

Бифуркации петли сепаратрисы сшитого седло-узла в типичном двухпараметрическом семействе кусочно-гладких векторных полей

Ройтенберг В. Ш. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Половинкиным И. П.)

Ярославский государственный технический университет,
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский проспект, 88
vroitenberg@mail.ru

Аннотация. Рассматривается динамическая система на плоскости, заданная кусочно-гладким векторным полем. Пусть это векторное поле имеет такую особую точку S на линии L переключения, что в окрестности S с одной стороны L поле совпадает с гладким векторным полем, для которого S является седло-узлом с устойчивым параболическим сектором и центральным многообразием, трансверсальным L , а с другой стороны L оно совпадает с гладким векторным полем, трансверсальным L . Предполагается также, что из точки S выходит положительная полутраектория Γ , не содержащая особых точек, отличных от S , предельная к S . Рассматривается типичное двухпараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей – деформация рассматриваемого векторного поля. Описано множество параметров, при которых векторное поле из этого семейства имеет устойчивую периодическую траекторию, рождающуюся из петли Γ .

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, седло-узел, петля сепаратрисы, бифуркация, устойчивая периодическая траектория

Для цитирования: Ройтенберг В.Ш. Бифуркации петли сепаратрисы сшитого седло-узла в типичном двухпараметрическом семействе кусочно-гладких векторных полей. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):186–192. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-186-192 EDN MPPBSO

Original Research

Bifurcations of a Separatrix Loop of a Sewn Saddle-Node in a Generic Two-Parameter Family of Piecewise Smooth Vector Fields

Vladimir Sh. Roitenberg 

(Article submitted by a member of the editorial board Polovinkin I.P.)

Yaroslavl State Technical University,
88 Moscow Avenue, Yaroslavl 150023, Russia
vroitenberg@mail.ru

Abstract. We consider a dynamical system on the plane defined by a piecewise smooth vector field. Let this vector field have a singular point S on the switching line L such that in the neighborhood of S , on the one side of L , the field coincides with a smooth vector field for which S is a saddle-node with a stable parabolic sector and a central manifold transversal to L , and on the other side, it coincides with a smooth vector field transversal to L . It is also assumed that from the point S go a positive semitrajectory Γ , which does not contain singular points different from S and is limiting to S . We consider a generic two-parameter family of piecewise smooth vector fields, a deformation of the vector field under consideration. We describe a set of parameters for which a vector field from this family has a stable periodic trajectory born from a loop Γ .

Keywords: Piecewise Smooth Vector Field, Saddle-Node, Separatrix Loop, Bifurcation, Stable Periodic Trajectory

For citation: Roitenberg VSh. Bifurcations of a Separatrix Loop of a Sewn Saddle-Node in a Generic Two-Parameter Family of Piecewise Smooth Vector Fields. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):186–192 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-186-192 EDN MPPBSO

1. Введение. Теория бифуркаций гладких динамических систем началась с работ А.А. Андропова и его сотрудников 1930-х годов. Одной из первых были описаны локальная бифуркация седло-узла, а также нелокальная бифуркация петли сепаратрисы седло-узла, из которой рождается устойчивая периодическая траектория [1, 2]. В многомерном случае рождение периодической траектории из петли сепаратрисы седло-узла было доказано Л.П. Шильниковым [3]. Для кусочно-гладких динамических систем на плоскости бифуркации особых точек рассматривались в работах [4, 5], а также [6, 7, 8, 9]. В частности, там исследованы и бифуркации особых точек – «сшитых седло-узлов», бифурцирующих аналогично седло-узлу гладкой динамической системы. Бифуркации рождения периодической траектории из петли сепаратрисы сшитого седло-узла динамической системы на плоскости, задаваемой соответственно кусочно-гладким разрывным и непрерывным векторным полем, при типичных однопараметрических деформациях поля описаны в [10] и [11].

В настоящей работе рассматриваются бифуркации петли сепаратрисы особой точки на линии l переключения, «сшитой» из седло-узла гладкого векторного поля, заданного с одной стороны l и неособой точки гладкого векторного поля, заданного с другой стороны l , при типичных двухпараметрических деформациях кусочно-гладкого векторного поля.

