

Степенные асимптотики решений двусторонней задачи Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка

Архипов В. П.¹ , Глушак А. В.² ,

¹ Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsuedu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка получены представления решения двусторонней задачи Коши с условиями в точке вырождения. Приведён алгоритм построения степенных асимптотик решений. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, двусторонняя задача Коши, степенные асимптотики решений

Для цитирования: Архипов В. П., Глушак А. В. 2025. Степенные асимптотики решений двусторонней задачи Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 27–40. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-27-40

Original Research

Power Asymptotics of Solutions of the Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations

Viktor P. Arkhipov¹ , Alexander V. Glushak² ,

¹ Orel State University named after I.S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russia
varhipov@inbox.ru

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
Glushak@bsuedu.ru

Abstract. For ordinary linear degenerate differential equations of the second order, representations of the solution of the two-sided Cauchy problem with conditions at the degeneracy point are obtained. An algorithm for constructing power asymptotics of solutions is given. Examples are considered.

Keywords: Degenerate Differential Equations, Two-Sided Cauchy Problem, Power Asymptotics of Solutions

For citation: Arkhipov V. P., Glushak A. V. 2025. Power Asymptotics of Solutions of the Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 27–40. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-27-40

1. Введение. Основные свойства линейных дифференциальных уравнений определяются слагаемыми со старшей производной. Вырождение их в отдельных точках приводит к серьёзным изменениям локального характера решений. В настоящей работе исследуется поведение решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t) \quad (1)$$

с действительными достаточно гладкими коэффициентами и такими, что $a(0) = 0$, $a(t) \neq 0$ при $t \neq 0$, $b(0) \neq 0$.

Изучение уравнений с обращающимся в ноль коэффициентом при старшей производной проводилось широким кругом исследователей. К ним относятся, в частности, уравнения Эйлера, Бесселя и ряд других. К таким уравнениям приводит рассмотрение уравнений в частных производных переменного типа (см. обзорную работу [1]), а также изучение нелинейных [2] и бисингулярных задач [3]. Двухточечные краевые задачи для уравнения (1) исследованы в [4, 5, 6, 7]. Вырождающимся дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве посвящены работы [8, 9]. Наряду с нахождением точных решений, важное значение в теории дифференциальных уравнений имеют также методы построения приближённых решений, в том числе и асимптотические методы (см., например, [10]).

Вопросы существования решений уравнения (1) при определённых условиях и их применение к нелинейным уравнениям исследовалось в [2]. Результаты по асимптотическим представлениям решений уравнения (1) были получены в [11] и развиты в [12, 13]. В статье [14] построены двусторонние асимптотические разложения решений, а в [15, 16] были получены первые асимптотики решений односторонней задачи Коши вблизи точки вырождения. Двусторонняя задача Коши рассматривалась в [2] и [17], где были построены первые асимптотики её решений. Настоящая работа является продолжением исследований, проведённых авторами в [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], а полученные в указанных статьях результаты позволяют предложить несложный алгоритм построения степенных асимптотик решений в окрестности точки вырождения.

2. Существование решений задачи Коши и асимптотика решений. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка (1) с вырождающимся старшим коэффициентом в точке $t = 0$ и гладкими действительными коэффициентами. Поскольку нами исследуется локальная разрешимость и асимптотика решений вблизи точки вырождения, то будем рассматривать это уравнение на отрезке $[-\delta, \delta]$ при некотором $\delta > 0$. Двусторонней задачей Коши будем называть задачу нахождения непрерывного на $[-\delta, \delta]$ решения уравнения (1), удовлетворяющего условию

$$\lim_{t \rightarrow 0\pm} u(t) = u_0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) подробно исследовалась в статье [17], в которой доказана её разрешимость и построены первые асимптотики решений. Приведем здесь соответствующие результаты в необходимой для нас форме.

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) и правая часть $f(t)$ — действительные бесконечно дифференцируемые в окрестности точки $t = 0$ функции, причём $a(0) = 0$, $a(t) \neq 0$ при $t \neq 0$ и $b(0) = b_0 \neq 0$.

Для некоторого $\delta > 0$ на отрезке $[-\delta, \delta]$ определим функции:

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)},$$

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau, \quad h(t) = \frac{1}{4d(t)} \left(a(t) \left(\frac{d'(t)}{d(t)} \right)^2 - 2 \left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)} \right)' - 2b'(t) \right). \quad (3)$$

Если выполнено условие 1, то всегда можно выбрать достаточно малое $\delta > 0$ так, чтобы на $[-\delta, \delta]$ выполнялось следующее условие.

Условие 2. Существует такое $\delta > 0$, что на отрезке $t \in [-\delta, \delta]$ справедливы неравенства

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)} > \frac{|b_0|}{2}, \quad b(t) \neq 0, \quad \int_{-\delta}^{\delta} |h(t)| dt < \frac{1}{2}.$$

Решения задачи (1), (2) существенно зависят от распределения знаков коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ на отрезке $[-\delta, \delta]$. Этот факт подробнее сформулируем в виде нижеследующих теорем, доказательство которых приводится в [17]. В этой же статье приведено и представление в виде абсолютно сходящихся асимптотических рядов используемых в следующей теореме функций $w_1(t)$, $w_2(t)$, $u_2^+(t)$, $u_2^-(t)$.

