, V(t_0, x_0)) + \cdots + \overline{\vartheta}_p(t, t_0, V(t_0, x_0)),$$

где $\overline{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0)) = (\overline{\vartheta}_1(t, t_0, V(t_0, x_0)), \ldots, \overline{\vartheta}_l(t, t_0, V(t_0, x_0)))^T$ – верхнее решение системы сравнения (2) для системы (1). По условию теоремы множество всех решений системы сравнения (2) для системы (1) μ-γ_0-$\mathcal{P}$-эквиограничено относительно $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Поэтому, для верхнего решения $\overline{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0))$, где $t_0 \in M(\tau)$, системы сравнения (2) и нормы $\|V^\gamma(t_0, x_0)\|$ вектора $V^\gamma(t_0, x_0) = (V_1(t_0, x_0), \ldots, V_q(t_0, x_0))^T$, существует число $\xi(t_0, \|V^\gamma(t_0, x_0)\|)$ такое, что для любых $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \bigcap M(\tau)$ имеет место неравенство

$$\| \overline{\mu}(t, t_0, V(t_0, x_0))\| \leqslant \xi(t_0, \|V^\gamma(t_0, x_0)\|),$$

где $\overline{\mu}(t, t_0, V(t_0, x_0)) = (\overline{\vartheta}_1(t, t_0, V(t_0, x_0)), \ldots, \overline{\vartheta}_p(t, t_0, V(t_0, x_0))^T$. Из условий 1) и 3) видно, что для любого $t_0 \in M(\tau)$ справедливо неравенство $\|V^\gamma(t_0, x_0)\| \leqslant a(t_0, \alpha)$. Пользуясь теперь тем, что функция $\xi = \xi(t_0, r)$ не убывает при любом фиксированном $t_0 \in M(\tau)$, получаем справедливое для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \bigcap M(\tau)$ неравенство

$$p \cdot \|\overline{\mu}(t, t_0, V(t_0, x_0))\| \leqslant p \cdot \xi(t_0, a(t_0, \alpha)).$$

Из этого следует, что для каждого $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \bigcap M(\tau)$ справедливо неравенство $b(\|y(t, t_0, x_0)\|) \leqslant p \cdot \xi(t_0, a(t_0, \alpha))$. Так как число p фиксировано, то при помощи условия $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ можно выбрать такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$, что $p \cdot \xi(t_0, a(t_0, \alpha)) \leqslant b(\beta)$. Из этого неравенства получаем справедливое для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \bigcap M(\tau)$ неравенство $b(\|y(t, t_0, x_0)\|) \leqslant b(\beta)$. Так как по условию теоремы функция $b(r)$ является неубывающей, то из последнего неравенства вытекает, что для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \bigcap M(\tau)$ справедливо неравенство $\|y(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$. Таким образом, установлено, что множество всех решений системы (1) y-z_0-$\mathcal{P}$-эквиограничено. Из этого, учитывая доказанную выше y-неограниченность каждого решения системы (1), получаем, что множество всех решений системы (1) является y-z_0-эквиосциллирующим. Теорема доказана. ■

Отметим, что если в формулировке теоремы 1 положить $z = x$, то теорема 1 становится достаточным условием y-эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке вектор-функций

Ляпунова. Если же в формулировке теоремы 1 положить $y = z = x$, то теорема 1 становится достаточным условием эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке вектор-функций Ляпунова.

Рассмотрим теперь случай, когда в теореме 1 для вектор-функций Ляпунова полагается $l = 1$, т. е. когда вектор-функции Ляпунова являются функциями Ляпунова. При помощи неравенства (3) несложно видеть, что в рассматриваемом случае теорема 1 превращается в следующее достаточное условие y-z_0-эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова.

Предложение 3. *Предположим, что для системы* (1) *имеются следующие объекты:*

a) $\mathcal{P}$-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$;

b) неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (функция Ляпунова)

c) непрерывно дифференцируемая положительная функция $W : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

e) непрерывная функция $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

которые удовлетворяют условиям:

1) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо двойное неравенство $b(\|y\|) \leqslant V(t, x) \leqslant a(t, \|z\|)$, где функции $b(r)$ и $a(t, r)$ такие же, как в теореме 1;

2) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $\dot{V}(t, x) \leqslant g(t, V(t, x))$;

3) для любых $(t, x) \in N(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $W(t, x) \leqslant d(\|y\|)$, где функция $d(r)$ такая же, как в теореме 1;

4) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $\dot{W}(t, x) \geqslant h(W(t, x))$, где функция $h(r)$ такая же, как в теореме 1;

5) множество всех решений уравнения $\dot{\vartheta} = g(t, \vartheta)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ является $\mathcal{P}$-эквиограниченным относительно $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Тогда множество всех решений системы (1) *является y-z_0-эквиосциллирующим.* ■

В заключение отметим, что если в формулировке предложения 3 положить $z = x$, то предложение 3 превращается в достаточное условие y-эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова. Если же в формулировке предложения 3 положить $y = z = x$, то предложение 3 превращается в достаточное условие эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова.