2. Условия и результаты. Пусть компактное множество G на плоскости $\mathbb{R}^2$ с C^∞ -гладкой границей представлено в виде объединения компактных множеств G_k ($k = 1, \dots, m$) с C^∞ -гладкими границами ∂G_k , таких, что $G_i \cap G_j = \partial G_i \cap \partial G_j \neq \emptyset$ при $i \neq j$. Обозначим $\mathcal{D}$ разбиение G на множества G_k . Пусть $\text{Vec}^r(G)$ – топологическое векторное пространство C^r -векторных полей на G с C^r -топологией ($r \geq 3$) [12]. Кусочно-гладкое векторное поле на G с разбиением $\mathcal{D}$, заданное векторными полями $\mathbf{v}^k \in \text{Vec}^r(G)$ ($k = 1, \dots, m$) – класс всех векторных полей $\tilde{\mathbf{v}} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ таких, что $\tilde{\mathbf{v}}|_{\text{int}G_k} = \mathbf{v}^k|_{\text{int}G_k}$. Отождествим его с элементом $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m)$ топологического векторного пространства

$$\text{Vec}^r(G, \mathcal{D}) := \underbrace{\text{Vec}^r(G) \oplus \dots \oplus \text{Vec}^r(G)}_m.$$

Траектории векторных полей $\tilde{\mathbf{v}}$ будем определять по правилу выпуклого доопределения в точках линий переключения $G_{ij} := \partial G_i \cap \partial G_j \neq \emptyset$ [5]. Они не зависят от выбора представителя $\tilde{\mathbf{v}}$ класса и потому называются *траекториями поля* $\mathbf{v}$.

Пусть E_0 – окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим семейство кусочно-гладких векторных полей с базой $E_0 - C^r$ -отображение $E_0 \ni \varepsilon \mapsto \mathbf{v}_\varepsilon = (\mathbf{v}_\varepsilon^1, \dots, \mathbf{v}_\varepsilon^m) \in \text{Vec}^r(G, \mathcal{D})$, удовлетворяющее сформулированным ниже условиям (Y1)–(Y4).

(Y1) Векторное поле $\mathbf{v}_0^i$ имеет седло-узел $S_0 \in G_{ij}$ с устойчивым параболическим сектором.

По теореме о центральном многообразии и теореме редукции [13, глава 5] существуют такие окрестность нуля $E_1 \subset E_0$ и координаты (x, y) , $|x| < d_0$, $|y| < d_1$ в окрестности V_ε точки S_0 , в которых поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, $\varepsilon \in E_1$ имеет вид

$$P(x, \varepsilon)\partial/\partial x + Q(x, y, \varepsilon)\partial/\partial y, \quad (1)$$

где $P, Q \in C^{r-1}$, $Q(x, 0, \varepsilon) \equiv 0$, $\lambda := Q'_y(0, 0, 0) < 0$,

$$P(0, 0) = P'_x(0, 0) = 0, \quad a := P''_{xx}(0, 0) > 0. \quad (2)$$

(Y2) При $\varepsilon = 0$ центральное многообразие, задаваемое уравнением $y = 0$, трансверсально пересекается с G_{ij} в точке S_0 .

При выполнении этого условия координаты (x, y) можно выбрать так, что $G_{ij} \cap V_\varepsilon$ задается уравнением $x = \xi(y, \varepsilon)$, $y \in (-d_1, d_1)$, где

$$\xi(0, \varepsilon) = 0, \quad \xi'_y(y, \varepsilon) < 0. \quad (3)$$

Будем также считать, что точки центрального многообразия с координатами $(x, 0)$ при $x < 0$ ($x > 0$) лежат в G_i (G_j).

(Y3) Вектор $\mathbf{v}_0^j(S_0)$ не касается G_{ij} и направлен внутрь G_j . Положительная полутраектория Γ_0 поля $\mathbf{v}_0$, начинающаяся в точке S_0 как положительная траектория поля $\mathbf{v}_0^j$, не содержит особых точек кроме S_0 и ω -предельна к S_0 , входя в S_0 по направлению оси x (рис. 1).

Из (2) по теореме о неявной функции следует, что найдутся такие число $d \in (0, d_0)$ и окрестность нуля $E_2 \subset E_1$, что уравнение $P'_x(x, \varepsilon) = 0$ имеет решение $x = \rho_1(\varepsilon) \in (-d, d)$, $\varepsilon \in E_2$, где $\rho_1(\cdot) \in C^{r-1}$, $\rho_1(0) = 0$. Обозначим $\rho_2(\varepsilon) := P(\rho_1(\varepsilon), \varepsilon)$.

(Y4) $\det(\partial \rho_k(0)/\partial \varepsilon_l) \neq 0$.