Теорема 1. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2 и $a(t) > 0$ при $t \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta]$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений $u(t, C) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ этого уравнения, каждая функция которого удовлетворяет условию (2). Для $b_0 < 0$ это семейство имеет вид

$$u(t, C) = w_1(t) + Cu_2^+(t), \quad (4)$$

где $w_1(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$, C — произвольная постоянная, $u_2^+(t) \in C^\infty[0, \delta]$ — продолженное на $[-\delta, 0)$ нулём решение однородного уравнения (1) такое, что $(u_2^+)^{(k)}(0) = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}_0$, и при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0\pm} w_1(t) = u_0, \quad u'(0, C) = \frac{1}{b_0} (f(0) - c(0)u_0).$$

А для $b_0 > 0$ это семейство имеет вид

$$u(t, C) = w_2(t) + Cu_2^-(t), \quad (5)$$

где $w_2(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$, C — произвольная постоянная, $u_2^-(t) \in C^\infty[-\delta, 0]$ — продолженное на $(0, \delta]$ нулём решение однородного уравнения (1) такое, что $(u_2^-)^{(k)}(0) = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}_0$, и при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0\pm} w_2(t) = u_0, \quad u'(0, C) = \frac{1}{b_0} (f(0) - c(0)u_0).$$

Отметим, что при выполнении условий теоремы 1 имеет место равенство $a'(0) = 0$, а в следующей теореме 2 это равенство, вообще говоря, не выполнено.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2 и $ta(t) < 0$ при $t \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta]$. Тогда при $b_0 < 0$ существует единственное непрерывное решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ этого уравнения, удовлетворяющее условию (2), и при этом

$$u'(0) = \frac{1}{b_0 + a'(0)}(f(0) - c(0)u_0).$$

Если $b_0 > 0$, то существует двухпараметрическое семейство

$$u(t, C^-, C^+) \in C^{k_0}[-\delta, \delta], \quad k_0 = \max\{k \in \mathbb{N} : b_0 + ka'(0) > 0\},$$

решений уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (2). Это семейство имеет вид

$$u(t, C^-, C^+) = w_3(t) + C^- u_2^-(t) + C^+ \tilde{u}_2^+(t), \quad (6)$$

где C^-, C^+ — произвольные постоянные,

$$w_3(t) \in C^{k_0}[-\delta, \delta], \quad \lim_{t \rightarrow 0^\pm} w_3(t) = u_0,$$

$u_2^-(t) \in C^{k_0}[-\delta, 0]$ — продолженное на $(0, \delta]$ нулём решение однородного уравнения (1) такое, что $(u_2^-)^{(k)}(0) = 0$ для любых $k \leq k_0$, $\tilde{u}_2^+(t) \in C^{k_0}[0, \delta]$ — продолженное на $[-\delta, 0)$ нулём решение однородного уравнения (1) такое, что $(\tilde{u}_2^+)^{(k)}(0) = 0$ для любых $k \leq k_0$.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 2 $a'(0) = 0$, то полагаем $k_0 = +\infty$. Кроме того, используемые в этой теореме представления в виде абсолютно сходящихся асимптотических рядов функций $u(t)$, $w_3(t)$, $\tilde{u}_2^+(t)$, $u_2^-(t)$ также приведены в [17].

Отметим, что первые асимптотики решений в [15], [16], [17] построены в предположении степенного порядка вырождения коэффициента $a(t)$ и постоянства $b(t) = b_0$. Результатами этих работ и обусловлено следующее условие.

Условие 3. Коэффициенты уравнения (1) и его правая часть $f(t)$ — действительные бесконечно дифференцируемые при $t \in [-\delta, \delta]$ функции, причём $a(t) = (-t)^{m+1}a_0(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $a_0(t) > 0$ при $t \in [-\delta, \delta]$ и $b(t) = b = \text{const} \neq 0$.

Укажем, что в силу условия 3 при $t \rightarrow 0$ справедливы следующие асимптотические представления, определяемых равенством (3) функций:

$$a(t) = t^{m+1}O(1), \quad d(t) = |b|(1 + t^{m+1}O(1)), \quad h(t) = t^{2m}O(1), \quad s(t) = t^{2m+1}O(1).$$

Покажем далее, что при выполнении условия 3 можно установить первые асимптотики главных членов решений в теоремах 1 и 2. Результат сформулируем в виде следующих двух теорем, в которых будут использованы функции

$$\Phi_0(t) = 1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)', \quad \Psi_0(t) = 1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)'. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений $u(t, C) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (2). При $b < 0$ функции этого семейства могут быть записаны в виде (4), где C — произвольная постоянная,

$$w_1(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_0(t) \exp \left(\int_t^0 \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi \right) + u_\star^-(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [-\delta, 0], \\ u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_0(t) \exp \left(- \int_0^t \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi \right) + u_\star^+(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [0, \delta], \end{cases}$$

$$u_\star^-(t) = \Phi_0(t) \int_t^0 \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi \right) d\tau -$$

$$- \Psi_0(t) \int_t^0 \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi \right) d\tau + s^2(t)O(1),$$

$$\begin{aligned}
u_*^+(t) &= -\Phi_0(t) \int_0^t \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau - \\
&- \Psi_0(t) \int_t^\delta \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1).
\end{aligned} \tag{8}$$

При $b > 0$ функции этого семейства могут быть записаны в виде (5), где C — произвольная постоянная,

$$\begin{aligned}
w_2(t) &= \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_0(t) \exp\left(\int_t^0 \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_*^-(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [-\delta, 0], \\ u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_0(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_*^+(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [0, \delta], \end{cases} \\
u_*^+(t) &= -\Phi_0(t) \int_0^t \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + \\
&+ \Psi_0(t) \int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1), \\
u_*^-(t) &= -\Psi_0(t) \int_t^0 \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau - \\
&- \Phi_0(t) \int_{-\delta}^t \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1).
\end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 4. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда при $b < 0$ существует единственное ограниченное решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (2) и оно имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_0(t) \exp\left(\int_t^0 \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_*^-(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [-\delta, 0], \\ u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_0(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + \tilde{u}_*^+(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [0, \delta], \end{cases}$$

где функция $u_*^-(t)$ определена в (8),

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_*^+(t) &= -\Phi_0(t) \int_0^t \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + \\
&+ \Psi_0(t) \int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1).
\end{aligned} \tag{10}$$

При $b > 0$ существует двухпараметрическое семейство решений $u(t, C^-, C^+) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (2). Функции этого семейства могут быть записаны в виде (6), где C^-, C^+ — произвольные постоянные,

$$w_3(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_0(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_*^-(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [-\delta, 0], \\ u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_0(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + \tilde{u}_*^+(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [0, \delta], \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_*^+(t) = & -\Phi_0(t) \int_t^\delta \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + \\ & + \Psi_0(t) \int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1), \end{aligned}$$

а функция $u_*^-(t)$, определена в формуле (9).