Список литературы

1. Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps quand le temps croit indefiniment. *Annales de l'Ecole Norm. Sup.* 3^{e}*ser.* 1922;39:29-130.
2. Ситников К.А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел. *Доклады Академии наук СССР.* 1960;133(2):303-306.
3. Леонтович А.М. О существовании осциллирующих траекторий в одной биллиардной задаче. *Докл. АН СССР.* 1962;145(3):523-526.
4. Алексеев В.М. Квазислучайные динамические системы. II. *Математический сборник.* 1968;77(119):545-600.
5. Пустыльников Л.Д. О строгом обосновании возможности неограниченного роста энергии частиц в одной задаче ядерной физики. *Доклады Академии наук СССР.* 1985;283(3):550-553.
6. Лапин К.С. Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова. *Дифференциальные уравнения.* 2018;54(1):40–50. DOI: 10.1134/S0374064118010053
7. Лапин К.С. Вектор-функции Ляпунова, канонические области Красносельского и существование ограниченных по Пуассону решений. *Дифференциальные уравнения.* 2020;56(10):1304-1309. DOI: 10.1134/S0374064120100027
8. Лапин К.С. Вектор-функции Ляпунова, вращения векторных полей, направляющие функции и существование ограниченных по Пуассону решений. *Дифференциальные уравнения.* 2021;57(3):306-312. DOI:10.31857/S037406412103002X
9. Лапин К.С. Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений. Саранск: РИЦ МГПУ; 2022. 163 с.
10. Лапин К.С. Тотальная ограниченность по Пуассону и тотальная осциллируемость решений систем дифференциальных уравнений. *Владикавказский математический журнал.* 2022;24(4):105-116. DOI: 10.46698/w0398-0994-2990-z
11. Лапин К.С. Высшие производные функций Ляпунова и частичная ограниченность решений с частично контролируемыми начальными условиями. *Матем. заметки.* 2017;101(6):883-893. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11156
12. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных. М.: Наука; 1987. 254 с.
13. Йосидзава Т. Функция Ляпунова и ограниченность решений. *Математика.* 1965;5:95-127.
14. Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И., Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М.: Наука; 1987. 312 с.

15. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит; 2001. 373 с.

References

1. Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps quand le temps croit indefiniment. *Annales de l'Ecole Norm. Sup.* 3^{e} *ser.* 1922;39:29-130.
2. Sitnikov K The Existence of Oscillatory Motions in the Three-Body Problems. *Soviet Physics Doklady* 1960;5:647–650.
3. Leontovich AM. On the Existence of Unbounded Oscillating Trajectories in a Billiard Problem. *Doklady Akademii Nauk SSSR [Reports of the Academy of Sciences of USSR].* 1962;145(3):523–526. (In Russ.)
4. Alekseev VM. Quasirandom Dynamical Systems. II. One-Dimensional Nonlinear Vibrations in a Periodically Perturbed Field. *Mathematics of the USSR-Sbornik.* 1968;6(4):505–560.
DOI: 10.1070/SM1968v006n04ABEH001074.
5. Pustyl'nikov LD. Strict Justification of the Possibility of Unbounded Increase in Particle Energy in a Problem of Nuclear Physics. *Doklady Akademii Nauk SSSR [Reports of the Academy of Sciences of USSR].* 1985;283(3):550–553. (In Russ.)
6. Lapin KS. Uniform Boundedness in the Sense of Poisson of Solutions of Systems of Differential Equations and Lyapunov Vector Functions. *Differential Equations.* 2018; 54(1):38–48. DOI: 10.1134/S0012266118010056.
7. Lapin KS. Lyapunov Vector Functions, Krasnosel'skii Canonical Domains, and Existence of Poisson Bounded Solutions. *Differential Equations.* 2020;56(10):1270–1275. DOI: 10.1134/S001226612001000 2X.
8. Lapin, KS. Lyapunov Vector Functions, Rotation of Vector Fields, Guiding Functions, and the Existence of Poisson Bounded Solutions. *Differential Equations.* 2021;57(3):284–290. DOI: 10.1134/S0012266121030022.
9. Lapin KS. Ogranichennost' po Puassonu reshenii sistem differentsial'nykh uravnenii [Poisson boundedness of solutions to systems of differential equations.] Saransk: RITS MGPU; 2022. 163 p. (In Russ.)
10. Lapin KS. Poisson total boundedness and total oscillability of solutions to systems of differential equations. *Siberian Mathematical Journal.* 2023;64(6):988–995. DOI:https://doi.org/10.1134/S0037446623040201
11. Lapin KS. Higher-Order Derivatives of Lyapunov Functions and Partial Boundedness of Solutions with Partially Controllable Initial Conditions. *Mathematical Notes.* 2017;101(6):1000–1008.
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434617050273
12. Rumyantsev VV. Oziraner AS. Ustoychivost' i stabilizatsiya dvijeniya otnositel'no chati peremennyh [Stability and stabilization of motion with respect to part of variables]. Moscow: Nauka, 1987, 253 p. (In Russ.)
13. Yoshizawa T. Liapunovs function and boundedness of solutions. *Funkcialaj Ekvacioj.* 1959;2:95–142.
14. Abdullin RZ., Anapolskii LY., Voronov AA., Zemlyakov AS., Kozlov RI., Malikov AI., Matrosov VM. Metod vektornykh funktsii Lyapunova v teorii ustoichivosti [The method of Lyapunov vector functions in stability theory]. Moscow: Nauka; 1987. 312 p. (In Russ.)
15. Matrosov VM. Metod vektornyh funktsiy Lyapunova: analiz dinamicheskih svoystv nelineynyh sistem [Method of Lyapunov Vector Functions: Analisys of Dynamical Properties of Nonlinear Systems], Moscow, Fizmatlit, 2001, 373 p. (in Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 24.04.2025
Поступила после рецензирования 19.05.2025
Принята к публикации 23.05.2025

Received April 24, 2025
Revised May 19, 2025
Accepted May 23, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Лапин Кирилл Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математики, экономики и методик обучения, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск, Россия

Грицай Илья Олегович – аспирант кафедры математики, экономики и методик обучения, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kirill S. Lapin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor of the Department of Mathematics, Economics and Educational Methods, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev, Saransk, Russia

Il'ya O. Gritsay – Graduate Student of the Department of Mathematics, Economics and Educational Methods, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev, Saransk, Russia

К содержанию