Сделаем в некоторой окрестности нуля $E_3 \subset E_2$ замену параметров $\bar{\varepsilon}_k = \rho_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2$ и вернемся к их «старым» обозначениям. Теперь можно считать $E_3 = (-\delta_0, \delta_0)^2$, $\delta_0 < d$,

$$P(x, \varepsilon) = \varepsilon_2 + a(x - \varepsilon_1)^2 + R(x, \varepsilon), \quad (4)$$

где $R \in C^3$, и при всех $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2$

$$R(\varepsilon_1, \varepsilon) = R'_x(\varepsilon_1, \varepsilon) = R''_{xx}(0, 0) = 0, \quad |R(x, \varepsilon)| < (a/2)(x - \varepsilon_1)^2 \text{ для } x \in [-d, d]; \quad (5)$$

$$\text{sgn } P'_x(x, \varepsilon) = \text{sgn } (x - \varepsilon_1) \text{ для } x \in [-d, d]; \quad (6)$$

$$Q(x, 0, \varepsilon) \equiv 0, \quad 2\lambda < Q'_y(x, y, \varepsilon) < \lambda/2 \text{ для } x, y \in [-d, d]. \quad (7)$$

Теорема. Пусть выполняются условия (Y1)–(Y4). Тогда существуют окрестность $U(\Gamma_0)$ кривой Γ_0 , число $\delta > 0$ и разбиение области $E := (-\delta, \delta)^2$ параметров на две части, $E_+ := (-\delta, \delta) \times (0, \delta) \cup \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \beta(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 \leq 0\}$, где $\beta : [0, \delta) \rightarrow (-\delta, 0]$, $\beta \in C^1$, $\beta(0) = \beta'(0) = 0$, и $E_- := E \setminus E_+$ такие, что поле $\mathbf{v}_\varepsilon$ при $\varepsilon \in E_-$ не имеет в $U(\Gamma_0)$ периодических траекторий, а при $\varepsilon \in E_+$ имеет в $U(\Gamma_0)$ единственную периодическую траекторию Γ_ε , причем она является устойчивым гиперболическим предельным циклом, ее топологический предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon = \Gamma_0$, то есть для любой окрестности $V(\Gamma_0)$ кривой Γ_0 , существует такое число $\bar{\delta} > 0$, что $\Gamma_\varepsilon \subset V(\Gamma_0)$ для всех $\varepsilon \in E_+ \cap (-\bar{\delta}, \bar{\delta})^2$.

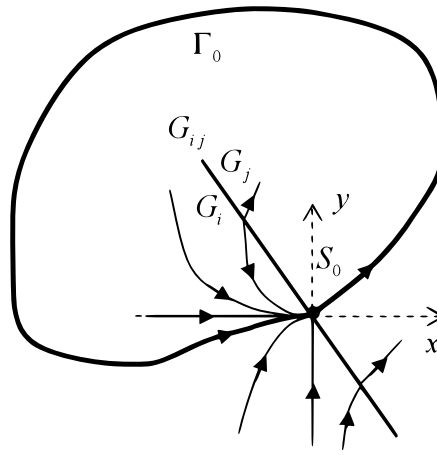


Рис. 1. Петля сепаратрисы сшитого седло-узла

Fig. 1. The loop of separatrix of sewn saddle-node

3. Доказательство теоремы. Траектория поля $\mathbf{v}_0^i$, начинающаяся в точке с координатами $(-d, u)$, где $-d < u < d$, задается уравнением $y = Y(x, u)$, $-d \leq x < 0$, где $Y \in C^{r-1}$, $Y(\cdot, u) \in C^r$,

$$Y'_x(x, u) = \frac{Q(x, Y(x, u), 0)}{P(x, 0)}. \quad (8)$$

Так как производная

$$Y'_u(x, u) = \exp \int_{-d}^x \frac{Q'_y(s, Y(s, u), 0)}{P(s, 0)} ds,$$

то из (4), (5) и (7) получаем $0 < Y'_u(x, u) \leq C \exp \frac{-\lambda}{4ax}$, где $C = \exp \frac{-\lambda}{4ad}$. Поскольку $Y(x, 0) \equiv 0$, то $|Y(x, u)| \leq Cd \exp \frac{-\lambda}{4ax}$. Отсюда, из (8), (4), (5) и (7) имеем оценку $|Y'_x(x, u)| \leq \frac{C_1}{x^2} \exp \frac{-\lambda}{2ax}$ с некоторой постоянной C_1 . Так как

$$Y''_{xx} = \frac{Q'_x(x, Y, 0)}{P(x, 0)} + \frac{Q'_y(x, Y, 0)}{P(x, 0)} Y'_x - \frac{Q(x, Y, 0) P'_x(x, 0)}{P^2(x, 0)},$$

то $|Y''_{xx}(x, u)| \leq \frac{C_2}{x^4} \exp \frac{-\lambda}{2ax}$, где C_2 – постоянная. Аналогично получаем неравенство $|Y'''_{xxx}(x, u)| \leq \frac{C_3}{x^6} \exp \frac{-\lambda}{2ax}$ с некоторой постоянной C_3 . Вследствие полученных оценок

$$Y(-0, u) = Y'_x(-0, u) = Y''_{xx}(-0, u) = Y'''_{xxx}(-0, u) = 0 \quad \text{для всех } u \in (-d, d). \quad (9)$$

Если d достаточно мало, то траектория Γ_0 трансверсально пересекает дугу $x = -d$, $-d < y < d$. Пусть $(-d, y_0)$ – координаты точки пересечения. Пользуясь тем, что центральное многообразие и соответственно координаты (x, y) , в которых поле $\mathbf{v}_0^i$ имеет вид (1), определены не однозначно, покажем, что координаты (x, y) и число d можно выбрать так, что по-прежнему выполняется (3), а $y_0 < 0$.