3. Построение степенных асимптотик фундаментальной системы решений однородного уравнения. Теоремы 1–4 и формулы (7)–(11) уже позволяют получать степенные асимптотики решений, так как в функции $\Phi_0(t)$, $\Psi_0(t)$ входят только известные функции и достаточно использовать их разложение в точке $t = 0$ по формуле Тейлора. Однако эти же формулы и результаты работ [15, 16, 17], в которых установлено существование хотя бы одного бесконечно дифференцируемого в нуле решения двусторонней задачи Коши (1), (2), позволяют найти простой алгоритм прямого построения степенного представления решений с любой заданной точностью.

Поставим задачу определения фундаментальной системы решений уравнения (1). В дальнейшем нам потребуется установить преобразование, связывающее следующие дифференциальные выражения с переменными коэффициентами

$$L(u(t)) = (a(t)u'(t))' + b(t)u'(t), \quad L^*(u(t)) = (a(t)u'(t))' - (b(t)u(t))'.$$

Введём в рассмотрение функцию

$$q(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_{-\delta}^t \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi\right) & \text{при } t \in [-\delta, 0), \\ \exp\left(\int_t^\delta \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi\right) & \text{при } t \in (0, \delta]. \end{cases} \quad (12)$$

Следует отметить, что в зависимости от соотношения знаков коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ справа и слева от точки вырождения $t = 0$, в точке $t = 0$ функция $q(t)$ имеет ноль или бесконечность произвольного порядка. Функция $q(t)$ была использована в [17] при рассмотрении весовой задачи Коши.

Лемма 1. Пусть $a(t), b(t) \in C^1[-\delta, \delta]$ и $a(t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Тогда для любой функции $v(t) \in C^2[-\delta, \delta]$ при $t \neq 0$ справедливо равенство

$$L(q(t)v(t)) = q(t)L^*(v(t)).$$

Доказательство. Действительно, элементарная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} L(q(t)v(t)) &= (a(t)(q(t)v(t)))' + b(t)(q(t)v(t))' = \\ &= (a(t)(q'(t)v(t) + q(t)v'(t)))' + b(t)(q'(t)v(t) + q(t)v'(t)) = \\ &= (a(t)q'(t)v(t))' + a(t)q'(t)v'(t) + b(t)q'(t)v(t) + q(t)(a(t)v'(t))' + b(t)q(t)v'(t) = \\ &= ((a(t)q'(t))' + b(t)q'(t))v(t) + 2a(t)q'(t)v'(t) + q(t)((a(t)v'(t))' + b(t)v'(t)) = \\ &= ((a(t)q'(t))' + b(t)q'(t))v(t) + 2(a(t)q'(t) + b(t)q(t))v'(t) + q(t)((a(t)v'(t))' - b(t)v'(t)) = \\ &= (a(t)q'(t) + b(t)q(t))'v(t) + 2(a(t)q'(t) + b(t)q(t))v'(t) + q(t)L^*(v(t)) = q(t)L^*(v(t)), \end{aligned}$$

поскольку, учитывая определение (12) функции $q(t)$, легко проверить, что при $t \neq 0$ справедливо равенство $a(t)q'(t) + b(t)q(t) = 0$. Лемма доказана.

При $b = \text{const} \neq 0$ в окрестности точки $t = 0$ рассмотрим соответствующее уравнению (1) однородное уравнение с бесконечно гладкими коэффициентами

$$(a(t)u'(t))' + bu'(t) + c(t)u(t) = 0, \quad (13)$$

для которого выполнены условия 1–3 и, следовательно, для любого сколь угодно большого $N \in \mathbb{N}$ его коэффициенты могут быть представлены в виде

$$a(t) = \sum_{j=m}^N a_j t^j + t^{N+1}O(1), \quad a_m \neq 0, \quad m-1 \in \mathbb{N}, \quad c(t) = \sum_{j=0}^N c_j t^j + t^{N+1}O(1). \quad (14)$$

Перейдём к построению асимптотик при $t \rightarrow 0 \pm$ для фундаментальной системы решений уравнения (13). Как следует из теорем 1, 2, при любых соотношениях знаков коэффициентов уравнения в окрестности точки $t = 0$ и $k \in \mathbb{N}$, существует хотя бы одно бесконечно гладкое решение уравнения (13) с асимптотикой вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1} O(1) \quad (15)$$

и подлежащими определению коэффициентами u_j .

Первое решение для фундаментальной системы решений будем искать именно в таком виде, выбирая $u_0 = 1$. Подставив в уравнение (13) асимптотические разложения (14), (15) для решения и для коэффициентов уравнения и, приравняв коэффициенты при t^n нулю, получим рекуррентные формулы для вычисления всех коэффициентов u_n , $1 \leq n \leq k$.