Предположим, что при выбранных координатах $y_0 \geq 0$. Пусть $y_0 < y_* < d$, $Y_*(x) := Y(x, y_*)$ при $-d \leq x < 0$ и $Y_*(x) := 0$ при $0 \leq x \leq d$. Вследствие (9) $Y_*(x)$ – C^3 -функция. Перейдем к координатам $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y - Y_*(x)$ и сохраним прежние обозначения координат. Поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ в новых координатах будет иметь вид $P(x, \varepsilon) \partial / \partial x + Q_*(x, y, \varepsilon) \partial / \partial y$, где $Q_* \in C^2$, $Q_*(x, 0, 0) \equiv 0$, то есть $y = 0$ – центральное многообразие поля $\mathbf{v}_0^i$. Из доказательства теоремы о центральном многообразии [14, 13] следует, что d можно выбрать так, что векторное поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ при ε , достаточно близких к нулю, имеет центральное многообразие $y = w(x, \varepsilon)$, $x \in [-d, d]$, где w – C^2 -функция, $w(x, 0) \equiv 0$. Сделаем C^2 -замену $\bar{y} = y - w(x, \varepsilon)$, выпрямляющую центральное многообразие, и вернемся к прежним обозначениям координат. В новых координатах поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ имеет тот же вид (1), где функция $P(x, \varepsilon)$ осталась прежняя, а функция Q удовлетворяет тем же условиям, что раньше, но теперь мы можем гарантировать только, что $Q \in C^1$. Поскольку сделанные замены координат были C^1 -близки к тождественному отображению, то δ можно считать выбранными столь малым, что пересечение G_{ij} с малой окрестностью точки S_0 задается уравнением вида $x = \xi(y, \varepsilon)$, где $\xi(0, 0) = 0$, а второе условие в (3) сохраняется. Сделав замену $\bar{x} = x - \xi(0, \varepsilon)$, $\bar{y} = y$ и вернувшись к прежним обозначениям, можно считать, что в новых координатах поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ по-прежнему имеет вид (1), а уравнение G_{ij} в окрестности удовлетворяет условиям (3). Уравнение пересечения Γ_0 с окрестностью точки S_0 теперь имеет вид $y = \hat{Y}(x) = Y(x, y_0) - Y(x, y_*)$, при этом $\hat{Y}(-d) = y_0 - y_* < 0$, чего и хотели добиться.

Из (4) и (5) следуют равенства $P(0, 0) = 0$, $P'_{\varepsilon_2}(0, 0) = 1$, $P'_{\varepsilon_1}(0, 0) = 0$, из которых по теореме о неявной функции получаем, что существуют такие число $\delta > 0$ и C^1 -функция $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\delta, 0]$, $\beta(\varepsilon_1) = -a\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2)$, что

$$\operatorname{sgn} P(0, \varepsilon) = \operatorname{sgn} (\varepsilon_2 - \beta(\varepsilon_1)) \quad \text{для всех } \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta). \quad (10)$$

Выбор δ будет уточнен в дальнейшем.

Пусть $E_+^+ := (-\delta, \delta) \times (0, \delta)$, $E_+^- := \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 \in [0, \delta), \beta(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 \leq 0\}$, $E_+ := E_+^+ \cup E_+^-$, $E_- := E \setminus E_+$.

Из (4)–(6) и (10) следует, что при $\varepsilon \in E_+^-$ $P(\cdot, \varepsilon)$ имеет нуль $x_0(\varepsilon) \in (0, \varepsilon_1]$ и

$$P(x, \varepsilon) > 0 \text{ для всех } x \in [-d, x_0(\varepsilon)), \varepsilon \in E_+^-, \quad (11)$$

$$P(x, \varepsilon) > 0, \text{ для всех } x \in [-d, d], \varepsilon \in E_+^+, \quad (12)$$

$$P(\cdot, \varepsilon) \text{ имеет нуль на } [-d, 0] \text{ для всех } \varepsilon \in E_-. \quad (13)$$

Пусть $\Pi_\varepsilon := [-d, x_0(\varepsilon)) \times [-\bar{d}, \bar{d}]$ при $\varepsilon \in E_+^-$, $\Pi_\varepsilon := [-d, d] \times [-\bar{d}, \bar{d}]$ при $\varepsilon \in E_+^+$, $\Pi_\varepsilon^- := \{(x, y) \in \Pi_\varepsilon : y \leq 0, x \leq \xi(y, \varepsilon)\}$, а δ и $\bar{d} \in (0, d]$ выбраны так, чтобы $-d < \xi(y, \varepsilon) < d$ при всех $y \in [-\bar{d}, \bar{d}]$, $\varepsilon \in E_+$, и для любого $\varepsilon \in E_+^-$ уравнение $\xi(y, \varepsilon) = x_0(\varepsilon)$ имело решение $y = y_0(\varepsilon)$ (рис. 2). Будем отождествлять Π_ε^- с подмножеством в $V_\varepsilon \cap G_i$, состоящим из точек с координатами $(x, y) \in \Pi_\varepsilon^-$.

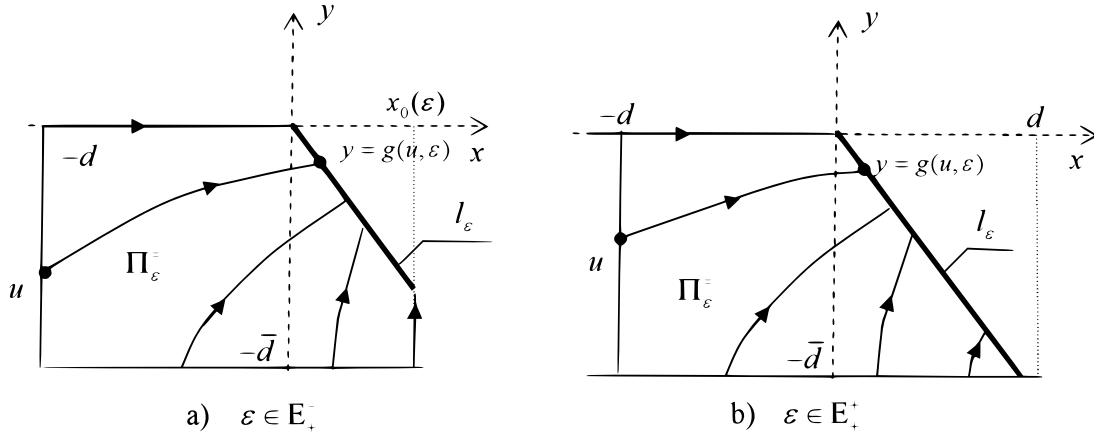


Рис. 2. Множество Π_ε^- . Отображение $g(\cdot, \varepsilon)$

Fig. 2. The set Π_ε^- . The map $g(\cdot, \varepsilon)$

Пусть T_ε – дуга G_{ij} , заданная в координатах (x, y) уравнением $x = \xi(y, \varepsilon)$, $y \in [-d_*, d_*]$, где $d_* \in (0, \bar{d}]$. При достаточно малых d_* и δ траектория поля $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$, начинающаяся в точке этой дуги с координатами $(\xi(u, \varepsilon), u)$, пересекает дугу $x = -d$, $y \in (-\bar{d}, 0)$ в точке с координатами $(-d, f(u, \varepsilon))$, где $f \in C^1$ и

$$0 < f'_u(u, \varepsilon) \leq N \quad (14)$$

с некоторой постоянной N .

Ввиду (11) и (12) для любого $\varepsilon \in E_+$ определено дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, \varepsilon)}{P(x, \varepsilon)}, \quad (x, y) \in \Pi_\varepsilon. \quad (15)$$

Вследствие (7), (11) и (12) оно имеет решение $Y(x, u, \varepsilon)$, определенное при $\varepsilon \in E_+^-$ для $x \in [-d, x_0(\varepsilon))$, а при $\varepsilon \in E_+^+$ для $x \in [-d, d]$, удовлетворяющее начальному условию $Y(-d, u, \varepsilon) = u$, $u \in [-d, d]$. Уравнение $y = Y(x, u, \varepsilon)$ задает траекторию поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, в окрестности точки S_0 .