Если доопределить коэффициенты $a_j = 0$ при $j \leq m - 1$, то асимптотические представления коэффициентов (14) можно записать в виде

$$a(t) = \sum_{j=m}^{k+1} a_j t^j + t^{k+2} O(1) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j t^j + t^{k+2} O(1), \quad c(t) = \sum_{j=0}^k c_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (16)$$

при этом решение уравнения (13) запишем в виде

$$u(t) = \sum_{j=0}^{k+2} u_j t^j + t^{k+3} O(1). \quad (17)$$

Чтобы подставить разложения (16), (17) в уравнение (13), проведём следующие предварительные вычисления:

$$u'(t) = \sum_{j=1}^{k+2} j u_j t^{j-1} + t^{k+2} O(1), \quad b u'(t) = b \sum_{n=0}^{k+1} (n+1) u_{n+1} t^n + t^{k+2} O(1). \quad (18)$$

В дальнейшем зависящие от u_n коэффициенты будем обозначать греческими буквами.

$$c(t) = \sum_{j=0}^k c_j t^j \left(\sum_{i=0}^{k+1} u_i t^i \right) + t^{k+1} O(1) = \sum_{n=0}^k \gamma_n t^n + t^{k+1} O(1), \quad \text{где } \gamma_n = \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (a(t)u'(t))' &= \left(\left(\sum_{j=0}^{k+1} a_j t^j + t^{k+2} O(1) \right) \left(\sum_{n=0}^{k+1} (n+1) u_{n+1} t^n + t^{k+2} O(1) \right) \right)' = \\ &= \left(\left(\sum_{i=0}^{k+1} a_i t^i \right) \left(\sum_{j=0}^{k+1} (j+1) u_{j+1} t^j \right) + t^{k+2} O(1) \right)' = \left(\sum_{j=0}^{k+1} \alpha_j t^j + t^{k+2} O(1) \right)' = \\ &= \sum_{j=m}^{k+1} j \alpha_j t^{j-1} + t^{k+1} O(1) = \sum_{n=m-1}^k (n+1) \alpha_{n+1} t^n + t^{k+1} O(1), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\alpha_j = 0$ при $j \leq m - 1$, а при остальных

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^j a_i (j-i+1) u_{j-i+1} = \sum_{i=m}^j a_i (j-i+1) u_{j-i+1}.$$

После подстановки разложений (16)–(20) в уравнение (13) получим

$$\begin{aligned} L(u(t)) + c(t)u(t) &= (a(t)u'(t))' + b u'(t) + c(t)u(t) = \sum_{n=m-1}^k (n+1) \alpha_{n+1} t^n + t^{k+1} O(1) + \\ &+ b \sum_{n=0}^{k+1} (n+1) u_{n+1} t^n + t^{k+2} O(1) + \sum_{n=0}^k \gamma_n t^n + t^{k+1} O(1) = \\ &= \sum_{n=m-1}^k (n+1) \alpha_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^k (b(n+1) u_{n+1} + \gamma_n) t^n + t^{k+1} O(1) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Приведя в уравнении (21) подобные и приравняв коэффициенты при t^n нулю, считая $u_0 = 1$, получим рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов u_n .

Если $0 \leq n \leq m-2$, то $b(n+1)u_{n+1} + \gamma_n = 0$ и тогда

$$u_{n+1} = -\frac{\gamma_n}{b(n+1)} = -\frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i}. \quad (22)$$

Если $m-1 \leq n \leq k$, то $b(n+1)u_{n+1} + (n+1)\alpha_{n+1} + \gamma_n = 0$ и тогда

$$u_{n+1} = -\frac{(n+1)\alpha_{n+1} + \gamma_n}{b(n+1)} = -\frac{1}{b(n+1)} \left((n+1) \sum_{i=m}^{n+1} a_i(n-i+2)u_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i} \right). \quad (23)$$

Отметим, что в отличие от предыдущих значений, значение u_{k+1} , вычисленное по формуле (23), не может рассматриваться как точное, а функция

$$\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j$$

с коэффициентами, вычисленными по формулам (22), (23), даёт решение уравнения (13) с точностью до $t^{k+1}O(1)$ при $t \rightarrow 0\pm$.

При $t \neq 0$ второе решение $w(t)$, линейно независимое с первым, будем искать в виде

$$w(t) = q(t)v(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j,$$

где функция $q(t)$ определена в (12), а $v_0 = 1$.

Подставляя $w(t)$ в уравнение (13) и учитывая лемму 1, получим уравнение

$$L(w(t)) + c(t)w(t) = L(q(t)w(t)) + c(t)q(t)w(t) = q(t) (L^*(v(t)) + c(t)v(t)) = 0$$

и, следовательно, функция $v(t)$ может быть выбрана из равенства $L^*(v(t)) + c(t)v(t) = 0$. Коэффициенты v_k могут быть рассчитаны по формулам (22), (23) с заменой в них коэффициента b на $-b$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 5. Пусть коэффициенты $a(t)$, $c(t)$ уравнения (13) удовлетворяют условию 1, причем для $j \leq m-1 \in \mathbb{N}$ производные $a^{(j)}(0) = 0$, $a^{(m)}(0) \neq 0$, $b = \text{const} \neq 0$. Тогда образующие фундаментальную систему решений этого уравнения функции $u(t)$ и $w(t)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \rightarrow 0\pm$ допускают асимптотические представления вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1}O(1), \quad w(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j + t^{k+1}O(1), \quad (24)$$

и коэффициенты u_j, v_j этих разложений вычисляются по рекуррентным формулам

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i}, \quad 0 \leq n \leq m-2,$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{b(n+1)} \left((n+1) \sum_{i=m}^{n+1} a_i(n-i+2)u_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i} \right), \quad m-1 \leq n \leq k, \quad (25)$$

$$v_0 = 1, \quad v_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i}, \quad 0 \leq n \leq m-2,$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \left((n+1) \sum_{i=m}^{n+1} a_i(n-i+2)v_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i} \right), \quad m-1 \leq n \leq k, \quad (26)$$

где a_i, c_i — коэффициенты разложения функций $a(t)$, $c(t)$ по формуле Тейлора в точке $t = 0$, функция $q(t)$ определена в (12) и, в зависимости от соотношения знаков коэффициентов $a(t)$ и b справа и слева от точки вырождения $t = 0$, в этой точке она имеет ноль или бесконечность произвольного порядка.

4. Построение степенных асимптотик решения двусторонней задачи Коши для неоднородного уравнения. Результаты теорем 1–4 о разрешимости двусторонней задачи Коши позволяют использовать методику теоремы 5 и для построения решения неоднородного уравнения (1), которая приводит нас к следующему утверждению.

Теорема 6. Пусть коэффициенты $a(t)$, $c(t)$ уравнения (13) удовлетворяют условию 1, причем для $j \leq m-1 \in \mathbb{N}$ производные $a^{(j)}(0) = 0$, $a^{(m)}(0) \neq 0$, $b = \text{const} \neq 0$. Тогда существует решение $\hat{u}(t) \in$

$C^\infty[-\delta, \delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), которое для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \rightarrow 0 \pm$ допускает асимптотическое представление

$$\tilde{u}(t) = \sum_{j=0}^k \tilde{u}_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (27)$$

где коэффициенты $\tilde{u}_j$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\tilde{u}_0 = u_0, \quad \tilde{u}_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \left(f_n - \sum_{i=0}^n c_i \tilde{u}_{n-i} \right), \quad 0 \leq n \leq m-2, \quad (28)$$

$$\tilde{u}_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \left(f_n - (n+1) \sum_{i=m}^{n+1} a_i (n-i+2) \tilde{u}_{n-i+2} - \sum_{i=0}^n c_i \tilde{u}_{n-i} \right), \quad m-1 \leq n \leq k, \quad (29)$$

a_i, c_i, f_i — коэффициенты разложения функций $a(t), c(t), f(t)$ по формуле Тейлора в точке $t = 0$.

Доказательство. Как уже отмечалось ранее в теоремах 1–4, при любых соотношениях знаков коэффициентов уравнения (1) в окрестности точки $t = 0$ существует хотя бы одно бесконечно дифференцируемое решение двусторонней задачи Коши (1), (2). Запишем для него, для коэффициентов и правой части уравнения (1) представления вида (16), (17) и подставим в уравнение (1). Получим

$$\begin{aligned} L(\tilde{u}(t)) + c(t)\tilde{u}(t) &= \sum_{n=m-1}^k (n+1)\alpha_{n+1}t^n + t^{k+1}O(1) + \\ &+ b \sum_{n=0}^{k+1} (n+1)\tilde{u}_{n+1}t^n + t^{k+2}O(1) + \sum_{n=0}^k \gamma_n t^n + t^{k+1}O(1) = \\ &= \sum_{n=m-1}^k (n+1)\alpha_{n+1}t^n + \sum_{n=0}^k (b(n+1)u_{n+1} + \gamma_n) t^n + t^{k+1}O(1) = \sum_{n=0}^k f_n t^n + t^{k+1}O(1). \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогично доказательству теоремы 5, приравняв в равенстве (30) коэффициенты при t^n , получим требуемые представления (27)–(29) для решения задачи (1), (2). Полученные представления и завершают доказательство теоремы.

5. Асимптотика решений двусторонней задачи Коши в случае сверхбыстрого вырождения.

В теоремах 3–5 асимптотические представления решений уравнения (1) получены для степенного вырождения его старшего коэффициента. Покажем, что аналогичные результаты могут быть установлены и при «сверхбыстрых» вырождениях. Для бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(t)$, такой, что $\varphi^{(k-1)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, будем использовать обозначение $\varphi(t) = o(t^\infty)$ при $t \rightarrow 0$ и называть бесконечно малой произвольного порядка малости. Таковы, например, функции $\varphi(t) = \exp(-t^{-2k})$, $k \in \mathbb{N}$, доопределённые нулём при $t = 0$.

Теорема 7. Пусть коэффициенты $a(t), c(t)$ и правая часть $f(t)$ уравнения (1) удовлетворяют условию 1, причём $a(t) = o(t^\infty)$ при $t \rightarrow 0$, $b = \text{const} \neq 0$. Тогда справедливы утверждения:

1°. Существует решение задачи Коши (1), (2), которое для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \rightarrow 0 \pm$ допускает асимптотическое представление

$$\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^k \hat{u}_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (31)$$

где

$$\hat{u}_0 = u_0, \quad \hat{u}_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \left(f_n - \sum_{i=0}^n c_i \hat{u}_{n-i} \right), \quad 0 \leq n \leq k,$$

c_i, f_i — коэффициенты разложения функций $c(t), f(t)$ по формуле Тейлора в точке $t = 0$;

2°. При $t \rightarrow 0 \pm$ образующие фундаментальную систему решений этого уравнения функции $u(t)$ и $w(t)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ допускают асимптотические представления вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad w(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (32)$$

где коэффициенты u_j, v_j этих разложений вычисляются по рекуррентным формулам

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i}, \quad 0 \leq n \leq k,$$

$$v_0 = 1, \quad v_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i}, \quad 0 \leq n \leq k,$$

c_i — коэффициенты разложения функции $c(t)$ по формуле Тейлора в точке $t = 0$, функция $q(t)$ определена в (12) и в зависимости от соотношения знаков коэффициентов $a(t)$ и b справа и слева от точки вырождения $t = 0$, в этой точке она имеет ноль или бесконечность произвольного порядка.