Из (3), (7), (11) и (12) получаем

$$[Q(x, y, \varepsilon) - \xi'_y(y, \varepsilon)P(x, \varepsilon)]_{x=\xi(y, \varepsilon)} > 0 \text{ для всех } \varepsilon \in E_+, y \in [-\bar{d}, 0]. \quad (16)$$

Ввиду (7), (11) и (16) при $\varepsilon \in E_+^-$ граница множества Π_ε^- состоит из дуг $[-\bar{d}, 0] \times \{0\}$ и $\{x_0(\varepsilon)\} \times [-\bar{d}, y_0(\varepsilon)]$ траекторий поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, дуг $\{-d\} \times [-\bar{d}, 0]$ и $[-d, x_0(\varepsilon)) \times \{-\bar{d}\}$ в точках которых траектории поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ входят в Π_ε^- , не касаясь этих дуг, из дуги $l_\varepsilon : x = \xi(y, \varepsilon)$, $y \in (y_0(\varepsilon), 0]$, в точках которой траектории выходят из Π_ε^- , не касаясь этой дуги (рис. 2). Следовательно, траектория поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, начинающаяся в точке с координатой $(-d, u)$, $u \in (-\bar{d}, 0]$, выходит из Π_ε^- , пересекая дугу l_ε в точке с координатой $y = g(u, \varepsilon)$, $g(0, \varepsilon) = 0$. При $\varepsilon \in E_+^+$ аналогично получаем, что траектория поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, начинающаяся в точке с координатой $(-d, u)$, $u \in (-\bar{d}, 0]$, выходит из Π_ε^- , пересекая дугу l_ε в точке с координатой $y = g(u, \varepsilon)$. Из теорем о функциях соответствия по траекториям [15] следует, что g является C^1 -функцией от $(u, \varepsilon) \in (-\bar{d}, 0] \times E_+$.

Производная $Y'_u(x, u, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Y'_u = \frac{Q'_y(x, Y(x, u, \varepsilon), \varepsilon)}{P(x, \varepsilon)} \cdot Y'_u.$$

и начальному условию $Y'_u(-d, u, \varepsilon) = 1$. Поэтому

$$Y'_u(c, u, \varepsilon) = \exp \int_{-d}^c \frac{Q'_y(x, Y(x, u, \varepsilon), \varepsilon)}{P(x, \varepsilon)} dx.$$

Используя (4), (5), (7) и учитывая, что при $u \in (-\bar{d}, 0]$ $c = c(u, \varepsilon) := \xi(g(u, \varepsilon), \varepsilon) \geq 0$, имеем

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon) \big|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp(\lambda/2) \int_{-d}^{c(u, \varepsilon)} \frac{dx}{\varepsilon_2 + 2a(x - \varepsilon_1)^2} \leq \exp(\lambda/2) \int_{-d}^0 \frac{dx}{\varepsilon_2 + 2a(x - \varepsilon_1)^2}. \quad (17)$$

При $\varepsilon \in E_+^+$ отсюда получаем

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon) \big|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \frac{\lambda}{2\sqrt{2a\varepsilon_2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{2a\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2a(d + \varepsilon_1)}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right). \quad (18)$$

При $\varepsilon_1 \leq 0$ из (18) следует, что

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon) \big|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \frac{\lambda}{2\sqrt{2a\varepsilon_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2a(d + \varepsilon_1)}}{\sqrt{\varepsilon_2}}.$$

Поэтому, считая δ выбранным так, чтобы $\frac{\sqrt{2a(d - \delta)}}{\sqrt{\delta}} > 1$, получаем

$$\text{для всех } \varepsilon \in E_+^+, \varepsilon_1 \leq 0 \quad 0 < Y'_u(x, u, \varepsilon) \big|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \lambda K(\varepsilon), \text{ где } K(\varepsilon) := \frac{\pi}{8\sqrt{2a\varepsilon_2}}. \quad (19)$$

При $\varepsilon \in E_+^+, \varepsilon_1 > 0$ из (18) имеем

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon) \big|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \frac{\lambda}{2\sqrt{2a\varepsilon_2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1)} \right). \quad (20)$$

Покажем, что

$$\text{для всех } \varepsilon \in E_+^+, \varepsilon_1 > 0 \quad 0 < Y'_u(x, u, \varepsilon) \big|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \lambda K(\varepsilon), \quad (21)$$

где $K(\varepsilon) := \min \left\{ \frac{d}{4(\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1))}, \frac{\pi}{8\sqrt{2a\varepsilon_2}} \right\}$.

Действительно, если $\frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1)} < 1$, то из (20) получаем

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon) \big|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \frac{\lambda}{2\sqrt{2a\varepsilon_2}} \frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{2(\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1))} \leq \exp \lambda K(\varepsilon),$$

а если $\frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1)} \geq 1$, то $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1)} \geq \frac{\pi}{4}$, и

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon) \big|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \lambda \frac{\pi}{8\sqrt{2a\varepsilon_2}} \leq \exp \lambda K(\varepsilon).$$

При $\varepsilon \in E_+^-$ из (17) следует оценка

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon) \big|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp(\lambda/4a) \int_{-d}^0 \frac{dx}{(x - \varepsilon_1)^2} = \exp \lambda K(\varepsilon), \quad (22)$$

где $K(\varepsilon) := \frac{d}{4a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1)}$.

Функция $g(u, \varepsilon)$ удовлетворяет тождеству $Y(\xi(g(u, \varepsilon), \varepsilon), u, \varepsilon) - g(u, \varepsilon) \equiv 0$, дифференцируя которое получаем

$$\left[Y'_x(x, u, \varepsilon) \xi'_y(y, \varepsilon) g'_u(u, \varepsilon) + Y'_u(x, u, \varepsilon) \right] x = \xi(y, \varepsilon), y = g(u, \varepsilon) - g'_u(u, \varepsilon) \equiv 0.$$

Следовательно,

$$g'_u(u, \varepsilon) = \left[\frac{Y'_u(x, u, \varepsilon)}{1 - Y'_x(x, u, \varepsilon) \xi'_y(y, \varepsilon)} \right] x = \xi(y, \varepsilon), y = g(u, \varepsilon). \quad (23)$$

При $u \in (-\bar{d}, 0]$ $Y(x, u, \varepsilon) \leq 0$. Отсюда и из (15), (7), (11) и (12) имеем $Y'_x(x, u, \varepsilon) \geq 0$. Так как $\xi'_y(y, \varepsilon) < 0$, то $1 - Y'_x(x, u, \varepsilon) \xi'_y(y, \varepsilon) \geq 1$, и из (19), (21) – (23) получаем

$$0 < g'_u(u, \varepsilon) \leq Y'_u(x, u, \varepsilon) \leq \exp \lambda K(\varepsilon) \text{ для всех } u \in (-\bar{d}, 0], \varepsilon \in E_+.$$

Так как $K(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $\lambda < 0$, то δ можно считать выбранным столь малым, что

$$0 < g'_u(u, \varepsilon) \leq \min\{1/(2d_*), 1/(2N)\} \text{ для всех } u \in (-\bar{d}, 0], \varepsilon \in E_+. \quad (24)$$

Из (24) и равенства $g(0, \varepsilon) = 0$ следует, что $\forall (u, \varepsilon) \in (-\bar{d}, 0] \times E_+$ имеем $g(u, \varepsilon) \in (-d_*, 0]$. Функция $\chi_\varepsilon := g(f(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$, $\varepsilon \in E_+$, является функцией последования по траекториям поля v_ε на дуге T_ε . Она отображает отрезок $[-d_*, d_*]$ в $(-d_*, 0)$. Вследствие (14) и (24) $0 < (\chi_\varepsilon)'(u) < 1/2 \quad \forall u \in [-d_*, d_*]$. Поэтому χ_ε имеет единственную неподвижную точку $u_* \in (-d_*, 0)$, при этом $0 < (\chi_\varepsilon)'(u_*) < 1/2$. Соответственно, дугу T_ε пересекает единственная периодическая траектория поля v_ε – устойчивый гиперболический предельный цикл Γ_ε .

Фиксируем число d_* . Обозначим γ_ε^+ и γ_ε^- не пересекающиеся между собой простые замкнутые кривые, состоящие из дуг траекторий поля v_ε , начинающихся в точках A_ε^+ и A_ε^- дуги T_ε с координатами соответственно

$$y = d_* \quad \text{и} \quad y = -d_*,$$

и кончающихся соответственно в точках B_ε^+ и B_ε^- с координатами $y = f(d_*, \varepsilon)$ и $y = f(-d_*, \varepsilon)$, и из дуг границы области, заданной неравенствами

$$-d \leq x \leq \xi(y, \varepsilon), \quad -\bar{d} \leq y \leq \bar{d},$$

между соответственно точками A_ε^+ и B_ε^+ , A_ε^- и B_ε^- . Кривые γ_ε^+ и γ_ε^- ограничивают связную область W_ε , в которой имеется единственная периодическая траектория Γ_ε . При $\varepsilon = 0$ W_0 – окрестность контура Γ_0 . Пусть μ – расстояние от Γ_0 до $\gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$ в евклидовой метрике в G . Тогда для достаточно малого δ расстояние от Γ_0 до $\gamma_\varepsilon^+ \cup \gamma_\varepsilon^-$ при $\varepsilon \in E_+(\delta) = E_+$ больше $\mu/2$ и потому W_ε также окрестность Γ_0 . Пусть $0 < \rho_0 < \mu/2$ и $U(\Gamma_0)$ – ρ_0 -окрестность Γ_0 . Тогда $U(\Gamma_0) \subset W_\varepsilon$ для любого $\varepsilon \in E_+(\delta)$. Поскольку при доказательстве существования траектории Γ_ε можно заменить d_* на сколь угодно малое число, то можно выбрать столь малое δ , что $\Gamma_\varepsilon \subset U(\Gamma_0)$ при $\varepsilon \in E_+(\delta)$. Следовательно, найдены окрестность $U(\Gamma_0)$ и число δ , существование которых утверждается в теореме. Аналогично, для любой ρ -окрестности U_ρ кривой Γ_0 с $\rho \in (0, \rho_0]$ можно найти такое $\delta_\rho \in (0, \delta)$, что $\Gamma_\varepsilon \subset U_\rho$ при $\varepsilon \in E_+(\delta_\rho)$, то есть $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon = \Gamma_0$.