Доказательство 1°. Существование решения задачи Коши (1), (2) установлено в теоремах 1 и 2. Как и при доказательстве теоремы 5, асимптотические представления решения $\hat{u}(t)$ и коэффициентов уравнения запишем в виде

$$\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^{k+2} \hat{u}_j t^j + t^{k+3} O(1), \quad c(t) = \sum_{j=0}^k c_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad f(t) = \sum_{j=0}^k f_j t^j + t^{k+1} O(1). \quad (33)$$

Из условия теоремы следует, что при $t \rightarrow 0$

$$(a(t)\hat{u}'(t))' = o(t^{+\infty}) \quad \text{и} \quad a_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (34)$$

поэтому после подстановки разложений (33) в уравнение (1) получим

$$\begin{aligned} & (a(t)\hat{u}'(t))' + b\hat{u}'(t) + c(t)\hat{u}(t) = \\ &= (a(t)\hat{u}'(t))' + b \sum_{n=0}^{k+1} (n+1)\hat{u}_{n+1}t^n + t^k O(1) + \sum_{n=0}^k \left(\sum_{i=0}^n c_i \hat{u}_{n-i} \right) t^n + t^{k+1} O(1) = \\ &= \sum_{n=0}^k \left(b(n+1)\hat{u}_{n+1} + \sum_{i=0}^n c_i \hat{u}_{n-i} \right) t^n + t^{k+1} O(1) = \sum_{n=0}^k f_n t^n + t^{k+1} O(1). \end{aligned} \quad (35)$$

Приведа в уравнении (35) подобные и приравняв коэффициенты при t^n в левой и правой частях, получим рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов $\hat{u}_n$, которые и приводят к (31).

Доказательство 2° вытекает из теоремы 5, если учесть асимптотику (34). Теорема доказана.

Замечание 2. Как показывают лемма 1 и ход доказательства теорем 5–7, требование постоянства коэффициента $b(t)$ уравнения (1) в этих теоремах не существенно, а лишь сокращает необходимые преобразования.

6. Степенные асимптотики фундаментальной системы решений однородного уравнения в случае слабого вырождения. В предыдущих пунктах при построении асимптотик рассматривался случай так называемого сильного вырождения коэффициента $a(t)$, когда $a(0) = a'(0) = 0$. Процесс построения степенных асимптотик фундаментальной системы решений однородного уравнения в случае слабого вырождения, когда $a(0) = 0$, $a'(0) \neq 0$, таков же, как и в п. 3, поэтому в этом пункте мы укажем лишь окончательные результаты проведённого исследования.

Рассмотрим однородное уравнение (13) в случае слабого вырождения, когда

$$a(t) = \sum_{j=0}^{N+1} a_j t^j + t^{N+2} O(1), \quad \text{где } a_0 = 0, \quad a_1 < 0, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Далее во всех формулах a_i и c_i — коэффициенты разложения в ряд Тейлора в точке $t = 0$ функций $a(t)$ и $c(t)$.

Согласно теореме 2, при $b > 0$ существует решение $u(t) \in C^{k_0}[-\delta, \delta]$ уравнения (13), где $k_0 = \max\{k \in \mathbb{N} : b + ka_1 > 0\}$, а при $b < 0$ у этого уравнения существует решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$.

В рассматриваемом случае слабого вырождения определяемую равенством (12) функцию $q(t)$ с точностью до постоянной можно записать в виде

$$q(t) = \begin{cases} (-t)^{-b/a_1} (1 + t \cdot O(1)) & \text{при } t \in [-\delta, 0), \\ t^{-b/a_1} (1 + t \cdot O(1)) & \text{при } t \in (0, \delta]. \end{cases} \quad (36)$$

Действительно, при $t \in (0, \delta]$ имеем

$$\begin{aligned} q(t) &= \exp \left(\int_t^\delta \frac{b \, d\xi}{a(\xi)} \right) = \exp \left(\int_t^\delta \frac{b \, d\xi}{a_1 \xi (1 + \xi O(1))} \right) = \exp \left(\frac{b}{a_1} \int_t^\delta \frac{(1 + \xi O(1)) \, d\xi}{\xi} \right) = \\ &= \exp \left(\frac{b}{a_1} \left(\int_t^\delta \frac{d\xi}{\xi} + \int_t^\delta O(1) \, d\xi \right) \right) = \exp \left(\frac{b}{a_1} \left(\ln \frac{\delta}{t} + t O(1) \right) \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\delta}{t}\right)^{b/a_1} \exp\left(\frac{b}{a_1} t O(1)\right) = q_1 t^{-b/a_1} (1 + t \cdot O(1))$$

с некоторой постоянной $q_1 > 0$. Аналогично рассматривается функция $q(t)$ и при $t \in [-\delta, 0)$. Степенные асимптотики фундаментальной системы решений однородного уравнения в случае слабого вырождения устанавливаются в следующей теореме.

Теорема 8. Пусть коэффициенты уравнения (13) удовлетворяют условию 1, причём $a_0 = 0$, $a_1 < 0$, $b = \text{const} \neq 0$. Функции $u(t)$ и $w(t)$, образующие фундаментальную систему решений этого уравнения, для любого $k \in \mathbb{N}$ допускают при $t \rightarrow 0 \pm$ асимптотические представления вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad w(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (37)$$

где функция $q(t)$ определена равенством (36) при некотором $\delta > 0$.

1°. При $b < 0$ функция $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты u_j в представлении (37) вычисляются по рекуррентным формулам

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -\frac{c_0}{a_1 + b} u_0,$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(a_1(n+1) + b)} \left((n+1) \sum_{i=2}^{n+1} a_i (n-i+2) u_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i} \right), \quad 1 \leq n \leq k.$$

Функция $v(t) \in C^{k_1}[-\delta, \delta]$, где $k_1 = \max\{k \in \mathbb{N} : -b + ka_1 > 0\}$ и для любого $n \leq k_1 - 2$ коэффициенты v_j в представлении (37) вычисляются по рекуррентным формулам

$$v_0 = 1, \quad v_1 = -\frac{c_0}{a_1 - b} v_0,$$

$$v_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(a_1(n+1) - b)} \left((n+1) \sum_{i=2}^{n+1} a_i (n-i+2) v_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i} \right), \quad 1 \leq n \leq k_1 - 2,$$

и при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0 \pm} q(t) = \lim_{t \rightarrow 0 \pm} w(t) = +\infty.$$

2°. При $b > 0$ функция $u(t) \in C^{k_0}[-\delta, \delta]$, где $k_0 = \max\{k \in \mathbb{N} : b + ka_1 > 0\}$ и для любого $n \leq k_0 - 2$ коэффициенты u_j в представлении (37) вычисляются по рекуррентным формулам

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -\frac{c_0}{a_1 + b} u_0,$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(a_1(n+1) + b)} \left((n+1) \sum_{i=2}^{n+1} a_i (n-i+2) u_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i} \right), \quad 1 \leq n \leq k_0 - 2.$$

Функция $v(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты v_j в представлении (37) вычисляются по рекуррентным формулам

$$v_0 = 1, \quad v_1 = -\frac{c_0}{a_1 - b} v_0,$$

$$v_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(a_1(n+1) - b)} \left((n+1) \sum_{i=2}^{n+1} a_i (n-i+2) v_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i} \right), \quad 1 \leq n \leq k,$$

и при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0 \pm} q^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0 \pm} w^{(k)}(t) = 0, \quad k \leq k_0,$$

а доопределённая нулём при $t = 0$ функция $w(t)$ принадлежит пространству $C^{k_0}[-\delta, \delta]$.

7. Примеры.

Пример 1. При $m \geq 2$, $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ рассмотрим однородное уравнение

$$(t^m u'(t))' + bu'(t) + cu(t) = 0. \quad (38)$$

По теореме 5 одно решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ из фундаментальной системы решений имеет вид (см. (24))

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (39)$$

а коэффициенты вычисляются по формулам (см. (25))

$$\begin{aligned} u_0 - \text{произвольно, } u_{n+1} &= \left(-\frac{c}{b}\right)^{n+1} \frac{u_0}{(n+1)!}, \quad 0 \leq n \leq m-2, \\ u_{n+1} &= -\frac{(n+1)(n-m+2)u_{n-m+2} + cu_n}{b(n+1)}, \quad m-1 \leq n \leq k. \end{aligned} \quad (40)$$

Другое решение $w(t)$ из фундаментальной системы решений имеет вид (см. (24))

$$w(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad q(t) = \exp\left(\frac{bt^{1-m}}{m-1}\right), \quad (41)$$

а коэффициенты вычисляются по формулам (см. (26))

$$\begin{aligned} v_0 - \text{произвольно, } v_{n+1} &= \left(\frac{c}{b}\right)^{n+1} \frac{v_0}{(n+1)!}, \quad 0 \leq n \leq m-2, \\ v_{n+1} &= \frac{(n+1)(n-m+2)v_{n-m+2} + cv_n}{b(n+1)}, \quad m-1 \leq n \leq k. \end{aligned} \quad (42)$$

В частности, при $m = 2$, как следует из (40) и (42), одно решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ имеет вид (39), где u_0 – произвольно,

$$u_1 = -\frac{c}{b}u_0, \quad u_{n+1} = -\frac{n(n+1)+c}{b(n+1)}u_n, \quad 1 \leq n \leq k,$$

а другое решение $w(t)$ имеет вид (41), где v_0 – произвольно,

$$q(t) = \exp\left(\frac{b}{t}\right), \quad v_1 = \frac{c}{b}v_0, \quad v_{n+1} = \frac{n(n+1)+c}{b(n+1)}v_n, \quad 1 \leq n \leq k.$$

Как следует из этих формул, при значениях $m = 2$, $c = -l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$ функции $u(t)$ и $w(t)$ могут быть выписаны в явном виде. Например, при $l = 1$, $c = -2$ фундаментальная система решений имеет вид

$$u(t) = u_0 \left(\frac{2}{b}t + 1\right), \quad w(t) = v_0 \left(-\frac{2}{b}t + 1\right) \exp\left(\frac{b}{t}\right),$$

а при $l = 2$, $c = -6$

$$u(t) = u_0 \left(\frac{12}{b^2}t^2 + \frac{6}{b}t + 1\right), \quad w(t) = v_0 \left(\frac{12}{b^2}t^2 - \frac{6}{b}t + 1\right) \exp\left(\frac{b}{t}\right).$$

Отметим также, что при $m = 2$ точные значения функций $u(t)$ и $w(t)$ выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}, 1 - \sqrt{1-4c}; \frac{b}{t}\right),$$

которая, как известно, становится полиномом при

$$c = -l(l+1), \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c} = -l, \quad l \in \mathbb{N},$$

что подтверждает полученные ранее в явном виде асимптотические решения.

Пример 2. Пусть $a(t) = o(t^\infty)$ при $t \rightarrow 0\pm$, а коэффициенты $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Тогда по теореме 7 одно решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ из фундаментальной системы решений уравнения

$$(a(t)u'(t))' + bu'(t) + cu(t) = 0$$

имеет вид (32), и коэффициенты вычисляются по формулам

$$u_{n+1} = \left(-\frac{c}{b}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}, \quad 0 \leq n \leq k.$$

Таким образом, для любого $k \in \mathbb{N}$

$$u(t) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(-\frac{c}{b}t\right)^n + t^{k+1} O(1) = \exp\left(-\frac{c}{b}t\right) + t^{k+1} O(1).$$

Аналогично, также по теореме 7, для любого $k \in \mathbb{N}$ асимптотическое представление для другого решения $w(t)$ из фундаментальной системы решений имеет вид

$$w(t) = q(t) \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(\frac{c}{b}t\right)^n + t^{k+1}O(1) = q(t) \exp\left(\frac{c}{b}t\right) + t^{k+1}O(1),$$

где функция $q(t)$ определена равенством (12) при некотором $\delta > 0$.