Тот факт, что при $\varepsilon \in E_-$ в W_ε , а потому и в $U(\Gamma_0)$ нет периодических траекторий, следует из (13).

Все утверждения теоремы доказаны.

Список литературы

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. *Ученые записки Горьковского университета*. 1939;6:3–24.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., Наука. 1967. 488 с.
3. Шильников Л.П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий. *Математический сборник*. 1963; 61(4):443–466.
4. Козлова В.С. Особые точки первой степени негрубости, лежащие на линии разрыва правых частей системы. Москва, МГУ. 1984. Деп. в ВИНТИ. № 4284-84.
5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., Наука, 1985. 224 с.
6. di Bernardo M., Budd Ch.J., Capneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise smooth dynamical systems. *Appl. Math. Sci.* V. 163. London, Springer-Verlag. 2008. 483 p.
7. Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations*. 2011;250(4):1967–2023.
8. Kuznetsov Yu.A., Rinaldi S., Gagnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2003;13(8):2157–2188.
9. Simpson D.J.W. Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems. World scientific series on nonlinear science, series A. Vol. 69. World Scientific Publ. 2010. 238 p.
10. Ройтенберг В.И. О бифуркациях петель сепаратрис особых точек на линии разрыва. Ярославль, Яросл. политехн. ин-т. 1987. Деп. в ВИНТИ. № 2795-B87.
11. Ройтенберг В.И. О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы шитого седло-узла. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2022; 22(2):159–168.
12. Палис Ж., В. Мелу. Геометрическая теория динамических систем. Введение. М., Мир. 1986. 301 с.
13. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований. 2004. 547 с.
14. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир. 1980. 368 с.
15. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., Наука. 1966. 568 с.

References

1. Andronov AA., Leontovich EA. Some cases of dependence of limit cycles on a parameters. *Scientific notes of Gorky University*. 1939;6:3-24 (In Russ).
2. Andronov AA., Leontovich EA., Gordon II., Maier AG. Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane. Moscow, Nauka Publ. 1967. 488 p (In Russ).
3. Shilnikov LP. Some cases of generation of period motions from singular trajectories. *Sbornik. Mathematics*. 1963;61(4):443-466 (In Russ).
4. Kozlova VS. Singular points of the first degree of non-coarsenees lying on a line of discontinuity of the right-hand parts of a system. 1984. Deposited in VINITI. No. 4284-84 (In Russ).
5. Filippov AF. Differential equations with discontinuous right-hand side. Moscow, Nauka Publ. 1985. 224 (In Russ).
6. di Bernardo M., Budd ChJ., Capneys AR., Kowalczyk P. Piecewise smooth dynamical systems. Appl. Math. Sci. V. 163. London, Springer-Verlag. 2008. 483 p.
7. Guardia M., Seara TM., Teixeira MA. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations*. 2011;250(4):1967–2023.
8. Kuznetsov YuA., Rinaldi S, Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2003;13(8):2157–2188.
9. Simpson DJW. Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems. World scientific series on nonlinear science, series A. Vol. 69. World Scientific Publ. 2010. 238 p.
10. Roitenberg VSh. On bifurcations of separatrix loops of singular points on the line of discontinuity. 1984. Deposited in VINITI. No. 2795-B87 (In Russ).
11. Roitenberg VSh. On generation of a limit cycle from a separatrix loop of a sewn saddle-node. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022; 22(2):159–168 (In Russ).
12. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New-York; Heidelberg; Berlin. Springer-Verlag. 1982. 198 p.
13. Shilnikov LP., Shilnikov AL., Turaev DV., Chua LO. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: Part 1. River Edge, N.-J. World Scientific. 1998. 412 p.
14. Marsden JE., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications. New-York. Springer-Verlag. 1986.
15. Andronov AA., Leontovich EA., Gordon II., Maier AG. The qualitative theory of dynamical systems of second order. Moscow, Nauka Publ. 1966. 568 p. (In Russ).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 02.05.2025

Поступила после рецензирования 11.08.2025

Принята к публикации 15.08.2025

Received May 2, 2025

Revised August 11, 2025

Accepted August 15, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir Sh. Roitenberg – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

[К содержанию](#)