Пример 3. Пусть $f(t)$ является действительной бесконечно дифференцируемой на отрезке $[-\delta, \delta]$ функцией. Определим решение неоднородного уравнения

$$(t^2 u'(t))' + u'(t) - 2u(t) = f(t), \quad (43)$$

удовлетворяющего условию (2).

Общее решение уравнения (43) имеет вид

$$u(t) = C_1(2t + 1) + C_2(2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right) + u_f(t), \quad (44)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные,

$$u_1(t) = 2t + 1, \quad u_2(t) = (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right)$$

есть фундаментальная система решений уравнения (43) (см. пример 2), а частное решение $u_f(t)$ можно выбрать в виде

$$u_f(t) = \begin{cases} (2t + 1) \int_t^0 (2\xi - 1) f(\xi) d\xi + (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right) \int_{-\delta}^t (2\xi + 1) \exp\left(-\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi, & t < 0, \\ -(2t + 1) \int_0^t (2\xi - 1) f(\xi) d\xi + (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right) \int_0^t (2\xi + 1) \exp\left(-\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi, & t > 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right) \int_0^t (2\xi + 1) \exp\left(-\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0\pm} u_f(t) = 0,$$

что позволяет доопределить $u_f(0) = 0$ и обеспечить нужную гладкость решения.

Для выполнения начального условия (2) следует выбрать $C_1 = u_0, C_2 = 0$.

В рассматриваемом примере предел при $t \rightarrow 0$ функций $u_2^{(k)}(t)$, $k \in \mathbb{N}_0$ равен нулю. Поэтому функция

$$u_2^-(t) = \begin{cases} (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right), & t < 0, \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

является бесконечно малым при $t \rightarrow 0$ решением однородного уравнения (13), а указанное в формуле (5) теоремы 1 семейство решений уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (2), имеет вид

$$u(t) = u_0(2t + 1) + u_f(t) + C u_2^-(t).$$

Заметим, что асимптотика функции $u_f(t)$ для конкретных $f(t)$ может быть получена с помощью различных пакетов математических вычислений.

Список литературы

1. Глушко В.П., Савченко Ю.Б. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи. *Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ»* 1985;23:125–218.
2. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998.4(3):1063–1095.
3. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989. 336 с.
4. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. I. *Дифференц. уравнения*. 1968;4(9):1584–1597.

5. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II. *Дифференц. уравнения*. 1968;4(11):1956–1966.
6. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. III. *Дифференц. уравнения*. 1969;5(3):443–455.
7. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. IV. *Дифференц. уравнения*. 1969;5(4):599–611.
8. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж. 1972. 193.
9. Глушак А.В. О разрешимости вырождающихся гиперболических дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. *Дифференц. уравнения*. 2021;57(1):61–75.
10. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1968. 464.
11. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференц. уравнения*. 2011;47(10):1383–1393.
12. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2016;20(241)44:5–22.
13. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления спектра. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2016; 27(248)45: 45–59.
14. Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2013;5(148)30:5–18.
15. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика и Физика*. 2023;55(3):197–206.
16. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика и Физика*. 2024;56(2):87–96.
17. Архипов В.П., Глушак А.В. Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения. *Прикладная математика и Физика*. 2024;56(4):245–260.

References

1. Glushko VP., Savchenko YuB. Higher-order degenerate elliptic equations: Spaces, operators, boundary-value problems. *Journal of Soviet Mathematics*. 1987. 39:6:3088–3148. (In Russ.)
2. Rosov NKh, Sushko VG, Chudova DI. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. *Fundam. Prikl. Matem.* 1998;4(3):1063–1095. (In Russ.)
3. Ilyin AM. Coordination of asymptotic expansions of solutions to boundary value problems. М.: Nauka. 1989. 336 p. (In Russ.)
4. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. I. *Differential Equations*. 1968;4:9:1584–1597. (In Russ.)
5. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. II. *Differential Equations*. 1968;4:11:1956–1966. (In Russ.)
6. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. III. *Differential Equations*. 1969;5:3:443–455. (In Russ.)
7. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. IV. *Differential Equations*. 1969;5:4:599–611. (In Russ.)
8. Glushko VP. 1972. Linear Degenerating Differential Equations, Voronezh. 193. (In Russ.)
9. Glushak AV. Solvability of degenerating hyperbolic differential equations with unbounded operator coefficients. *Differential Equations*. 2021;57(1):61–75. (In Russ.)
10. Wasow W. Asimptoticheskie razlozheniya resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Moscow: Mir Publ. 1968. 464. (In Russ.)
11. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations*. 2011;47(10):1383–1393. (In Russ.)
12. Arhipov VP, Glushak AV. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of of solutions. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics*. 2016;20(241)44:5–22. (In Russ.)
13. Arhipov VP, Glushak AV. 2016. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of spectrum. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics*. 2016; 27(248)45: 45–59. (In Russ.)
14. Arhipov VP, Glushak AV. Asymptotic representations of solutions of differential second order equations near the point of degeneration. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics*. 2013;5(148)30:5–18. (In Russ.)
15. Arkhipov VP, Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics and Physics*. 2023;55(3):197–206. (In Russ.)
16. Arkhipov VP, Glushak AV. Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations. *Applied Mathematics and Physics*. 2024;56(2):87–96. (In Russ.)

17. Arkhipov VP, Glushak AV. Two-sided Cauchy problem for degenerate second-order differential equations with conditions at the degeneracy point. *Applied Mathematics and Physics*. 2024;56(4): 245 – 260. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.12.2024

Поступила после рецензирования 20.02.2025

Принята к публикации 24.02.2025

Received December 10, 2024

Revised February 20, 2025

Accepted February 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орёл, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)